

12. (к § 10) Геометрия Керра, как комплексифицированная геометрия Шварцшильда. *Menahem M. Schiffer*. *Kerr geometry as complexified Schwarzschild geometry*. *J. Math. Phys.* т.14, № 1, 1973, 52-56.

АННОТАЦИЯ

Мы приводим простой вывод геометрий Шварцшильда и Керра¹⁾ с помощью упрощения полевых уравнений Эйнштейна для свободного пространства для алгебраически особой формы метрики, изученной Керром. Это приводит к системе двух дифференциальных уравнений в частных производных, уравнению Лапласа и уравнению Эйконала для комплексных производящих функций. Метрический тензор есть простой явный функционал этих производящих функций. Простейшее решение приводит к геометрии Шварцшильда, в то время как смещение начала на "ia" в этом решении образует геометрию Керра.

ВВЕДЕНИЕ

Геометрия Шварцшильда и геометрия Керра¹⁾ являются фундаментальными геометриями в общей теории относительности и имеют многочисленные приложения при экспериментальной проверке теории относительности и в астрофизике [2]. Ясно, что желательно иметь простой вывод, знать возможности этих геометрий и иметь полное понимание их отношения друг к другу. Для начала пусть будет известно, что параметр "a" геометрии Керра измеряется специфическим угловым моментом источника поля и что для случая "a = 0" аксиально симметричная

геометрия Керра сводится к сферически симметричной геометрии Шварцшильда. В этой работе мы дадим математическую интерпретацию параметра " a ".

Мы хотим сначала привести полевые уравнения свободного пространства Эйнштейна для алгебраически особой формы метрики к простой системе двух уравнений в частных производных, уравнениям Лапласа и Эйконала для простых комплексных функций.

Метрический тензор есть простой явный функционал этих комплексных функций, которые мы можем назвать производящими функциями. Наиболее очевидное решение уравнений в частных производных образует геометрию Шварцшильда. Смещение начала системы координат на мнимую величину " $i a$ " в этом решении приводит к новому очевидному решению, которое в свою очередь образует геометрию Керра. Этот результат сходен с результатом Яниса и Ньюмена³⁾, которые комплексификацией радиальной координаты превратили геометрию Шварцшильда в геометрию Керра; разница однако фундаментальна, поскольку "вывод" Яниса и Ньюмена (их кавычки) есть специальная процедура, которая может или не может давать решение полевых уравнений в свободном пространстве. В нашем приближении комплексификация, которая выполняется производящей функцией, хорошо мотивирована и строга, и ясно, что это должно вести к решению полевых уравнений свободного пространства.

Наша цель двоякая. В дополнение к демонстрации математического отношения геометрий Керра и Шварцшильда мы хотим, чтобы наш вывод был педагогически полным и, насколько возможно, простым. К тому же строение уравнений проявляет боль-

шое сходство с классической теорией Ньютона.

Наше приближение алгебраическое и параллельное геометрическому приближению Керра, Шильда⁴ и Дебни⁵. Эти авторы представили метод определения всех решений со специальной формой метрики, которую мы будем рассматривать. Самые последние работы Пежье и Паркера,⁶ Руффини и Вилкинса⁷ связаны с проблемой нескольких заряженных источников Керра — Ньюмена в равновесных началах со слегка различной формой метрики; ясно, что должна быть возможна сходная с рассмотренной в этих работах и интересная интерпретация их результатов.

Форма Эдингтона метрики Шварцшильда

В оригинальной и наиболее широко известной форме линейный элемент Шварцшильда имеет вид:

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2m}{r}\right] dt^2 - \left[1 - \left(\frac{2m}{r}\right)^{-1}\right] dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.1)$$

где m есть геометрическая масса источника. В 1924 году Эдингтон получил альтернативную форму, которая очень полезна для наших целей¹⁰. Путём введения новой временной координаты:

$$\bar{t} = t + 2m \log \left[\left(\frac{r}{2m} \right) - 1 \right] \quad (2.2)$$

он получил линейный элемент в виде:

$$ds^2 = (d\bar{t})^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - \frac{2m}{r} (d\bar{t} + dr)^2 \quad (2.3)$$

или в Декартовых координатах:

$$ds^2 = (d\bar{t}) - (dx^2 + dy^2 + dz^2) - \frac{2m}{r} \times$$

$$\times \left(d\bar{t} + \frac{xdx + ydy + zdz}{r} \right)^2; \quad (2.4)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Это есть просто линейный элемент гладкого пространства плюс некий член с интересными свойствами.

Мы можем записать этот линейный элемент как:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta -$$

$$- 2m \ell_\alpha \ell_\beta dx^\alpha dx^\beta, \quad (2.5)$$

где $\eta_{\alpha\beta}$ есть Лоренцовская метрика и ℓ_α есть 4-вектор, точно заданный выражением:

$$\ell_\alpha = \left(\frac{1}{r} \right)^{1/2} \left(1, \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right). \quad (2.6)$$

Этот 4-вектор имеет замечательное свойство, а именно: он есть нуль по отношению как к Лоренцовской метрике $\eta_{\alpha\beta}$, так и к истинной метрике $g_{\alpha\beta}$. Если метрика пространства Эйнштейна может быть задана в форме (2.5), можно показать [4; II], что пространство не есть пространство Петрова типа I, а имеет наиболее общую форму. Это эквивалентно утверждению, что число различных главных нулевых направлений Дебеве-Пенроуза должно быть меньше, чем 4 [12]. Такое пространство называется алгебраически специальным или вырожденным. По-

скольку метрика в форме (2.5) включает в себя алгебраически особое или вырожденное пространство, мы можем называть её для краткости вырожденной. Это не означает, что метрика каково-либо алгебраически особого пространства может быть выражена в этой форме.

В дальнейшем в данной работе под этим понятием мы будем предполагать вырожденную метрическую форму. Чисто алгебраическая проблема упрощения и решения уравнений Эйнштейна благодаря этому значительно облегчается.

3. Вырожденные метрики и уравнения Эйнштейна

На основе предшествующих комментариев мы теперь начнём наши формальные преобразования при предположении вырожденной метрики, записанной как:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} - 2m \ell_{\alpha} \ell_{\beta} \quad (3.1)$$

где ℓ_{α} — есть нуль 4-вектор, связанный с Лоренцевской метрикой $\eta_{\alpha\beta}$ следующим отношением:

$$\ell_{\alpha} \ell_{\beta} \eta^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.2)$$

Эта форма метрики впервые предложена Керром² и Керром и Шильдом⁴. Постоянная " m " есть произвольная, то есть мы требуем, чтобы (3.1) было решением полевых уравнений свободного пространства Эйнштейна для некоторой величины " m ". Легко проверить, что контрвариантная форма метрического тензора есть:

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} + 2m \ell^{\alpha} \ell^{\beta} \quad (3.3)$$

и что индексы у 4-вектора l_α могут быть верхними или нижними в зависимости от использования истинно метрического тензора или Лоренцевской метрики, например:

$$l^\alpha = g^{\alpha r} l_r = \eta^{\alpha r} l_r; \quad l^\alpha l_\alpha = 0 \quad (3.4)$$

4-вектор l_α имеет другие интересные свойства, поскольку это есть нуль-вектор:

$$l^\alpha l_{\alpha/r} = l_\alpha l_{/r}^\alpha = 0. \quad (3.5)$$

Итак, ковариантная форма этого отношения остаётся в силе.

Видя это, заметим, что:

$$\{^{\alpha}_{\beta \mu}\} l^\mu = -m(l^\alpha l_\beta)_{/ \mu} l^\mu \quad (3.6)$$

откуда следует, что:

$$l^\alpha l_{\alpha // r} = l_\alpha l_{// r}^\alpha. \quad (3.7)$$

Сами полевые уравнения значительно упрощаются при нашем выборе метрики. Как следует из определения (3.1), метрический определитель есть $\|g\| = -I$, так что:

$$\{^{\alpha}_{\beta \alpha}\} = (\log \sqrt{-g})_{/ \beta} = 0 \quad (3.8)$$

и уравнения поля содержат только два члена:

$$R_{\mu\nu} = -\left\{\frac{\alpha}{\mu\nu}\right\}_{/ \alpha} + \left\{\frac{\alpha}{\beta \mu}\right\} \left\{\frac{\beta}{\alpha \nu}\right\} = 0 \quad (3.9)$$

Поскольку метрический тензор есть полином первого порядка, по m , $R_{\mu\nu}$ есть полином четвёртого порядка по m . Поскольку m произвольно, каждый порядок должен обращаться в нуль независимо, в результате получается система следующих четырёх уравнений поля:

$$\eta^{\alpha\beta} [\mu\nu, \beta]_{|\alpha} = 0 \quad \text{порядок } m \quad (3.10a)$$

порядок m^2 : (3.10b)

$$2m(\ell^\alpha \ell^\beta [\mu\nu, \beta])_{|\alpha} - \eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta} [\beta\mu, \delta] [\alpha\nu, \lambda] = 0$$

порядок m^3 : (3.10c)

$$\ell^\beta \ell^\lambda \eta^{\alpha\gamma} [\beta\mu, \delta] [\alpha\nu, \lambda] + \ell^\alpha \ell^\lambda \eta^{\beta\gamma} [\beta\mu, \lambda] [\alpha\nu, \delta] = 0$$

порядок m^4 : $\ell^\alpha \ell^\beta \ell^\gamma \ell^\lambda [\beta\mu, \delta] [\alpha\nu, \lambda] = 0$. (3.10d)

Уравнение для порядка m^4 идентично (благодаря свойствам ℓ_α) уже записанным уравнениям (3.4) и (3.5), в то время как уравнение порядка m^3 приводит нас к интересному новому вектору. Уравнение (3.10 c) сводится к равенству:

$$-m \ell_\mu \ell_\nu V^\alpha V_\alpha = 0, \quad (3.11)$$

где

$$V^\alpha = e^\beta e_{\beta\alpha}^\alpha = e^\beta e_{1\beta}^\alpha \quad (3.12)$$

Здесь V^α есть нуль-вектор, тем не менее он, как легко видеть, ортогонален нулевому вектору e^α . Из этого мы можем заключить, что V^α и e^α пропорциональны в каждой точке и связаны следующим соотношением:

$$V^\nu = e^\alpha e_{\alpha\nu}^\nu = -A e^\nu, \quad \text{где } A \text{ есть скалярное}$$

поле (это имеет физическую интерпретацию, заключающуюся в том, что векторное поле e^μ касательно к семейству геодезических линий¹³).

Мы хотим отложить обсуждение уравнений порядка m^2 и приступить к упрощению уравнений порядка m . В терминах оператора Даламбера $\square^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ и скаляра L , определяемого как:

$$L = -e_{\alpha\alpha}^\alpha = -e_{1\alpha}^\alpha \quad (3.14)$$

уравнение порядка m (3.10a) может быть переписано в удобной и краткой форме:

$$-\square^2(e_\mu e_\nu) = [(L+A)e_\mu]_{,\nu} + [(L+A)e_\nu]_{,\mu}. \quad (3.15)$$

Скаляр L изучается в геометрической оптике в Римановом пространстве, и это относится к расширенному параметру θ , в обозначениях как подчеркнул Пирани [13].

С этой точки зрения мы не предлагали какой-либо симметрии метрики. В нашем дальнейшем рассмотрении в следующем разделе удобно рассмотреть только случай, когда метрика стационарна или не зависит от t . В стационарном случае какое-либо решение уравнения порядка m — будет автоматически решением уравнения порядка m^2 , что мы покажем в разделе 5.

4. Упрощение уравнений поля

В стационарном случае есть возможность привести полевые уравнения к двум простым уравнениям в частных производных для простых комплексных функций. Эти дифференциальные уравнения есть уравнения Лапласа и Эйконала. Упрощение достигается немного длинным, но элементарным алгебраическим преобразованием уравнений порядка m (3.15).

Начнём с введения единичного 3-вектора λ_j , заменяющего пространственные компоненты ℓ_α 9).

$$\ell_j = \ell_0 \lambda_j, \quad \lambda_j \lambda_j = 1. \quad (4.1)$$

Единичная длина λ есть последовательность ℓ^α — нуль-вектора. Уравнение порядка m (3.15) тогда имеет вид:

$$\nabla^2(\ell_0^2) = 0, \quad (4.2a)$$

$$\nabla^2(\ell_0^2 \lambda_j) = [(L+A)\ell_0]_{|j}, \quad (4.2b)$$

$$\nabla^2(\ell_0^2 \lambda_i \lambda_j) = [(L+A)\ell_0 \lambda_i]_{|j} + [(L+A)\ell_0 \lambda_j]_{|i}. \quad (4.2c)$$

Эти дифференциальные уравнения второго порядка могут быть преобразованы в данную систему дифференциальных уравнений первого порядка, заменяющих (4.2с).

Мы раскрываем (4.2с) и, используя (4.2а) и (4.2в) для сокращения членов, получаем:

$$\begin{aligned}\lambda_{ij} + \lambda_{ji} &= [2\ell_0/(L+A)] \lambda_{ik} \lambda_{jk} \equiv \\ &\equiv (1/\rho) \lambda_{ik} \lambda_{jk}.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Есть возможность разрешить (4.3) для λ_{ij} в членах λ_k с помощью использования матричной алгебры.

Мы обозначим λ_{ik} матрицей M , тогда (4.3) принимает следующий вид:

$$M + M^T = (1/\rho) M M^T. \quad (4.4)$$

Кроме того, из (3.13) и единичной длины λ мы видим, что λ является в нулевом пространстве как M , так и M^T :

$$\lambda_{k|j} \lambda_j = 0, \quad M\lambda = 0, \quad (4.5)$$

$$\lambda_j \lambda_{j|k} = 0, \quad M^T \lambda = 0.$$

Это примечательно, что уравнения (4.4) и (4.5) определяют матрицу M , как один реальный параметр в терминах λ .

Вращением координат R вектор λ может быть размещён вдоль оси x :

$$\lambda' = R\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{совмещён с} \\ \text{осью} \end{array} \quad (4.6)$$

В этих вращающихся координатах λ' в нулевом пространстве $M' = RMR^T$ и M'^T . Очевидно, поэтому, что M' должно иметь форму:

$$M' = RMR^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N' \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Если выполняется инвариантность матричной алгебры при вращениях, то уравнение (4.4) сохраняется для матрицы M' и для 2×2 субматрицы N' :

$$N' + N'^T = (1/\rho) N' N'^T. \quad (4.8)$$

Но это означает, что N' относится к 2×2 реальной унитарной матрице. Выражение для U имеет вид:

$$U = I - (1/\rho) N', \quad UU^+ = I. \quad (4.9)$$

Если U собственна и имеет положительный детерминант, мы можем записать её только в терминах параметра Θ как:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

а M' может быть записано как

$$M' = \rho \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \cos \Theta & \sin \Theta \\ 0 & -\sin \Theta & 1 - \cos \Theta \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Мы здесь предположили, что U имеет положительный детерминант, поскольку, если бы мы допустили, что детерминант отрицательный, то результирующие решения полевых уравнений не могут представить изолированную точечную массу. Мы должны теперь, осуществляя поворот назад к начальным координатам, получить $M = R^T M' R$.

Используя ортонормированность строк и столбцов R , мы получим:

$$M_{ik} = \rho (1 - \cos \theta) (\delta_{ik} - R_{1i} R_{1k}) + \rho \sin \theta \epsilon_{ike} R_{1e} \quad (4.12)$$

Благоприятно, что в этом выражении появляется только первая строка матрицы R ; мы обозначим её вектором R . Относя R к λ , подставим условия в уравнение (4.5) и найдём, что:

$$\lambda = R(R \cdot \lambda), \quad \lambda \times R = 0. \quad (4.13)$$

Тогда $R = \pm \lambda$; поскольку верхний знак матрицы R произвольный, мы можем выбрать знак плюс.

Мы можем теперь записать M или λ_{ik} в терминах только λ_i и произвольного параметра θ :

$$\lambda_{ik} = \rho (1 - \cos \theta) (\delta_{ik} - \lambda_i \lambda_k) + \rho \sin \theta \epsilon_{ike} \lambda_e \quad (4.14)$$

Это представление есть наиболее выгодное упрощение уравнения (4.3). Оно заменяет нелинейное отношение между первыми производными λ_i ясным выражением λ_{ik} в терминах λ_i . Цена, которую мы платим за это, есть введение произвольного

параметра θ . Рассмотрение алгебраического содержания (4.14) может теперь непосредственно привести к простым дифференциальным уравнениям, обсуждённым во введении. Сначала перепишем (4.14) с новыми параметрами α и β , заменяющими ρ и θ

$$\lambda_{ik} = \alpha(\delta_{ik} - \lambda_i \lambda_k) + \beta \epsilon_{ike} \lambda_e. \quad (4.15)$$

Это есть более чем незначительное алгебраическое упрощение, поскольку мы хотим показать, что α и β удобно определяют метрику. Из этих выражений мы непосредственно получаем:

$$\nabla \cdot \lambda = 2\alpha; \quad \nabla \times \lambda = -2\beta \lambda \quad (4.16)$$

Лапласиан λ может быть получен двумя путями; непосредственно из (4.15) мы получаем:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \lambda = \nabla \alpha - \lambda (\nabla \alpha \cdot \lambda) - \\ - 2(\alpha^2 + \beta^2) \lambda + \nabla \beta \times \lambda. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Альтернативно мы можем взять ротор $\nabla \times \lambda$ из (4.16); раскрывая и устанавливая идентичность с вектором и используя (4.16), получаем упрощённый результат в виде:

$$\nabla^2 \lambda = 2\nabla \alpha + 2(\nabla \beta \times \lambda) - 4\beta^2 \lambda. \quad (4.18)$$

Приравнивая эти два выражения для $\nabla^2 \lambda$, мы получим выражение для $\nabla \alpha$:

$$\nabla \alpha = -\nabla \beta \times \lambda - \lambda (\nabla \alpha \cdot \lambda) - 2(\alpha^2 - \beta^2) \lambda. \quad (4.19)$$

Отсюда мы получаем важные результаты:

$$\begin{aligned} \nabla \alpha \cdot \lambda &= \beta^2 - \alpha^2, \\ \nabla \alpha &= (\beta^2 - \alpha^2) \lambda - (\nabla \beta \times \lambda). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Аналогично могут быть получены соотношения для β . Из (4.16) мы можем получить выражение (4.20)

$$\nabla \beta \cdot \lambda = -2\alpha\beta.$$

Образуя $\nabla \alpha \times \lambda$, исходя из (4.19) и используя (4.21) для упрощения, мы получим градиент β :

$$\nabla \beta = -2\alpha\beta\lambda + \nabla \alpha \times \lambda. \quad (4.22)$$

Векторные соотношения (4.19) - (4.22) могут быть переписаны в сжатой форме при введении комплексной функции $\gamma = \alpha + i\beta$. В терминах числа γ уравнения (4.19) - (4.22) могут быть записаны следующим образом:

$$\nabla \gamma \cdot \lambda = -\gamma^2, \quad \nabla \gamma = -\gamma^2 \lambda + i(\nabla \gamma \times \lambda). \quad (4.23)$$

Должна быть подчеркнута важность рассмотрения $\alpha + i\beta$ как простой комплексной функции. В терминах γ решения Керра и Шварцшильда имеют очевидное отношение, как это было обсуждено во введении. Тем более наши дальнейшие алгебраические преобразования очень облегчаются в терминах γ .

Наша задача - получить дифференциальные уравнения, определяющие γ , и показать, что γ однозначно определяет λ_i и ℓ_o , то есть комплексную метрику.

Эта комплексная функция $\mathcal{r}$ есть производящая функция и содержит полную информацию о геометрии. Для получения первого дифференциального уравнения мы образуем Лапласиан от $\mathcal{r}$ и упростим это выражение, используя (4.16) и (4.23). Тогда получим уравнение Лапласа для $\mathcal{r}$

$$\nabla^2 \mathcal{r} = 0, \quad (4.24)$$

так что $\mathcal{r}$ есть комплексная гармоническая функция. Второе уравнение нелинейно и следует из (4.23) после возведения $\nabla \mathcal{r}$ его в квадрат

$$(\nabla \mathcal{r})^2 = \mathcal{r}^4. \quad (4.25)$$

Альтернативная и полезная форма этого уравнения есть:

$$(\nabla \omega)^2 = 1, \quad \omega = \mathcal{r}^{-1}, \quad (4.26)$$

Это уравнение представляет собой уравнение Эйконала, сходное с уравнением в классической оптике. Функция $\mathcal{r}$ есть комплексная гармоническая функция, обратная которой удовлетворяет уравнению Эйконала. ($\mathcal{r}$ связано с F_y 4 и 5 равенством $\mathcal{r} = \sqrt{2}/F_y$).

Теперь мы имеем систему уравнений для $\mathcal{r}$, и остаётся только показать, что λ_i и ℓ_o однозначно определяются $\mathcal{r}$. Решим (4.23) непосредственно относительно λ , для этого сначала перепишем (4.23) в терминах $\mathcal{r}^{-1} = \omega$

$$\lambda \cdot \nabla \omega = \lambda \cdot \nabla \omega^* = 1, \quad (4.27)$$

$$\nabla \omega = \lambda + i(\nabla \omega \times \lambda).$$

$$\nabla \omega \times \nabla \omega^* = -i[\nabla \omega^* + \nabla \omega] + B\lambda, \quad (4.28)$$

где B соответствующий коэффициент при λ , который зависит от λ и ω . Тем не менее, мы можем решить (4.28) относительно B и посредством этого очень просто получить λ ; мы подставим $\nabla \omega$ в (4.28) и, используя (4.27), получим:

$$B = i[1 + \nabla \omega \cdot \nabla \omega^*] \quad (4.29)$$

и тогда:

$$\lambda = [\nabla \omega + \nabla \omega^* - i(\nabla \omega \times \nabla \omega^*)] / (1 + \nabla \omega \cdot \nabla \omega^*), \quad (4.30)$$

которое по определению вещественно. Мы видим, что значение γ определяет λ однозначно посредством простого уравнения; легко проверить это решение подстановкой в (4.15). Наша заключительная задача в том, чтобы показать, что ℓ также может быть получено из γ . Мы можем использовать уравнения (4.2а) и (4.2в), чтобы показать, что решение есть $\ell^2 = \alpha = \text{Re } \gamma$. Используя его как подлежащее, проверке решение, мы сначала вычислим левую сторону (4.26);

$\nabla^2(\alpha\lambda)$, используя факт, что α — гармоническая функция. Тогда, используя (4.15), (4.18), (4.20) и (4.22), получим для Лапласиана простое выражение:

$$\nabla^2(\alpha\lambda) = \nabla(\alpha^2 + \beta^2). \quad (4.31)$$

Для получения правой стороны (4.26) мы вернёмся к (4.3). Положив $i = j$ в (4.3) и суммируя, мы видим, что левая сторона есть двойная дивергенция λ , или 4α , поскольку

ку $\lambda_{ik} \lambda_{i/k} = 2(\alpha^2 + \beta^2)$ из (4.15). Тогда (4.3) приводит к уравнению:

$$\begin{aligned} (A+L) &= (\ell_0/\alpha)(\alpha^2 + \beta^2), \\ (A+L)\ell_0 &= \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned} \quad (4.32)$$

где $\ell_0^2 = \alpha$ есть проверяемое решение.

Из двух вышеупомянутых уравнений очевидно, что уравнение (4.26) действительно удовлетворяется решением $\ell_0^2 = \alpha$. Поскольку α есть $\text{Re } \gamma$ и гармоническая функция (4.2а) также удовлетворяется. Может быть легко показано, что это решение единственно с точностью до постоянного множителя, так что мы имеем окончательно:

$$\ell_0^2 = k\alpha = k \text{Re } \gamma. \quad (4.33)$$

Наши результаты можно теперь суммировать. Мы привели уравнения поля свободного пространства порядка m к паре уравнений (4.24) и (4.26) с решениями (4.30) и (4.33).

Решая уравнения для метрики, мы нашли гармоническую функцию γ , обратная которой удовлетворяет уравнению Эйконала.

Компоненты метрики ℓ_0 и λ_i и, следовательно, ℓ_α , выражаются простыми уравнениями (4.30) и (4.33).

Комплексная функция γ играет роль обобщённого Ньютоновского потенциала, так как она удовлетворяет уравнению Лапласа и уравнению $\text{Re } \gamma = \ell_0^2$. (Функция ℓ_0^2 должна быть пропорциональна Ньютоновскому потенциалу в пределе малых m , как это хорошо известно в линеаризованной теории).

5. Уравнения порядка m^2

Мы указывали, что некоторые стационарные решения уравнений порядка m^3 и порядка m автоматически удовлетворяют уравнениям порядка m^2 . Теперь мы хотим показать это. Уравнения порядка m^2 (3.10в) непосредственно сводятся к уравнению

$$[2(\ell^\alpha A)_{i\alpha} + \ell^\alpha_{i\beta} \ell^\beta_{i\alpha} - \ell^\alpha_{i\beta} \ell^\beta_{\alpha i} - A^2] \ell_\mu \ell_\nu = 0. \quad (5.1)$$

В стационарном случае это выражение подразумевает скалярное уравнение:

$$-2(\ell_i A)_{i i} + \ell_{i j} \ell_{j i} + \ell^\alpha_{i k} \ell_{\alpha i k} - A^2 = 0. \quad (5.2)$$

Исходя из предыдущего раздела, легко показать, что:

$$\ell_{i j} \ell_{j i} = [(A-L)\ell_i]_{i i} + L^2, \quad (5.3)$$

$$\ell^\alpha_{i k} \ell_{\alpha i k} = A^2 - L^2.$$

Тогда из (5.2) получаем

$$[(A+L)\ell_j]_{i j} = 0. \quad (5.4)$$

Тем не менее, если мы положим $i = j$ в уравнении (4.2с), мы найдём, что

$$\nabla^2(\ell_o^2 \lambda^2) = \nabla^2(\ell_o^2) = 0 = 2[(A+L)\ell_j]_{i j} \quad (5.5)$$

так что получается уравнение, идентичное с (5.4).

6. Геометрии Шварцшильда и Керра

Теперь мы получим простейшее решение уравнений (4.24) и (4.26). По аналогии с теорией Ньютона мы рассмотрим

$$g = r^{-1} = [x^2 + y^2 + z^2]^{-1/2} \quad (6.1)$$

как решение уравнения Лапласа.

Легко видеть, что если $g^{-1} = r$ удовлетворяет уравнению Эйкола, то $g = r^{-1}$ есть производящая функция. Метрические функции, образуемые уравнениями (4.30) и (4.33) из $g = r^{-1}$ есть

$$\begin{aligned} \rho_0^2 &= r^{-1}, & \lambda_1 &= x/r, & \lambda_2 &= y/r, \\ \lambda_3 &= z/r, \end{aligned} \quad (6.2)$$

которые ведут к форме Эдингтона линейного элемента Шварцшильда (2.4).

Если мы теперь поставим вопрос о простейшем обобщении вышеприведенных решений, мы придём к рассмотрению общего смещения начала, то есть

$$g = \tilde{r}^{-1} = [(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2]^{-1/2} \quad (6.3)$$

(6.3) удовлетворяет (4.24) и (4.26) для какого-либо выбранного a_i . Тем не менее, это решение соответствует просто физическому смещению начала координат (если a_i — вещественное) не имеет физического интереса. Если a_i — мнимое, то мы имеем новый результат. При подходящем выборе трёхразмерных

координат, не потеряв общности, можно записать r - функцию, смещённую на минимую величину, как:

$$r = [x^2 + y^2 + (z - ia)]^{-1/2} \quad (6.4)$$

Метрические функции, образованные из (6.4) с помощью (4.30) и (4.33), есть:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{r^3}{r^4 + a^2 z^2}, & \lambda_1 &= \frac{rx + ay}{a^2 + r^2}, \\ \lambda_2 &= \frac{ry - ax}{a^2 + r^2}, & \lambda_3 &= \frac{z}{r}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где ρ есть вещественная часть $\omega = r^{-1}$ и есть решение уравнения:

$$\rho^4 - \rho^2(r^2 - a^2) - a^2 z^2 = 0. \quad (6.6)$$

Линейный элемент, соответствующий метрическим функциям в (6.5), есть

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) - \\ &- \frac{2mr^3}{r^4 + a^2 z^2} \left(dt + \frac{r}{a^2 + r^2} (x dx + y dy) + \right. \\ &+ \left. \frac{a}{a^2 + r^2} (y dx - x dy) + \frac{z}{r} dz \right)^2. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Это есть линейный элемент Керра, данный в работе (1).

7. Резюме и другие замечания

Эйнштейновские уравнения поля в свободном пространстве упрощаются для случая вырожденной метрики в уравнения Лапласа и Эйконала (4.24) и (4.26). Решения этих уравнений образуют метрический тензор посредством (4.30) и (4.33). Мы использовали эти результаты, чтобы показать, что производящие функции Шварцшильдской геометрии дают производящие функции геометрии Керра, если начало смещено на мнимую величину.

Дальнейшая работа в этом направлении заключается в приложении сходной алгебраической техники к геометрии заряженных источников, обладающих спином (Ньюмена и др.⁸⁾) к геометрии многих источников (Пежье) и проблеме внутреннего решения Керра.

Уникальность предложений Картера и Израэля [14, 15] обсуждена при рассмотрении в контексте вырожденных метрических форм.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Авторы благодарят профессора Циллера за его перспективный комментарий к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.* т. II, 237 (1963)
2. Полезное резюме многих аспектов этих полей может быть найдено в "Relativistic Cosmology and Space Platforms", R. Ruffini and J. A. Wheeler's preprint.
3. E. T. Newman and A. I. Janis, *J. Math. Phys.* т. 6, 915 (1965) Эти авторы указывают, что R. P. Kerr в частных сообщениях развивал дальше процесс комплексификации.
4. R. P. Kerr and A. Schild, *Atti del convegno sulla relatività generale: Problemi dell'energia e onde gravitazionali (Anniversary Volume, Fourth Centenary of Galileo's Birth)* (G. Barbéra, Firenze, 1964), p 173;
Applications of nonlinear partial differential equations in mathematical physics, Proceedings of symposia in applied mathematics (Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965), Vol. XVII, p 199
5. G. C. Debney, R. P. Kerr, and A. Schild, *J. Math. Phys.* 10, 1842 (1969).
6. Z. Perjes, *Phys. Rev. Lett.* т. 27, 1668 (1971)
7. L. Parker, R. Ruffini, and D. Wilkins, *Bull. Am. Phys. Soc.* т. 17, 449 (1972)
8. E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, and R. Torrence. *J. Math. Phys.* т. 6, 918, (1964)

9. Мы используем геометрические единицы, в которых $c = G = 1$. Наша метрическая сигнатура есть $(1, -1, -1, -1)$. Греческие индексы пробегают значения от 0 до 3, латинские от 1 до 3. По всем повторяющимся индексам производится суммирование, независимо от положения.

10. A.S. Eddington, *Nature* (Lond.) т.113; 192 (1924)
11. A. Schild, "Lectures in General Relativity Theory" in *Lectures in applied mathematics*, edited by J. Ehlers (Amer. Math. Soc., R.I, 1967), Vol. 8
12. R. Penrose, *Ann. Phys.* (N.Y.) т.10, 171 (1960)
13. F.A.E. Pirani, "Introduction to Gravitational Radiation Theory" in *Lectures on general relativity* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.Y., № 7, 1965)
14. W. Israel, *Phys. Rev. Commun. Math. Phys.* т.164, 1776 (1967); 8, 245 (1968)
15. B. Carter, *Phys. Rev. Phys. Rev. Lett.* 1974, 1559 (1968); 26, 331 (1971)