

9. (к § 10) Комплексные преобразования координат и метрика Шварцшильда-Керра. *E.T. Newman "Complex coordinate transformation and the Schwarzschild-Kerr metrics."*

J. Math. Phys. 14, № 6, 1973.

(Кафедра физики Питтсбургского университета. Пенсильвания).

А Н Н О Т А Ц И Я

Используя факт, что геометрии Шварцшильда и Керра внутренне определяются связанным с ними пространством Минковского, мы показываем, что эти пространства Минковского (когда параметры Керра варьируются) могут быть рассмотрены как "реальные слои" комплексифицированного пространства Минковского.

Комплексный тензор Бейля каждого члена семейства может быть тогда рассмотрен, как простое комплексное поле в комплексном пространстве Минковского.

Далее, вырожденные нулевые основные векторы, связанные с каждой геометрией, могут быть рассмотрены как проекции в "реальные^{*} слои" комплексного поля нулевого вектора в комплексном пространстве Минковского. Эти результаты могут быть рассматриваемы как пояснение ранней работы по получению метрики Керра из метрики Шварцшильда комплексной трансформацией координат.

* Примечание переводчика

В ряде случаев в статье употребляется термин "реальный", хотя в отечественной литературе обычно используется термин "вещественный".

ВВЕДЕНИЕ

Несколько лет тому назад мы опубликовали две статьи^{1,2}, в которых метрика Керра и "заряженная" метрика Керра были "выведены" из Шварцшильдовской и заряженной Шварцшильдовской (Рейснера-Нордстрема) метрик комплексным преобразованием координат. Слово "вывод" было первоначально взято в кавычки, так как не было простого и ясного основания для серии операций, подготавливающих метрику Шварцшильда для получения новых решений уравнений Эйнштейна. До последнего времени за исключением по существу тривиального замечания, что полевые уравнения удовлетворяют этим операциям, имелся малый прогресс в геометрической интерпретации комплексных трансформаций. Адлер и другие^[6] просто показали, что метрики Керра и Шварцшильда могут быть получены из общих производящих функций простым комплексным смещением начала.

Автор настоящей статьи недавно показал, что уравнения Максвелла и линеаризованные уравнения Эйнштейна (для тензора Вейля) могут быть комплексифицированы и рассмотрены как полевые уравнения в комплексном пространстве Минковского. С этой точки зрения тензор Вейля линеаризованной метрики Керра (заряженной метрики Керра) и линеаризованной метрики Шварцшильда (заряженной метрики Шварцшильда) может рассматриваться как то же самое поле, но отнесённое к различным реальным слоям комплексного пространства Минковского. (Каждая величина параметра Керра производит различные слои;

$\alpha = 0$ производит слой Шварцшильда).

Цель настоящей статьи показать, что эти результаты для лианезированных метрик Шварцшильда — Керра могут быть распространены на их точную форму.

Фундаментальное значение в анализе имеет факт, что для каждого члена семейства Керра имеется ковариантно определённое плоское пространство, определяемое из:

$$ds^2 = ds_{flat}^2 + \lambda (\ell_\mu^* dx^\mu)^2$$

где λ — есть скалярная функция и ℓ_μ^* — есть (вырожденный) основной нулевой вектор. Мы хотим показать, что эти плоские пространства могут быть рассмотрены, как семейство всех плоских пространств, вставленных в комплексное пространство Минковского.

Тензор Вейля или более точно "комплексный" самодуальный тензор Вейля $-\frac{I}{2} (C^{\alpha\beta\gamma\delta} + i C^{\alpha\beta\gamma\delta})$ может быть тогда рассмотрен, как функция в комплексном пространстве Минковского. В каких-либо реальных слоях реальный тензор Вейля может быть реконструирован. Более того, основные нулевые векторы комплексного тензора Вейля вырождены в смысле произвольности в нулевой комплексной два — плоскости и в общем комплексны (они не вырождены в этом смысле для реального тензора Вейля).

Вырожденность, тем не менее, может быть перемещена на каждый реальный слой требованием реального (касательного к слою) основного нулевого вектора. Это производит вектор $\ell_\mu^* \in (I, I)$. Наконец, скалярная функция λ может быть записана, как реальная часть функции в комплексном пространстве Минковского.

В разделе 2 мы обсуждаем некоторые свойства комплексного пространства Минковского и определяем "реальные слои". Потом вводятся комплексные нулевые полярные координаты (реальные координатные величины производят реальный слой), представляющие основное комплексное координатное преобразование. (сходно с [I]). Реальные новые координатные величины производят координатную систему типа Керра в новом слое. В разделе 3 описаны комплексные тетрадные преобразования и их отношение к основным (комплексным) нуль-векторам комплексного тензора Вейля.

Показано, что комплексный тензор Вейля каждого члена семейства Керра — Шварцшильда может рассматриваться как однозначная комплексная функция в комплексном пространстве Минковского.

Мы хотим подчеркнуть, что не используем здесь уравнений Эйнштейна для нахождения отношения между различными членами семейства Керра — Шварцшильда. Мы просто берём известные метрики и показываем, что существует определённое единство между ними при рассмотрении в комплексном пространстве Минковского.

2. КОМПЛЕКСНОЕ ПРОСТРАНСТВО МИНКОВСКОГО

Мы рассматриваем комплексификацию пространства Минковского, беря четырёхмерное комплексное многообразие⁸⁾ (восемь реальных измерений), связанное простой комплексной таблицей, координаты маркируются как: $z^\mu = x^\mu + iy^\mu$ (x^μ и y^μ — реальны), определяемые комплексной метрикой:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dz^\mu dz^\nu \quad (2.1)$$

Рассматриваемые преобразования — голоморфные преобразования координат. Группа, которая сохраняет форму линейного элемента, есть группа Пуанкаре⁹⁾ с ^{комплексными}десятью параметрами:

$$z'^\mu = a^\mu_\nu z^\nu + b^\mu \quad (2.2)$$

где b^μ — есть постоянный комплексный вектор, a^μ_ν — постоянная комплексная метрика. Эти величины удовлетворяют соотношению:

$$a^\mu_\alpha \cdot a^\nu_\beta \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \quad (2.3)$$

"Реальным слоем" этого пространства мы обозначаем четырёхразмерное субпространство, такое, что порождающая его метрика в соответствии с (2.1) реальна. Из (2.2) с очевидностью следует, что существуют по крайней мере десятипараметрическое реальное семейство таких слоёв, происходящее от мнимых преобразований Пуанкаре: четыре из мнимых преобразований и шесть из мнимых однородных преобразований (нам не известно, существуют ли другие "реальные слои"). Предположительно, если они есть, то метрики, их производящие, не должны быть гладкими. Хотя в оставшейся части статьи мы будем сохранять наши собственные "реальные слои", полученные с помощью мнимых преобразований (параллельные слои), мы должны предположить, что могут быть получены новые решения уравнений Эйнштейна путём приложения идей этой статьи к комплексным сдвигам.

Решения, предположительно, должны быть сходны с решением уравнений Максвелла, полученные из решения Кулона комплексным сдвигом.^[7]

Мы хотим теперь рассмотреть общий параллельный слой, который может быть рассмотрен (без потери общности), возникающий при передвижении реального пространства Минковского во мнимом направлении z^3 , то есть определённом как:

$$z' = x'^{\mu} - i a \delta_3^{\mu}, \quad x'^{\mu} - \text{вещественные.}$$

Введём комплексные нулевые полярные координаты:

$$z' = \frac{1}{\sqrt{2}} (2u + r, r \cos \theta, r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi), \quad (2.5)$$

где u, r, ϕ, θ - комплексные.

Линейный элемент (2.1) в этих координатах имеет вид:

$$ds^2 = 2du^2 + 2dudr - \frac{r^2}{2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.6)$$

Заметим, что реальные величины u, r, θ, ϕ определяются тем же самым реальным слоем, где $z' = x'^{\mu}$, x'^{μ} - вещественные.

Если теперь выполним комплексное преобразование:

$$u = u' + i a \cos \theta', \quad r = r' - 2i a \cos \theta',$$

$$\cos \theta = \frac{r' \cos \theta' - 2i a}{r' - 2i a \cos \theta'}, \quad \cos 2(\phi - \phi') = \frac{r'^2 - 4a^2}{r'^2 + 4a^2}$$

(2.7)

Из (2.6) получим:

$$\begin{aligned} ds^2 = & 2du'^2 + 2du'dr' - 2a \sin^2 \theta' dr' d\phi' - \\ & - \frac{1}{2} (r'^2 + 4a^2 \cos^2 \theta') (d\theta'^2 + \sin^2 \theta' d\phi'^2) - \\ & - 2a^2 \sin^4 \theta' d\phi'^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Если u', v', θ' и ϕ' ограничены реальными величинами, то может быть показано, что это эквивалентно выбору реального слоя (2.4). Тогда уравнение (2.8) есть реальная метрика Минковского в координатах Керра.^{1,2}

Можно видеть, что преобразование (2.7), в результате которого из (2.6) получается (2.8), даёт частичное объяснение алгоритма в работах I и 2, ведущего от метрики Шварцшильда к метрике Керра.

[Мы хотим подчеркнуть, что знание (2.8) и (2.6) даёт возможность вывести (2.7) решением системы уравнений в частных производных. Мы, тем не менее, нашли (2.7) ранее, используя теорию твисторов Пенроуза (10,11), в которой серия ^{относительно} простых алгебраических шагов даёт (2.7).

Но для целей этой статьи нет необходимости входить в эти вопросы.]

3. КОМПЛЕКСНЫЙ ТЕНЗОР ВЕЙЛЯ

Связанное с комплексной нулевой полярной координатной системой выражение (2.6) есть нулевая тетрадная система:

$$\begin{aligned} \ell^\mu &= \delta_1^\mu, \quad n^\mu = \delta_0^\mu - \delta_1^\mu, \quad m^\mu = \frac{1}{2} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_3^\mu \right) \\ \bar{m}^\mu &= \frac{1}{2} \left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\sin \theta} \delta_3^\mu \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где (0, 1, 2, 3) относятся к (u, v, θ, ϕ) . Только в реальном слое $(z^\mu = x^\mu)$ эта система должна рассматриваться, как нормальная, нулевая, тетрадная система с реальными ℓ и n , и m и $\bar{m}$ комплексно сопряжёнными друг другу.

Вторая комплексная нулевая тетрадная система вводится выражениями:

$$\begin{aligned} \ell^* &= \ell - Qm, \quad n^* = n + Qm, \quad m = Sm, \\ \bar{m}^* &= S^{-1}(\bar{m} + Q\ell - Qn - Q^2m) \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $Q = \frac{2ia \sin \theta'}{(r'^2 + 4a^2)^{\frac{1}{2}}}$ и $S = \frac{(r' - 2ia \cos \theta')}{(r'^2 + 4a^2)^{\frac{1}{2}}}$

Эта система имеет форму [когда выражается в системе координат (2.8)] :

$$\begin{aligned} \ell^* &= \delta_1''; \quad n^* = \delta_0'' - \delta_1'', \\ m^{*'} &= \frac{1}{r' + 2ia \cos \theta'} [ia \sin \theta' (\delta_0'' - 2\delta_1'') + \\ &+ \delta_2'' + \frac{i}{\sin \theta'} \delta_3''], \\ \bar{m}^{*'} &= \frac{1}{r' - 2ia \cos \theta'} [-ia \sin \theta' (\delta_0'' - 2\delta_1'') + \\ &+ \delta_2'' - \frac{i}{\sin \theta'} \delta_3'']. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В реальном слое (2.4) это есть "нормальная нулевая тетрадная система" $[1, 2]$ ℓ^* и n^* вещественные; m и m^* комплексно сопряжены друг другу; ℓ^* свободно сдвинуто и имеет комплексную дивергенцию $\rho \equiv \ell_{\mu;\nu}^* m^{*'} \bar{m}^{*'} =$

$$= \frac{-1}{r' - 2ia \cos \theta'}.$$

Начиная с тензора $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$, алгебраические симметрии которого есть те же, что и тензора Вайля, мы рассмотрим его окомплексификацию:

$$W_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (C_{\alpha\beta\gamma\delta} + i C_{\alpha\beta\gamma\delta}^*) \quad (3.4)$$

Где * обозначает двойственность (дуальность). $W_{\alpha\beta\gamma\delta}$ должен быть теперь рассмотрен как поле в комплексном пространстве Минковского. Его независимые и отличные от нуля компоненты следующие:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= -W_{\alpha\beta\gamma\delta} \ell^\alpha m^\beta \ell^\gamma m^\delta \\ \Psi_1 &= -W_{\alpha\beta\gamma\delta} \ell^\alpha n^\beta \ell^\gamma m^\delta \\ \Psi_2 &= -W_{\alpha\beta\gamma\delta} m^\alpha n^\beta \ell^\gamma m^\delta \\ \Psi_3 &= -W_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{m}^\alpha n^\beta \ell^\gamma m^\delta \\ \Psi_4 &= -W_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{m}^\alpha n^\beta \bar{m}^\gamma n^\delta \end{aligned} \quad (3.5)$$

(Заметим, что $W_{\alpha\beta\gamma\delta} \ell^\gamma m^\delta = W_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{m}^\gamma n^\delta = 0$).

Если мы зададим частичное поле, выраженное в комплексных нулевых полярных координатах с тетрадой (3.1), как:

$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0; \quad \Psi_2 = -2\sqrt{2} \frac{m}{r^3} \quad (3.5)$$

Легко видеть, что в "реальном слое" $z^{\mu} = x^{\mu}$; это соответствует Шварцшильдовскому тензору Вейля с выраженным основным нулевым вектором ℓ^{μ} .

[ℓ — есть нулевой вектор как пространства Шварцшильда, так и связанного с ним пространства Минковского. Это не имеет

место для λ . См. (I.I)] То же самое поле, но теперь выраженное в координатах (2.8) с использованием тетрады (3.3), имеет форму:

$$\Psi_3^* = 0, \quad \Psi_1^* = 0, \quad \Psi_2^* = \frac{-2\sqrt{2}m}{(\chi' - 2i\alpha \cos\theta')^3},$$

$$\Psi_3^* = \frac{-6\sqrt{2}S^{-1}Qm}{(\chi' - 2i\alpha \cos\theta')^3} = \frac{12\sqrt{2}i m \alpha \sin\theta'}{(\chi' - 2i\alpha \cos\theta')^4}$$

$$\Psi_4^* = \frac{-12\sqrt{2}S^{-2}Q^2m}{(\chi' - 2i\alpha \cos\theta')^3} = \frac{48\sqrt{2}m\alpha^2 \sin^2\theta'}{(\chi' - 2i\alpha \cos\theta')^5}.$$

Может быть показано, что это соответствует Керровской форме тензора Вейля.

В заключение мы упомянем, что λ в (I.I) может быть выбрана как реальная часть скалярной функции $4\sqrt{2} \frac{m}{\chi}$ в комплексном пространстве Минковского, тогда:

$$\lambda = 2\sqrt{2}m \left(\frac{1}{\chi} + \frac{1}{\bar{\chi}} \right) = \frac{4\sqrt{2}m\chi'}{\chi'^2 + 4\alpha^2 \cos^2\theta'}$$

ОБСУЖДЕНИЕ

Мы показали, что существует определённое единство в метриках класса Керра - Шварцшильда (возможно включающего в себя новые метрики, происходящие в результате комплексных сдвигов), когда они рассматриваются с точки зрения комплексного пространства Минковского.

Мы предполагаем, что если могут быть получены сходными путями другие новые метрики, то возможно может существовать сходное единство между другими членами класса Керра — Шварцшильда (уравнение I.1). Это даёт некоторое доказательство тому, что работа, описанная здесь, есть часть большой структуры. Последняя работа по асимптотически плоским пространствам указывает, что нулевая бесконечность обладает естественной комплексной структурой и что группа инвариантности (подходящим образом определённая) есть комплексная группа Пуанкаре. Действительно, в пределе $r \rightarrow \infty$ естественно появляются преобразования, сходные с уравнением (2.7).

ЛИТЕРАТУРА

Это исследование было поддержано *NSF Grant*
No, CP 27789

1. E.T. Newman and A.J. Janis. *J. Math. Phys.*
т.6, 914 (1965)
2. E.T. Newman et al., *J. Math. Phys.* 6,918 (1965)
3. R.P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.* т.11, 237 (1963)
4. R.P. Kerr, частные сообщения
5. J.J. Tallot. *Commun Math. Phys.* т.13, 45 (1969)
6. R.J. Adler et al., Preprint
7. E.T. Newman. *J. Math. Phys.* т.14, 102 (1973)
8. S. Kobayashi and Nomizu. *Foundations of Differential Geometry* (Interscience, New York, 1969); Vol. II.
9. P.F. Streater and A.S. Wightman
PCT Spin and Statistics and All That
(Benjamin, New York, 1964).

10. R. Penrose, *J. Math. Phys.* 8, 345 (1967)
11. Aronson B. et al. *J. Math. Phys.*, т.12
2462 (1971)
12. Неопубликованные результаты автора.

10. (к § 10) "Поля Лиенара-Вихерта и Общая теория относительности". *Newman E.T. "Lienard-Wiechert fields and general relativity"*
J. Math. Phys., 1974, т.15, № 1, стр.44-45.

АННОТАЦИЯ

Устанавливается аналогия между решениями уравнений Максвелла Лиенара-Вихерта и решениями уравнений Эйнштейна Робинсона-Траутмена, на основании чего устанавливается факт, что основное безвекторное поле тензора Максвелла или Вейля в каждом случае удовлетворяет следующим четырём условиям:

(1) поле есть геодезическое поле, (2) оно имеет отличную от нуля дивергенцию, (3) оно свободно от сдвига, (4) оно свободно от скручивания (ротора).

ВВЕДЕНИЕ

Цель этой заметки обратить внимание на существенную аналогию между решениями уравнений Максвелла Лиенара-Вихерта и классом решений уравнений Эйнштейна, известных как метрики Робинсона-Траутмена ($R.T$). Более точная аналогия существует с регулярным типом RT метрик, все другие метрики имеют неустранимые сингулярности. RT метрики могут быть геометрически охарактеризованы следующими свойствами одного из полей основного нулевого вектора ($0, n, \ell$) тензора Вейля:

(i) поле O, H, ϕ есть тангенциальное поле в конгруэнции нулевой геодезии;

(ii) поле имеет отличную от нуля дивергенцию;

(iii) сдвиг поля равен нулю;

(iv) скручивание (или ротор) поля равно нулю.

Эти условия необходимы и достаточны для вакуумной метрики, принадлежащей RT -метрике.

Мы хотим доказать, что необходимое и достаточное условие для того, чтобы поле Максвелла, регулярное на бесконечности (в гладком пространстве) было полем Лиенара-Вихерта, заключается в том, что одно из полей O, H, ϕ тензора Максвелла должно удовлетворять условиям (i) - (iv), и этим устанавливается аналогия.

Мы укажем (без доказательства), что эта аналогия имеет до некоторой степени значительное обобщение. Известно^[2], что уравнения Максвелла могут быть аналитически продолжены в комплексное пространство Минковского.

Реальное решение, соответствующее "частице - Лиенара-Вихтера", движущейся в комплексном пространстве Минковского, имеет поле O, H, ϕ , которое удовлетворяет только условиям (i) - (iii). Для особого случая из данных (см. работу 2), когда "частица" ограничена в реальном пространстве Минковского, (iv) автоматически удовлетворяются.

Аналогично этому в общей теории относительности имеется класс подходящих регулярных решений удовлетворяющих (i) - (iii) уравнений Эйнштейна, а именно регулярно закрученные метрики типа [3,4]. Эти решения, естественно, могут рассматриваться как заданные в реальных субпространствах комплексного многообразия, в ко-

торых источник (частица, подобная частице Лиенара-Вихерта) движется в комплексной области

II. ПОЛЕ ЛИЕНАРА-ВИХЕРТА

Простейший путь проверки нашего утверждения, касающегося поля $O. H. \mathcal{E}$, решения Лиенара-Вихерта, использование спин-коэффициентной формы уравнений Максвелла с координатами и тетрадной системой, связанной с полем $O. H. \mathcal{E}$. Известно, что наиболее общее поле нулевого вектора, удовлетворяющее условиям $(\dot{c}) - (\dot{c}v)$, получено подстановкой времяподобной мировой линии (действительно, пространственно-подобные или нулевые мировые линии могут быть использованы, но они связаны с неустранимыми сингулярностями) и построением светового конуса на каждой точке мировой линии. Касательные векторы к генераторам всех конусов образуют искомое поле.

Нулевая координатная система, связанная с семейством конусов, может быть введена с помощью преобразования:⁶

$$x^\mu = \xi^\mu(\phi) + \tau \ell^\mu / v(\phi, \xi, \bar{\xi}), \quad \text{где} \quad x^\mu = \xi^\mu(\phi) - \text{настоящая параметрическая форма мировой линии} \quad (\phi - \text{есть умноженное на } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ собственное время}), \quad (I)$$

$$\ell^\mu = \frac{1}{2\sqrt{2}P_0} \left(1 + \xi\bar{\xi}, \xi + \bar{\xi}, \frac{\xi - \bar{\xi}}{i}, -1 + \xi\bar{\xi} \right),$$

$$2P_0 = 1 + \xi\bar{\xi}, \quad \xi \text{ и } \bar{\xi} - \text{есть комплексные стереографические координаты на сфере и } v(\phi, \xi, \bar{\xi}) = \ell^\mu \xi_\mu(\phi), \quad \xi_\mu \xi^\mu = 2.$$

Наше векторное поле в новой координатной системе имеет формулу:

$$\ell_\mu = \delta_\mu^\phi, \quad \ell'^\mu = \delta_\nu^\mu$$

и получается метрика Минковского

$$ds^2 = 2 \left(1 - \frac{\dot{v}}{v} r \right) d\phi^2 + 2 dr d\phi - \frac{v^2}{2} \frac{d\xi}{P^2} \frac{d\bar{\xi}}{v^2}$$

$$= 2 (\ell_\mu \ell_\nu - m_\mu \bar{m}_\nu) dx^\mu dx^\nu,$$

$$\ell_\mu dx^\mu = d\phi, \quad n_\mu dx^\mu = \left(1 - \frac{\dot{v}}{v} r \right) d\phi + dr,$$

$$m_\mu dx^\mu = \frac{-r d\bar{\xi}}{2P_0} v, \quad \bar{m}_\mu dx^\mu = \frac{-r d\xi}{2P_0} v.$$

Тетрадные компоненты тензора⁷⁾ Максвелла: $\phi_0 = F_{\mu\nu} \ell'^\mu m^\nu$,

$\phi_1 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (\ell'^\mu n^\nu + \bar{m}^\mu m^\nu)$, $\phi_2 = F_{\mu\nu} \bar{m}^\mu n^\nu$ удовлетворяют уравнениям:

$$D\phi_1 + \frac{2\phi_1}{r} = -\frac{v^2}{r} \delta_0 \left(\frac{\phi_0}{v} \right),$$

$$D\phi_2 - \frac{\phi_2}{r} = -\frac{v}{r} \delta_0 \phi_1, \quad (3)$$

$$\dot{\phi}_0 - \left(1 - \frac{\dot{v}}{v} r \right) D\phi_0 - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\dot{v}}{v} r \right) \phi_0 = -\frac{v}{r} \delta_0 \phi_1,$$

$$\dot{\phi}_1 - \left(1 - \frac{\dot{v}}{v} r \right) D\phi_1 - \frac{2}{r} \phi_1 = -\frac{v^2}{r} \delta \left(\frac{\phi_2}{v} \right) + \phi_0 v \delta_0 \frac{\dot{v}}{v}$$

где " . " и D обозначают соответственно производные по ϕ и r , а δ_0 и δ — угловые производные.^[8]

Условие $\phi_0 = 0$ эквивалентно тому, что ℓ_μ есть о. н. в. поля Максвелла. Наша задача показать, что регулярные решения:

$$D\phi_1 + \frac{2\phi_1}{r} = 0, \quad D\phi_2 + \frac{\phi_2}{r} = -\frac{v}{r} \delta_0 \phi_1,$$

$$0 = -\frac{v}{r} \delta_0 \phi_1,$$

$$\dot{\phi}_1 = (1 - \frac{\dot{v}}{v} r) D \phi_1 + \frac{2}{r} \phi_1 - \frac{v^2}{r} \delta_0 \left(\frac{\phi_2}{v} \right) \quad (4)$$

- есть поля Лиенара-Вихерта.

Интегрирование первых двух уравнений даёт: $\phi_0 = 0$; $\phi_1 =$

$$= \frac{\phi_1^0(\phi, \xi, \bar{\xi})}{r^2}; \quad \phi_2 = \frac{\phi_2^0(\phi, \xi, \bar{\xi})}{r} + \frac{v}{r^2} \delta_0 \phi_1^0, \quad (5)$$

и, подставляя во вторую систему, получаем прежде всего

$$\delta \phi_1^0 = 0, \text{ отсюда следует, что:}$$

$$\begin{aligned} \phi_1^0 &= \phi_1^0(\phi), \\ (\phi_1^0 v^{-2})' &= -\delta_0 \frac{\phi_2^0}{v}. \end{aligned} \quad (6)$$

Если уравнение (6) проинтегрировать по сфере (используя свойство δ_0), мы получим $\frac{d}{d\phi} (\phi_1^0 \int v^{-2} d\Omega) = 0$.

Это есть ни что иное как особый случай сохранения заряда.

Беря определённый интеграл или используя более общие методы, мы найдём:

$$\int v^{-2} d\Omega = 4\pi, \text{ и мы имеем:}$$

$\phi_1^0 = 0$ или $\phi_1^0 = e$. Используя последнее уравнение при решении уравнения (6), получим:

$$2e \frac{\dot{v}}{v} = v^2 \delta_0 \left(\frac{\phi_2^0}{v} \right)$$

Решение этого уравнения будет:

$$\phi_2^0 = -e v \delta_0 \left(\frac{\dot{v}}{v} \right). \quad (7)$$

Это можно легко проверить, учитывая, что $r^{-2} \delta_0 \delta_0 \log P_0 v = 1$, и дифференцируя соответственно по ϕ то, что это есть общее регулярное решение, видно по виду дифференциального уравнения при мгновенном фиксировании положения частицы, то есть когда $v = 1$ и поэтому $\dot{v}$ (так как $\xi^{1'}$ ортогонально $\xi^{1'}$) имеет только при $\ell = 1$ сферические гармонические части. Уравнение получается следующее: $2 e \dot{v} = \delta_0 \phi_2^0$. Можно непосредственно сделать вывод (из свойств δ и δ_0), что общее регулярное решение есть: $\phi_2^0 = -e \delta_0 \dot{v}$, которое представляет собой уравнение (7) в мгновенно зафиксированном положении.

Суммируя результаты, мы имеем для тетрадных компонент тензора Максвелла: $\phi_0 = 0$; $\phi_1 = \frac{e}{\chi^2}$; $\phi_2 = \frac{e v}{\chi} \delta_0 \frac{\dot{v}}{v}$. Прямой, но трудоёмкой инверсией уравнения (2) можно преобразовать этот результат в выражение для $F_{\mu\nu}$ и проверить, что это есть поле Лиенара-Вихерта; грубо в этом можно убедиться при повторном рассмотрении решения при мгновенном фиксировании границ и, замечая, что решение есть точное кулоновское поле, и что поле излучения электрического диполя зависят линейно от ускорения. Это есть известные свойства поля Лиенара-Вихерта.

1. J. Robinson and A. Trautman, *Proc. Roy. Soc. London* A265, 463 (1962)
2. E. T. Newman, *J. Math. Phys.* т.14, 102 (1973)
3. R. P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.* т.11, 934 (1963)
4. C. J. Talbot, *Commun. Math. Phys.* т.13, 45 (1969)

5. Хотя автор не знает точной ссылки для этого результата, тем не менее это общеизвестно и может быть установлено из работ Робинсона и Траутмена.

6. A. Held, E.T. Newman, and R. Prasad, ,

J. Math. Phys. т. II, 3145 (1970)

7. E.T. Newman and R. Penrose, *J. Math. Phys.*,

т. 3 566 (1962)

8. J.N. Goldberg et al, *J. Math. Phys.* т. 8 2155 (1967)