

II. (к § 10) Элементарные системы в общей теории относительности

т. I4, № I, 1973, стр. 52-56.

РЕЗЮМЕ

Анализируется проблема определения элементарных систем в ОТО и сравниваются некоторые современные теории. Предлагается определение динамически свободных локальных элементарных систем в ОТО, принимая во внимание влияние гравитационного поля, возникающего из внутренней зависимости симметрии групп от поля.

В В Е Д Е Н И Е

Под элементарной системой мы будем понимать собрание ^{которые получаются} безструктурных объектов /из классификации унитарных неприводимых представлений некоторой группы симметрии в физической теории^{I)}. В случае СТО элементарные системы определяются группой изометрий пространства-времени Минковского (группа Пуанкаре), дающей близкую (замкнутую) аппроксимацию, которая в настоящее время известна, как элементарные частицы. Когда мы имеем дело с ОТО, мы имеем набор пространств-времени вместо единственного пространства-времени Минковского в СТО. Это изменение в геометрической структуре приводит нас к вопросу, должна ли структура элементарных систем в ОТО отличаться от таковой в СТО, каковы эти изменения в структуре и каково физическое значение новой структуры. Определение элементарных систем в ОТО зави-

сит от характеристики определённой симметричной группы, которая определяется в ОТО. В отличие от СТО в ОТО мы не имеем заранее заданного пространства-времени. Тем не менее, задавая определённое пространство-время в ОТО, мы должны быть способны определить элементарные системы в этом пространстве-времени. Поэтому перед нами стоят две проблемы. С одной стороны, определение элементарных систем в ОТО без предварительного выбора определённого пространства-времени и, с другой стороны, определение элементарных систем в данном пространстве-времени ОТО. Эти две проблемы должны быть совместимы. Один путь обеспечить эту совместимость — это выбор такой группы симметрии, которая будет верна в обоих случаях. Это решение приводит к строгим ограничениям выбора групп симметрии. Более общее решение — рассмотрение группы симметрий, определённых в ОТО, и проекция её на каждое пространство-время.

В этом случае совместимость условий означает, что проектируемая группа должна совпадать с соответствующей группой симметрий, определённых в пространстве-времени.

2. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ СВЯЗЬ

Мы продолжим краткий обзор и комментарий некоторых современных теорий элементарных систем в общей теории относительности, классифицируя их согласно соответствующей групповой симметрии.

А. Теория Пуанкаре

Эта теория основывается на предположении, что гравитационная сила слишком слаба для совершения какого-либо значительного изменения в структуре элементарных систем, определённых в СТО. Поэтому элементарные системы определяются представлениями группы Пуанкаре. Эта группа может быть определена в ОТО различными способами. Эта группа может рассматриваться, как расслоенная группа касательной пучка плюс перемещения. Её, таким образом, можно рассматривать как голономную группу ортогональных тетрад плюс перемещения. Тот факт, что перемещения должны быть добавлены отдельно к группе Пуанкаре в ОТО, кажется патологическим.²⁾ Поскольку может быть несколько математических способов введения группы Пуанкаре в ОТО, это не должно быть слишком искусственно.

Группа Пуанкаре в СТО имеет ясное значение, как группа изометрий пространства-времени. С физической точки зрения можно сказать, что слабость гравитационных сил не должна пониматься слишком серьёзно, когда мы рассматриваем теоретическое определение группы, где нет места для динамических рассмотрений. Пример теории этого типа предложен Ниманном и Розеном,³⁾ которые предложили определение типа Пуанкаре для элементарных систем и использовали технику локального вложения для определения внутренних симметрий. Новым примером является недавно предложенная $f-g$ теория Салама, которая предполагает определение типа Пуанкаре для спина двух мезонов, но достаточно курьёзно предположение

динамического взаимодействия, когда присутствует сильное гравитационное поле.

BMS' теория

Вторая предложенная структура элементарных систем основывается на группе, которая тесно связана с группой пространств-времен OTO ; поскольку группа Пуанкаре есть группа изометрий пространства-времени Минковского, естественно исследовать групповую структуру со сходными свойствами в OTO . К несчастью, точные изометрии не постоянно присутствуют в пространствах-временах OTO . Тем не менее, в случаях асимптотически плоских пространств-времен может быть определена аппроксимативная изометрическая группа.

Эта группа есть BMS' группа асимптотических изометрий, и она отличается от группы Пуанкаре тем, что перемещения заменяются суперперемещениями в полупрямом произведении с группой Лоренца. 5,6

Поскольку элементарные системы, связанные с группой BMS , определены асимптотически, они могут быть предположены асимптотически свободными от гравитации. Тем не менее, факт, что группа BM отличается от группы Пуанкаре, показывает, что элементарные системы, определяемые этой группой, не полностью свободны от гравитационного поля. Это может быть видно из следующего мысленного эксперимента. Предположим, что гравитационное поле может быть выключено (то есть не просто "сделано равным нулю", но выключено перенесением источника поля на большое расстояние), тогда группа изо-

метрий в этой новой ситуации должна быть группой Пуанкаре, которая обязана вести к гравитационно свободным элементарным системам СТО. В действительности исключение не может быть сделано, и элементарные системы испытывают действия гравитационного поля даже, если они очень удалены от источников этого поля. Поэтому элементарные системы, определённые группой BS , непрямо связаны с гравитационным полем. Это нединамическая связь. Она (связь) обязана своим существованием только зависимости рассматриваемой группы симметрии (BS) от гравитационного поля и не зависит от силы этого поля. Вышеупомянутый вывод ведёт нас к концепции кинематической связи. Если какие-либо физические структуры определяются группой симметрий, это значит, что они кинематически связаны полем, от которого эта группа зависит, то есть как BS , так и Пуанкаре — структуры элементарных систем в ОТО динамически свободны от гравитационного поля. Тем не менее в случае BS они кинематически связаны в этом поле. Трудности BS — теории лежат в асимптотическом характере элементарных систем, оставляющим неразрешимой проблему определения элементарных систем вблизи источника гравитационного поля. Дальнейшие трудности заключаются в асимптотически плоских пространствах-времених и бесконечном числе операторов Казимира группы BS .

С. Теория де Ситтера

Наиболее широко изученная модель элементарных систем в ОТО основывается на группе де Ситтера. Космологические приложения пространства-времени де Ситтера легко сравниваются

со случаем плоского пространства времени. 10 параметров группы де Ситтера есть главные атрибуты этой модели. Некоторые представления группы де Ситтера были вычислены при использовании локального изометрического вложения пространства-времени де Ситтера^[7,8].

Результирующие элементарные системы очевидно кинематически связываются в гравитационном поле, которое характеризует геометрию пространства-времени де Ситтера.

Дальнейшие свойства этих элементарных систем были изучены по аналогии с элементарными системами пространства-времени Минковского.

Отрицательный аспект этой теории, когда она рассматривается с точки зрения ОТО, есть ограничение, связанное с единственным и специфическим выбором пространства-времени. Было бы желательным иметь расширение этой модели элементарных систем на всю ОТО.

3. ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ЛОКАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СИСТЕМЫ

Расширение модели элементарных систем де Ситтера на все пространства-времени ОТО может быть сделано при следующих условиях.

Поскольку модель де Ситтера элементарных систем определяется предварительным выбором пространства-времени, распространение её на ОТО требует прежде всего, чтобы уравнения Эйнштейна содержали в себе процесс определения, как определённое множество пространств-времён, подлежащих использованию. Во-вторых, мы заметим, что модель де Ситтера основывается

на точной изометрии. Это кажется слишком ограниченным, поскольку не все пространства-времена ОТО разрешают векторное поле Киллинга. Тем не менее имеются некоторые физические оправдания для использования изометрий. В физической теории, основанной на метрической геометрии, физические измерения выполняются в течение интервалов времени, когда измеряемые отрезки ожидаются остающимися инвариантными; это есть указание на то, что должно существовать времяподобное поле вектора Киллинга. Физические теории без изометрий или даже без метрик могут быть определены, но понятия условий наблюдения и измерения должны быть пересмотрены. (Ньютоновская теория основана на аффинной геометрии, но с метрикой в пространственных сечениях).

Элементарные системы, насколько известно, в согласии с физикой определяются группой изометрий. По крайней мере в первом приближении теории элементарных систем в ОТО кажется резонным, что элементарные системы должны быть определены некоторой групповой структурой, связанной с изометриями так же, как в последних двух теориях, анализируемых в предыдущем разделе. Заметим, что мы не ограничиваем определение элементарных систем пространствами-временами с изометриями, но только констатируем, что они в большем согласии с физикой сегодняшнего дня, когда ограничены пространствами-временами с изометриями. Третье замечание, которое должно быть сделано, это то, что элементарные системы — модели де Ситтера — определены локально в том смысле, что они связаны с соседними произвольными точками пространства-времени.

После этих замечаний мы заключаем, что для получения расширения модели де Ситтера на ОТО мы нуждаемся в групповой структуре со следующими свойствами:

- (а) это есть субгруппа r а з н о р о д н о й p л а —
н и р у е м о й группы ОТО, определённая независимо от предварительного выбора особого пространства-времени;
- б) ограничение этой группы в определённом пространстве-времени ОТО локально и должно иметь результатом полную группу изометрий пространства-времени, если пространство-время разрешает изометрии, и полностью б е з —
в р е д н о в противоположном случае (это имеет место, если пространство-время, не разрешающее изометрии, имеет ограничение группы в этом пространстве-времени, имеющее результатом только идентичные преобразования;
- (в) в плоском пределе группа должна сводиться к группе Пуанкаре.

4. Группа $L(p, r, s)$

Мы покажем, что для каждого минимального изометрического класса вложения пространства-времени ОТО однородная расслоенная группа пучка вложения удовлетворяет требуемым условиям для расширения теории де Ситтера элементарных систем. Если через R_4 обозначить какое-либо пространство-время ОТО, минимальный изометрический пучок вложения $E(R_4)$ есть сумма B и т н и тангенциального пучка и минимального нормального пучка, размерность которого даётся уравнениями Гаусса Кадаззи R_4 . Типичный слой (расслоенное прост-

ранство) есть псевдоэвклидово пространство с размерностью $p > 4$ и метрической сигнатурой $\tau + 3 \dots R_4$ есть базовое пространство, и каждый слой локально определяется по R_4 .

Минимальное условие не только определяет наименьшее вложенное пространство, но даёт уникальность вложения, оставляя пространственно-временную метрику неизменной. Использование формализма вложения выступает здесь как и в случае де Ситтера не результатом физического наложения, но как удобное математическое средство, используемое, когда речь идёт о представлениях группы. Важно заметить, что пучок (расслоенное пространство) вложения, не есть свойство единственного пространства-времени, но свойство класса пространств-времён, так что $M(p, \tau, 3)$ есть то же самое для всего пространства времени этого класса. В ОТО имеется 22 различных минимальных изометрических пучков (расслоенных пространств) вложения.

В каждом расслоенном пространстве $M(p, \tau, 3)$ мы можем использовать Декартовы координаты, обозначенные через X^{μ} (все греческие индексы изменяются от 1 до p) и Гауссовы координаты, основанные на пространстве-времени гиперповерхности, обозначенные через x^{α} (Гауссовы координаты могут быть разделены на координаты в пространстве-времени, обозначенные X^i (нижний латинский индекс изменяется от 1 до 4), и координаты, ортогональные к пространству-времени, обозначенные через X^A (большой жирный латинский индекс изменяется от 5 до p)).

В Гауссовой системе пространственно-временная гиперпо-

верхность, вложенная в $M(p, r, s)$, определяется уравнением $X^A = 0$.

Декартовы компоненты метрического тензора $M(p, r, s)$ обозначены через $\eta_{\mu\nu}$, и их Гауссовы компоненты есть $g_{\alpha\beta}$. Если $f(x_\alpha)$ есть функция, определённая в $M(p, r, s)$, её пространственно-временная проекция есть:

$$f(x_\alpha) = \lim_{x^\alpha \rightarrow 0} f(x^\alpha)$$

Вложение получается, когда функция $X^\mu = X^\mu(x^\alpha)$ и её матричный Якобиан с элементами $X^\mu_{,\alpha}$ заданы. Положим:

$$x'^\mu = x^\mu + u^\mu, \quad u^\mu = \epsilon^\mu_{\nu} x^\nu; \quad u^{(\mu, \nu)} = 0 \quad (4.1)$$

есть бесконечно малые преобразования однородной расслоённой группы $L(p, r, s)$, относящейся к $M(p, r, s)$. В Гауссовых координатах мы имеем:

$$x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha \quad (4.2)$$

где $\xi^\alpha = x^\mu u^\alpha_{,\mu}$ —
суть компоненты обратного матричного якобиана $x^\alpha_{,\mu} X^\mu_{,\beta}$
 $= \delta^\alpha_\beta$

Последнее из уравнений (4.1) соответствует

$$\xi^{(\alpha, \beta)} = 0 \quad (4.3)$$

Точка с запятой обозначает ковариантную производную, а круглые скобки на индексах обозначают комплексную симметризацию.

Для того, чтобы получить уравнения Киллинга в R_4 проекцией (4.3) на пространство-время, мы потребуем дополнительных условий¹⁰⁾:

$$\xi^A \Big|_{R_4} = 0 \quad (4.4)$$

Мы можем записать:

$$\xi^A = x^A_\mu U^\mu = x^A_\mu \epsilon^{\mu\nu} X_\nu = X^\nu_\beta C^{A\beta} X_\nu,$$

где мы использовали факт, что

$$X^A_\mu X^\mu_\alpha = \delta^A_\alpha; \quad \epsilon^{\alpha\beta} = x^\alpha_\mu x^\beta_\nu \epsilon^{\mu\nu}$$

Поскольку $x^\nu_\beta X_\nu = \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu)_{,\beta}$

мы имеем $\xi = \frac{1}{2} (X^\nu X_\nu)_{,\beta} \epsilon^{A\beta}$

Тогда (4.4) эквивалентно следующему равенству:

$$\frac{1}{2} (X^\nu X_\nu)_{,\beta} C^{A\beta} \Big|_{R_4} = 0. \quad (4.4'')$$

При этих условиях проекцией на R_4 мы получаем векторные поля в $M(p, r, s)$, которые определяются системой уравнений:

$$\xi^{(i;j)} \Big|_{R_4} = 0; \quad \xi^{(i;A)} \Big|_{R_4} = 0; \quad \xi^{(A;B)} \Big|_{R_4} = 0. \quad (4.5)$$

Первые уравнения дают дискрипторы однородной части группы изометрий пространства-времени. Для понимания значения второй системы уравнений мы должны рассмотреть алгебру Ли

$L(p, r, s)$. Операторы этой алгебры в Декартовой системе координат удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$[L_{\mu\nu} L_{\rho\sigma}] = (\eta_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} L_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma} L_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} L_{\mu\sigma}) \quad (4.6)$$

Гауссовы компоненты этих операторов есть:

$$L_{\alpha\beta} = X_{\alpha}^{\mu} X_{\beta}^{\nu} L_{\mu\nu}$$

и

$$[L_{\alpha\beta} L_{\gamma\delta}] = X_{\alpha}^{\mu} X_{\beta}^{\nu} X_{\gamma}^{\rho} X_{\delta}^{\sigma} [L_{\mu\nu} L_{\rho\sigma}]$$

Тогда

$$[L_{ij} L_{ke}] = (g_{ik} L_{ie} + g_{ie} L_{ik} - g_{ie} L_{ik} - g_{jk} L_{ie})$$

$$[L_{ij} L_{kA}] = (g_{ik} L_{jA} + g_{iA} L_{ik} - g_{iA} L_{jk} - g_{jk} L_{iA})$$

$$[L_{ij} L_{AB}] = (g_{iA} L_{jB} + g_{jB} L_{iA} - g_{iB} L_{jA} - g_{iA} L_{jB})$$

$$[L_{iA} L_{jB}] = (g_{ij} L_{AB} + g_{AB} L_{ij} - g_{iB} L_{Aj} - g_{Aj} L_{iB})$$

$$[L_{iA} L_{BC}] = (g_{iB} L_{AC} + g_{AC} L_{iB} - g_{iC} L_{AB} - g_{AB} L_{iC})$$

$$[L_{AB} L_{CD}] = (g_{AC} L_{BD} + g_{BD} L_{AC} - g_{AD} L_{BC} - g_{BC} L_{AD})$$

Теперь определим оператор перемещения:

$$\mathcal{P}_i = \alpha^A L_{iA}$$

где α^A есть некоторые удобно выбранные пространственно-временные функции такие, что они обращаются в ноль при переходе от пространственного рассмотрения к плоскостному (плоскостной предел). В терминах $\mathcal{P}_i$, вышеупомянутые коммутаторы есть:

$$[L_{ke}] = (g_{ik} L_{je} - g_{je} L_{ik} - g_{ie} L_{jk} - g_{jk} L_{ie})$$

$$[\pi_k] = (g_{ik} \pi_j - g_{jk} \pi_i) + \omega^A (g_{jA} L_{ik} - g_{iA} L_{jk})$$

$$\omega^B [L_{ij} L_{AB}] = \omega^A (g_{iA} \pi_j - g_{jA} \pi_i) + \omega^B (g_{jB} \pi_i - g_{iB} \pi_j) = 0$$

$$\pi_j = (g_{AB} \omega^A \omega^B L_{ij} - g_{iB} \omega^B \pi_j - g_{Aj} \omega^A \pi_i) = 0$$

$$[L_{BC}] = \omega^A (g_{iB} L_{AC} + g_{AC} L_{iB} - g_{iC} L_{AB} - g_{AB} L_{iC})$$

$$[L_{CD}] = (g_{AC} L_{BD} + g_{BD} L_{AC} - g_{AD} L_{BC} - g_{BC} L_{AD})$$

применяя эти коммутаторы на R_4 и беря плоскостной предел, получим группу сжатия (свёртывания):

$$[L_{ij} \pi_k] \Big|_{R_4 \text{ плоскостной}} = (g_{ik} \pi_j - g_{jk} \pi_i) \Big|_{R_4}$$

$$[\pi_i \pi_j] \Big|_{R_4 \text{ плоскостной}} = 0$$

$$[\pi_i L_{BC}] \Big|_{R_4 \text{ плоскостной}} = 0,$$

где мы использовали $g_{iA} \Big|_{R_4} = 0.$

Заметим, что в плоскостном пределе π_k ведёт себя подобно оператору смещения группы Пуанкаре. Следовательно, π_k есть операторы смещения в R_4 . Они даются вторым уравнением

(4.5), а совместно с первым уравнение дают вектора Киллинга R_4 . В общем мы будем иметь дело с $\angle_{\mathcal{A}}$ в групповых представлениях, так что мы не нуждаемся в определении функций χ^A . Третье уравнение (4.5) соответствует степени свободы в выборе полного множества Гауссовых координат. Эта свобода координат исключается, если мы определим для всех ортогональных координат x^A , совпадающими с некоторыми Декартовыми координатами. Наконец, если уравнения Киллинга в R_4 не имеют решения, отличного от тривиального, мы имеем:

$$\sum \left|_{R_4} \equiv x_\mu' u^\mu \right|_{R_4} = 0$$

Совместно с (4.4) это уравнение даёт:

$$\sum^\alpha \left|_{R_4} = \epsilon^{\alpha\beta} \chi_\beta^\mu \chi_\mu \right|_{R_4} = 0$$

, так что в этом случае проекция $\angle(p, r, s)$ на R_4 даёт только идентичные перемещения.

Поэтому для данного класса пространств-времен класс-группа $\angle(p, r, s)$ удовлетворяет условиям для обобщения модели де Ситтера. В частности, это приложимо к случаю плоского пространства времени, дающего группу Лоренца $\angle(4, 3, 1)$ (в этом специальном случае перемещения должны быть добавлены отдельно).

Ещё одним примером является группа де Ситтера $\angle(5, 4, 1)$. В этом случае (как в каком-либо пространстве-времени постоянной кривизны) важно отметить, что условия (4.4) тривиально удовлетворяются, так что $(5, 4, 1)$ идентично с

$L(5, 4, 1)$ де Ситтера. Это не общий случай, когда отдельное пространство-время, вложенное в $M(p, r, s)$, имеет отдельные (особые) решения для (4.4), и, следовательно, особые группы $L(p, r, s)|_{R_4}$. Тогда предполагая, что изометрические локальные элементарные системы в ОТО определяются унитарными представлениями различных групп $L(p, r, s)$, элементарные системы в пространстве-времени 4 определены унитарными представлениями группы

$L(p, r, s)|_{R_4}$, определённой по (4.4) и (4.5).

Поскольку для $L(p, r, s)$ мы не имеем предварительно заданного пространства-времени, мы рассматриваем элементарные системы, определённые этой группой, как "абстрактные объекты" в том смысле, что они могут только тогда достигнуть пространственно-временного значения, когда ограничены в пространстве-времени.

5. Изоспиноры

Элементарные системы описываются полями, которые определяются в пространстве унитарными неприводимыми представлениями выбранных групп симметрий. Выбирая в качестве группы $L(p, r, s)$, можно получить поля из спинорного представления алгебры Клиффорда, определённой по $M(p, r, s)$. Если $p = 2v$ или $p = 2v + 1$, эти спиноры имеют $2v$ компонент (в определённых случаях может рассматриваться половина числа компонент).

Эти спиноры трансформируются согласно представлениям согласно представлениям группы автоморфизма алгебры Клиффорда. Обозначая генераторы этой алгебры через e_j , полу-

чаем, что подмножество алгебры, генерирующееся в соответствии с:

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} e_{\mu} e_{\nu} \quad (5.1)$$

является изоморфным в алгебре Ли $L(p, r, s)$. Выбирая одно из многих возможных представлений Вейля алгебры Клиффорда и обозначая через $M_{\mu\nu}$ матричные представления $L_{\mu\nu}$, бесконечно малые преобразования спинора группы S даются выражением:

$$S = I + \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu} M_{\mu\nu} \quad (5.2)$$

С условиями (4.4) группа $L(p, r, s)|_{R_4}$ даёт изометрии пространства-времени R_4 . При определённых условиях матрицы (5.2) образуют спинорное представление этой группы изометрий, которая обозначается $S|_{R_4}$ и называется изоспинорная группа R_4 . Спиноры, преобразующиеся в согласии с $S|_{R_4}$, называются изоспинорами¹⁰. Поскольку S есть представление $L(p, r, s)$, элементарные системы, полученные с помощью унитарных S , описываются спинорными полями соответствующего пространства. Одновременно представления $S|_{R_4}$, которые могут быть получены из представлений S , дают пространство-время элементарных систем, которые описываются изоспинорами определённого пространства.

6. Полевые уравнения

Поскольку спиноры, конструируемые в последнем разделе, определяются слоями расслоенных пространств вложения, они определены только локально. Далее, они должны удовлетворять некоторым полевым уравнениям, которые определяются в этих слоях, но допускают физические рассмотрения, определенные в

пространстве-времени. Мы имеем ситуацию, в которой множество полевых переменных определяется в пространствах $M(p, r, s)$, но только те, которые имеют "пространственно-временное определение", могут рассматриваться как имеющие физическое значение. Положим $\psi^{(\alpha)}(x^\alpha)$ есть какая-либо переменная поля, определённая в Гауссовой системе, где (α) символизирует какое-либо сочетание индексов. В частности, $\psi^{(\alpha)}$ может быть компонентами спиноров, построенных в $M(p, r, s)$.

Функция, определённая в $M(p, r, s)$, называется определённой в пространстве-времени, если она зависит только от пространственно-временных координат. Если функция f определена ^{в Гауссовых координатах}, тогда ясно, что $f(x^i)$ определена в пространстве-времени. С другой стороны, если f определена в Декартовой системе, то $f(x^{\mu})$ определена в пространстве-времени только в том случае, если координатам x^{μ} соответствует точка пространства-времени.

В общем, проекция $f(x^\alpha)|_{R_4}$ функции f , определённой в $M(p, r, s)$, на пространство-время определена в пространстве-времени. Искомые полевые уравнения определяются в $M(p, r, s)$, но должны производить пространство-время, определяющее уравнения поля.

Зададим множество пространственно-временно определенных полевых переменных; здесь необходимо рассмотреть два случая в зависимости от того, является ли функция Лагранжа определённой в пространстве-времени или нет. В первом случае мы получаем уравнения поля, которые определены в пространстве-времени, независимо от выбора данного пространства-вре-

мени. Во втором случае мы получаем уравнения поля, которые не обязательно определены в пространстве-времени, но которые могут быть спроектированы на пространство-время позднее.

Рассмотрим Лагранжиан, определённый в пространстве-времени:

$$L = L(\psi^{(\omega)}(x^i), \psi^{(\omega)}(x^i)_{,j}) \quad (6.1)$$

и интеграл действия $A = \int L d^p x$,

где $d^p x$ — есть элемент объёма с p измерениями, определённый в Гауссовой системе. Мы можем записать $d^p x = d^t x d^q x$, где $d^t x$ — есть часть элемента объёма, соответствующая подпространству, ортогональному к пространству времени. Пусть δA — вариация A такая, что $\delta \psi^{(\omega)}(x')$ обращается в нуль на соседних поверхностях двух-трёх измерений Σ_1 и Σ_2 в пространстве-времени:

$$\delta A = \int \left(\frac{\partial L}{\partial \psi^{(\omega)}} \delta \psi^{(\omega)} + \frac{\partial L}{\partial \psi^{(\omega)}_{,i}} \delta \psi^{(\omega)}_{,i} \right) d^p x$$

Введём определения: $\pi^i_{(\omega)} = \frac{\partial L}{\partial \psi^{(\omega)}_{,i}}$

$$\delta A = \int \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \psi^{(\omega)}} - \pi^i_{(\omega),i} \right) \delta \psi^{(\omega)} + (\pi^i_{(\omega)} \delta \psi^{(\omega)}_{,i}) \right] d^p x$$

Используя теорему Гаусса во втором члене интеграла и предполагая $\partial A = 0$, получим:

$$\int \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \psi^{(\omega)}} - \pi^i_{(\omega),i} \right) \delta \psi^{(\omega)} d^p x + \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} \pi^i_{(\omega)} \delta \psi^{(\omega)} d\Sigma_i \right] d^t x = 0$$

Поскольку $\delta\psi^{(\alpha)}$ исчезает на Σ_1 и Σ_2 , последний интеграл равен нулю.

Первый интеграл даёт уравнения поля, определённые в пространстве-времени:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi^{(\alpha)}} - \pi^{(\alpha)}_i = 0 \quad (6.2)$$

В случае $p = 6$ эти уравнения совпадают с некоторыми уравнениями, полученными Франсдалом¹³⁾.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда Лагранжион не определён в пространстве-времени. Это может оказаться, например, тогда, когда полевые уравнения подвергаются операциям, которые нарушают пространственно-временной характер. Результат — тот же самый, что прежде, но полевые уравнения должны проектироваться на пространство-время:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi^{(\alpha)}_{R_4}} - \pi^{(\alpha)}_i = 0 \quad (6.3)$$

Рассмотрим следующий пример.

Лагранжион:

$$L = -\frac{1}{2} [\tilde{\psi} e^\alpha e^\beta (x_\alpha \psi_{;\beta} - x_\beta \psi_{;\alpha}) + \tilde{\psi} m \psi + \\ + \frac{1}{2} [(x_\alpha \tilde{\psi}_{;\beta} - x_\beta \tilde{\psi}_{;\alpha}) e^\alpha e^\beta \psi - \tilde{\psi} m \psi] \quad (6.4)$$

где $e^\alpha = x^\alpha_\mu e^\mu$, e^μ — матрицы представления Вейля алгебры Клиффорда, определённые в $M(p, r, s)$, и ψ — спиноры спинорного представления той же самой алгебры; m — скалярная функция, определённая в пространстве-времени, такая, что она сводится к постоянной в плоскостном пределе. $\tilde{\psi} = \psi^\dagger \gamma$, где γ — матрица Эрминова,

пропорциональная произведению всех анти-Эрминовых генераторов алгебры¹⁴.

Оператор $\mathcal{I}_{\alpha\beta} = x_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} - x_\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, который является в вышеупомянутом Лагранжионе, когда применение последнего к полевым переменным, определённым в пространстве-времени, не даёт с необходимостью переменные, определённые в пространстве-времени.

Для примера $\mathcal{I}_{AB} \psi(x) = 0$, но $\mathcal{I}_{iA} \psi(x^i) = x_A (\partial \psi / \partial x^i)$. Следовательно, Лагранжисн (6.4) не определён в пространстве-времени. Если ψ рассматривать как спинорную функцию, определённую в пространстве-времени, уравнение (6.3) даёт:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} (\gamma_{ij} e^i e^j - m) \Big|_{R_4} &= 0 \\ (e^i e^j \gamma_{ij} + m) \psi \Big|_{R_4} &= 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Спинорное поле, которое удовлетворяет этим уравнениям, преобразуется согласно $S \Big|_{R_4}$ и в силу этого есть изоспинорное поле. Уравнение (6.5) обобщает уравнения, предложенные Дираком для пространства-времени де Ситтера.¹⁵

В плоскостном пределе изоспинорное поле ψ совпадает с Дираковскими спинорами, и уравнение (6.5) даёт уравнение для частицы со спином $\frac{1}{2}$. Этот факт означает, что элементарные системы, определённые $L(p, r, s)$, которые удовлетворяют уравнениям (6.5) в R_4 , могут быть отнесены к элементарным системам со спином $1/2$. Тем не менее это есть только предположение, поскольку в ОТО значение слова "спин" может отличаться от обычного представления в специальной те-

ории относительности, как это ясно из анализа пространства-времени де Ситтера.⁹

7. Унитарные представления $L(p, r, s)$

Для получения элементарных систем в схеме, предложенной в предыдущих разделах, мы вынуждены вычислять неприводимые представления каждой группы $L(p, r, s)$ или, что то же самое, представления соответствующей спинорной группы s и классифицировать их.

Поскольку выбирается особое пространство-время R_4 и условия (4.4) применяются к представлениям $L(p, r, s)$, мы получаем $L(p, r, s)|_{R_4}$ или $s|_{R_4}$ и элементарные системы R_4 . Поскольку эти представления влекут за собой длительные расчёты для каждой из 22 групп $L(p, r, s)$, здесь дано только описание метода представлений. Специфические расчёты для некоторых интересных случаев будут даны где-нибудь в другом месте. Мы можем начать с того, что выпишем ниже все коммутаторы алгебры Ли $L(p, r, s)$, заданных (4.6), где $L_{\mu\nu}$ даются (5.1). Теперь мы рассмотрим приведение $L(p, r, s)$ к его максимальным ^{к тн рн} компонентным группам $O(n)$ и их разложения по множителям $O(3)$, обозначаемым $O_i(3)$. Для каждой из этих групп множителей $O_i(3)$ мы определим хорошо известные унитарные представления:

$$\langle m_i M_z^{(i)} m_i \rangle = m_i$$

$$\langle \ell_i m_i M_+^{(i)} e_i m_{i+1} \rangle = [(\ell_i + m_i + 1)(\ell_i - m_i)]^{1/2}$$

$$\langle \ell_i m_i M_-^{(i)} \ell_i m_{i-1} \rangle = [(\ell_i - m_i + 1)(\ell_i - m_i)]^{1/2}$$

где

$$l_i = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$$

$$m_i = l_i, l_i - 1, \dots, -l_i + 1, -l_i$$

$$i = 1, 2, \dots, K$$

, где K есть число $O(3)$ субгрупп в $O(n)$.

$$M_+^{(i)}, M_-^{(i)}, M_z^{(i)}$$

есть операторы алгебры Ли $O_i(3)$, записанные в обычных базисах Картана.

Если вышеупомянутые матричные элементы определены, мы можем продолжить определение матричных элементов из оставшихся операторов алгебры Ли $L_{\mu\nu}$, вычисление матричных элементов коммутаторов

$$[L_{\mu\nu}, M_+^{(i)}], [L_{\mu\nu}, M_-^{(i)}], [L_{\mu\nu}, M_z^{(i)}]$$

в терминах произвольных матричных функций l_i . Некоторые рекуррентные соотношения этих функций возникают из матричных элементов коммутаторов между $L_{\mu\nu}$ и не проявляются в

$$M_+^{(i)}, M_-^{(i)} \text{ и } M_z^{(i)}$$

Заключительный шаг состоит в определении операторов Казимира и их собственных величин.

Когда группы $L(p, r, s)$ имеют все полупростые числа операторов Казимира, это эквивалентно рангу группы.

Результирующая структура элементарных систем обозначается через ℓ_i, m_i и собственные величины операторов Казимира. Эти квантовые числа в общем не имеют того же самого значения, что и в случае гладкого пространства-времени, и для различных $L(p, r, s)$ имеют место различные изменения квантовых чисел.

8. Частицы и внутренние симметрии

Для того, чтобы проверить, имеют ли элементарные системы, определяемые группой $L(p, r, s)$ или другой группой, что-либо общее с физикой элементарных частиц, необходимо прежде всего сравнить множество квантовых чисел, полученных в результате вычислений, с данными наблюдений. Мы можем выбрать или вычисление всех представлений 22 групп, что является очень трудоёмкой работой, или выбрать определённое пространство-время R_4 в согласии с его физической реальностью и найти соответствующий класс-группу $L(p, r, s)$. Тогда, для примера, если мы решим, что пространство-время де Ситтера есть физически интересная модель, то группа, подлежащая рассмотрению, есть $L(5, 4, 1)$. В этом частном примере расчёты групповых представлений проще, чем в других случаях. Спинорные поля, построенные по $M(5, 4, 1)$, авто-

матически являются изометрически ковариантными, и уравнения поля автоматически определяются в пространстве-времени.

Следовательно, элементарные системы, построенные с помощью $L(5, 4, 1)$, могут иметь физическое значение. В общей ситуации это упрощение не имеет места.

Поскольку элементарные системы, построенные с помощью $L(p, r, s)$, рассматриваются как абстрактные объекты, можно потребовать, чтобы физическое пространство элементарных частиц было бы избранным пространством-временем. Тогда, чтобы получить элементарные частицы из элементарных систем, мы были бы вынуждены проецировать элементарные системы на пространство-время. Только тогда мы могли бы иметь дело с проблемой интерпретации квантовых чисел. С точки зрения подгонки теории к некоторым современным теориям элементарных частиц некоторые из пространств-времен ОТО могут оказаться более интересными, чем другие. Тогда, например, если мы захотим иметь дело с моделью $SU(3)$, группа де Ситтера не так интересна как $L(8, 6, 2)$, которая содержит алгебру Ли $O(6) \sim SU(4) \supset SU(3)$; $L(8, 6, 2)$ есть наименьшая группа в равноразмерном пространстве вложения с постоянным $O(6)$. Поскольку 8 есть наибольшее число размерностей, необходимых для пространств-времен вложения с поверхностью, ортогональной векторному полю Киллинга¹⁶, изучение представлений $L(8, 6, 2)$ кажется более интересным, чем рассматриваемые исследования подгруппы $SU(3)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. T.D. Newton and E.P. Wigner, *Rev. Mod. Phys.* **T.21**, 400 (1949)
2. E.T. Newman, *Nature* **206**, 811 (1965)
3. Y. Neeman and Y. Rosen. *Ann. Phys.* **31** 391 (1965)
4. A. Salam, C.J. Isham and Stedthee "f Dominance of Gravity", Preprint International Center Theoretical Physics, Trieste (1970).
5. R.K. Sachs, *Phys. Rev.* **1**, **128**, 2851 (1962)
6. P.J. McCarthy, Thesis, King's College, London, 1971.
7. L.H. Thomas, *Ann. Math.*, **42**, 113 (1941)
8. T.D. Newton, *Ann. Math.*, **57**, 730 (1950)
9. F. Gurev, in *Relativity Groups & Topology*, edited by de Witt and de Witt (Gordon & Breach, New-York, 1963)
10. M.D. Maia, *J. Math. Phys.* **T.14**, 882 (1973)
11. E. Inonu and E.P. Wigner, *Proc. Acad. Sciens* **39**, 513 (1953)
12. Brauer and H. Weyl. *Am. J. Math.*, **57**, 425 (1935)
13. C. Fronsdal, *Nuove Cimento* **T.13**, 2510 (1959)
14. M.D. Maia, "Spinor Geometry in Pseudo Euclidean Spaces, Preprint, Universidade de Brasilia, Departamento de Matematica, 1973
15. P.A.M. Dirac, *Ann. Math.*, **T.36**, 657 (1935)
16. P. Szekeres, *Nuove Cimento*, **T.43**, 1062 (1966)