

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**ТАГАНРОГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ**  
**УНИВЕРСИТЕТ**

---

*Версия 1.1 (Adobe Acrobat)*

**В.Г.Сапогин**

***МЕХАНИЗМЫ***  
***УДЕРЖАНИЯ ВЕЩЕСТВА***  
***САМОСОГЛАСОВАННЫМ ПОЛЕМ***

**Таганрог 2000**

УДК 530.1

**Сапогин В.Г.** Механизмы удержания вещества самосогласованным полем: Монография. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. 253 с.

**ISBN 5-8327-0068-6**

Монография, основанная на работах автора, посвященных теории статического равновесия неоднородного вещества, удерживаемого самосогласованным полем.

Предназначена студентам старших курсов физических и технических факультетов университетов, магистрам, аспирантам и научным работникам, специализирующимся в различных областях теоретической и технической физики.

Табл. 1. Ил. 81. Библиогр.: 82 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЕГФ Таганрогского государственного радиотехнического университета.

#### **Рецензенты:**

А.Е.Панич, д-р техн. наук, профессор,  
зам. председателя СКНЦ ВШ по естественным  
и техническим наукам.

Кафедра общей физики РГУ. А.С.Богатин,  
канд.физ.-мат.наук, доцент, зав. кафедрой.

**ISBN 5-8327-0068-6**

- © Таганрогский государственный радиотехнический университет, 2000.
- © Сапогин В.Г., 2000.

## ВВЕДЕНИЕ

В истории физики известно много экспериментов, которые сыграли решающую роль в появлении различных ее разделов. Так, обширнейший круг электрических явлений не смог бы возникнуть, если бы не существовало механизмов разделения и накопления разноименных зарядов.

Первые опыты по электричеству: шерсть, стеклянная и эбонитовая палочки, лейденская банка, конденсаторы, электростатические машины, генераторы Ван-де-Граафа в наше время пополнились электростатическими генераторами-транспортёрами пеллетронами и ладдетронами, в которых разделенные заряды создают огромные напряжения от 15 до 20 мегавольт.

Приобретенный опыт показывает, что избыточные (свободные) заряды можно переносить с одной поверхности на другую. В результате этого переноса они могут скопиться в больших количествах на поверхности металла, эбонита, стекла. Предел такому разделению устанавливает пробойное напряжение изоляции. Этот же опыт говорит о том, что они плохо удерживаются на поверхностях, имеющих острейшую геометрию.

Эксперименты с разделением зарядов указывают на то, что одноименные заряды, сообщенные однородному проводнику со сферической геометрией, располагаются на его поверхности. Объяснение этого факта в наше время можно найти разве что в учебной литературе. Оно математически обосновано тем, что сила взаимодействия точечных зарядов убывает обратно пропорционально квадрату расстояния между ними, а не по другому закону.

Для доказательства отсутствия объемных избыточных зарядов внутри сферической поверхности выделяется произвольный сферический тонкий слой зарядов, который делит весь объем внутри сферической поверхности на две части – внешнюю и внутреннюю. Выделенный слой не взаимодействует с зарядами, находящимися во внешней части (здесь проводится аналогия с теорией гравитации), но взаимодействует с зарядами, находящимися во внутренней части. Поскольку при этом на заряды слоя действуют только силы отталкивания, то они начнут движение от центра к периферии и будут двигаться до тех пор, пока не окажутся на поверхности проводящей сферы.

Приводимое объяснение важнейшего экспериментального факта не может убедить современного исследователя. Если слой, возникающий на поверхности сферы, такой тонкий, что заряды, находящиеся в нем, не могут совершать движения, то существование такой статической системы противоречит теореме Ирншоу.

Если толщина слоя зарядов на поверхности сферы мала по сравнению с ее радиусом (слой физически бесконечно тонкий), то заряды внутри него образуют своеобразную “атмосферу” – динамическую систему, в которой они сталкиваются друг с другом, совершая при этом хаотическое движение. Существование такой динамической системы уже не противоречит теореме Ирншоу. Эксперимент показывает, что такая динамическая система устойчива. Электрическое поле, создаваемое ею, после усреднения по физически малому отрезку времени и физически малому объему проявляет себя как статическое и будет удовлетворять известным законам электростатики в окружающем систему пространстве.

Но введение термина “тонкий слой избыточных зарядов на поверхности проводника” создает новые принципиальные трудности для понимания происходящего. Первая трудность заключается в том, что существует универсальный принцип изотропии направлений действия гравитационных и кулоновских сил в соответствующих системах коллективного взаимодействия, которому не удовлетворяет приводимое выше объяснение. Он заключается в том, что если сообщить заряды металлической тонкостенной сфере, то изотропность направлений действия кулоновских сил должна разбросать заряды не только по сфере, но и по обе ее стороны: внутри и снаружи.

В этом случае должны образоваться две “атмосферы” – внутренняя и внешняя, каждая со своей высотой. Высота любой образовавшейся “атмосферы” должна зависеть от ее температуры, радиуса кривизны поверхности сферы и величины сообщенного сфере заряда. Аналогичные “атмосферы” образуются и при сообщении зарядов плоской тонкой уединенной металлической пластине. Мысленно свернем пластину в сферу. После сворачивания число “атмосфер” не изменится, а заряды в них перераспределятся по законам, определяемым сферической симметрией.

На наш взгляд, существование внешней “атмосферы” зарядов на выпуклой металлической поверхности было подтверждено экспериментально в замечательных опытах по созданию “туннельного” микроскопа, принцип действия которого допускает еще одну физическую интерпретацию. Ток в “туннельном” микроскопе будет возникать только в тот момент, когда “атмосфера” избыточных зарядов, возникающая на игле, начнет соприкасаться с “атмосферой” зарядов другого знака на подложке. Поскольку “атмосфера” избыточных зарядов имеет коническую геометрию, то даже малые изменения расстояния между иглой и подложкой будут влиять на площадь поперечного сечения проводящего туннеля, а стало быть, и на величину туннельного тока. Проведенные эксперименты

показали, что высота внешней “атмосферы” зарядов, возникающей на острие, лежит в диапазоне нескольких микрометров.

Начиная с Кавендиша, было проведено много экспериментов, с помощью которых пытались обнаружить какие-либо отклонения от закона Кулона. В этих экспериментах к проводящему шару плотно примыкает разъемная проводящая сферическая оболочка, состоящая из двух полу-сфер. Когда она надета на шар, системе сообщается электрический заряд. Затем оболочка с помощью изолирующих ручек удаляется и исследуется оставшийся на шаре заряд. Эксперименты с высокой точностью показали, что остающийся на шаре заряд равен нулю.

Если удаляемая оболочка не оставляет заряд своей внутренней “атмосферы” на шаре по причинам, которые будут выяснены позже, то проведенные эксперименты не могут подтвердить или опровергнуть существование внутренней “атмосферы” зарядов в оболочке. Ее высота при тех же условиях меньше, чем у внешней, а это уже доли микрометра. Ясно, что никакими грубыми механическими или электрическими измерениями ее невозможно обнаружить.

Тут следует обратить внимание на еще одно важное физическое свойство “атмосфер”, состоящих из зарядов. Из-за кулоновского взаимодействия концентрация зарядов в них будет увеличиваться во внешней атмосфере наружу, а во внутренней - внутрь. При сообщении больших отрицательных зарядов металлической сфере концентрация зарядов вблизи внутренней полости “атмосферы” может сравняться со средней концентрацией электронов твердого тела или даже превысить ее. Это придаст “атмосфере” твердость металла. Каким способом отличить ее от границы металла?

Приведенные выше рассуждения справедливы только в случае, если радиус сферы значительно превышает толщину внутренней “атмосферы”. А если радиус сферы будет соизмерим с ней или меньше ее? Тогда осуществится необычный случай, при котором заряды внутренней “атмосферы” заполнят весь объем сферы. Он же возникнет и при высокой температуре газа зарядов, при которой тепловое движение начинает проявлять себя в полную силу.

Вторая трудность в понимании происходящего заключается в том, что тонкий слой избыточных зарядов всегда образует для внешнего наблюдателя статическую систему, в которой кулоновское взаимодействие явно никак не проявляется. Чем компенсируется кулоновское расталкивание после того, как заряды уже вышли на поверхность и образовали

“атмосферы”? Ответить на этот вопрос в рамках известных законов электростатики не удастся.

В настоящее время в физике известны четыре вида взаимодействия материальных объектов: гравитационное, сильное, слабое и электромагнитное. Ни одно из них не может прояснить самый древний парадокс экспериментальной электростатики. Следует заметить, что похожая ситуация существует в ядре: избыточный заряд протонов удерживается от разлета ядерными силами. Но поскольку ядерные силы, как нас уверяют ядерщики, действуют на расстояниях  $10^{-15}$  м, то привлечение их для объяснения существования микронных “атмосфер” зарядов представляется невозможным.

Можно подумать, что вопрос о причинах удержания избыточного заряда на поверхности не вставал перед исследователями. Но это не так. В [1, стр. 80] читаем: “В электростатике исследуются распределения зарядов на поверхности проводника, создаваемое ими электрическое поле, действующие силы, но не рассматривается, почему эти заряды не покидают поверхности проводника. Природа сил, удерживающих заряды на поверхности проводника, не изучается в рамках электростатики.”

Автор предлагаемой монографии не смог найти области физики, в которой изучается природа упомянутых выше сил, в связи с чем и решил провести самостоятельное исследование. Оказалось, что на этот счет в физике существуют два диаметрально противоположных бездоказательных суждения. Отстаивающие первое суждение считают, что за удержание зарядов отвечает их взаимодействие с поверхностью вещества, возле которой заряд концентрируется. Поэтому ожидать появления в ограниченной области пространства зарядов вне поверхности бессмысленно.

Сторонники второго суждения считают, что силы, удерживающие заряд, проявляют себя только в той области пространства, где эти заряды находятся. В этом смысле они похожи на ядерные и гравитационные силы (известные в гравитации шаровые скопления вещества звезд не требуют наличия какой-либо внешней поверхности). А стало быть, поверхность, у которой они концентрируются, играет только направляющую роль, и возможны не зависящие от поверхности, ограниченные в пространстве автономные системы избыточных зарядов различной геометрии.

За такими системами уже прочно закрепилось название - зарядовые кластеры (ЗК). Их свойства исследуют на протяжении последних 20 лет. Приоритет их экспериментального открытия принадлежит американскому исследователю К.Шоулдерсу [2].

Начиная с 1991 года Кеннет Шоулдерс получил 5 патентов США за открытие и разработку технологии создания зарядовых скоплений высокой плотности (с подробностями можно ознакомиться в приложении). Шаровое скопление, возникающее на острейшем катоде в вакууме, было им названо “Elektrum Validum” (EV), что означает “сильный электрон” от греческого “elektron” (электрический заряд) и латинского “valere” (быть сильным, обладающим способностью к объединению).

EV, образующиеся при создании сильного (от 2 до 10 кВ) электрического поля между катодом и анодом, имеют малые размеры (от долей до десятков микрометров) и большой электронный заряд (от  $10^8$  до  $10^{11}$  электронов в шаре). Отдельные EV наблюдаются редко. Обычно они образуют кольцеобразные структуры диаметром порядка 20 микрометров, состоящие из цепочки EV. Поскольку среднее время жизни EV обычно составляет величину 30 пс, то для их наблюдения был создан специальный пикоскоп со временем разрешения 0,1 пс.

Перечислим их основные свойства. Средняя концентрация электронов в EV составляет величину  $6,6 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$ , которая вызывает удивление, поскольку она на порядок превышает значение средней концентрации электронов твердого тела. EV при таких концентрациях, не имея кристаллической решетки, проявляет твердость алмазного абразива. Так, если диаметр канала, по которому движется EV, окажется меньше, чем его диаметр, то он “высверлит” для себя более широкий канал. Движение EV через пленку приводит к появлению в ней отверстия с обожженными краями.

Импульсная генерация EV происходит на острие катода. Она приводит к быстрому износу его твердотельной поверхности, которую постоянно восстанавливают. Взаимодействие потоков EV с радиоактивной подложкой уменьшает ее радиоактивность. Когда EVs перемещаются через газовую атмосферу, они сопровождаются видимым потоком частиц (стримером). Перед появлением стримера возникает узкий пучок света. Распад EV сопровождается либо выделением энергии в виде рентгеновских лучей, либо взрывом при достижении критически низкого значения его плотности заряда.

Неупругое столкновение EV большой энергии с поверхностью металла иногда оставляет на металле характерный кратер с валиком из нерасплавленного вещества в центре. Этот кратер, хорошо видимый под электронным микроскопом, диаметром от микрона до десятка микрон и натолкнул Шоулдерса на догадку о существовании нового физического объекта - ЗК.

Перечисленные физические свойства ЗК очень разнообразны и во многом непонятны. Объяснение, предложенное самим Шоулдерсом, основано на работе [3], в которой вводится понятие поляризованного вакуума, обладающего энергией нулевых колебаний. Приводя доводы не количественного характера, Шоулдерс утверждает, "...что начальное движение электронов в момент образования EV поддерживается в равновесном состоянии или даже сжимается энергией нулевых колебаний."

Обосновав физические причины равновесия зарядов в EV, он предполагает, "...что EV является совершенным сферическим генератором, построенным на базе несимметричного вибратора". Генератор возбуждает в ограниченной области пространства векторные и скалярные продольные волны, в которых отсутствуют электрические и магнитные поля. Никаких соотношений, позволяющих рассчитать EV, не приводится.

Объяснение свойств ЗК посредством введения узкопрофессионального арго не выдерживает никакой критики. Как видно из изложенного, часть перечисленных свойств ЗК совпадает со свойствами рассмотренных ранее "атмосфер", состоящих из избыточных зарядов. Это указывает на одинаковую физическую природу сил, удерживающих заряды в столь различных образованиях. В них наблюдается какое-то неизвестное свойство коллективного взаимодействия зарядов, которое проявляет себя только в системах с высокой концентрацией.

Если силы, удерживающие заряды в ограниченной области пространства, существуют реально, то можно построить еще пару необычных физических объектов. Возьмем тонкостенную уединенную металлическую сферу в вакууме радиусом от 5 до 10 см и сообщим ей отрицательный заряд, величина которого на четыре-пять порядков превышает наибольший заряд EV.

После того, как образовались микронные "атмосферы" зарядов, мысленно удалим сферу. Под действием удерживающих сил "атмосферы" сойдутся, заряды немного перераспределятся и возникнет ЗК, обладающий энергией, лежащей в диапазоне от 10 до 230 кДЖ. Какими свойствами обладает такое скопление? Объект будет легче пылинки (не тяжелее чем  $10^{-14}$  кг). При помещении его в атмосферу он может свободно плавать, перемещаясь вместе с потоками воздуха, и действовать на окружающие его металлические предметы, как заряженное тело. Внутренняя и внешняя границы будут сохранять его целостность, проявляя свои металлические свойства.

После возникновения объекта, движущиеся в нем электроны начнут излучать электромагнитные волны в широком частотном диапазоне, вы

зывая его свечение для внешнего наблюдателя и нагревая прилегающие к объекту участки атмосферы. Необратимые потери энергии из-за контакта с атмосферой гарантируют его распад, который в одних случаях сопровождается излучением с последующим бесшумным исчезновением, а в других, при достижении критического значения концентрации из-за потери зарядов, – взрывом.

Объекты с похожими свойствами часто возникают во время грозы и в экспериментах, моделирующих условия прохождения больших токов в газовой атмосфере.

Второй физический объект можно построить на основе первого, заменив в нем электроны на нейтроны и увеличив радиус сферы до 5 км, а концентрацию нейтронов – до ядерной. В этом случае силы расталкивания заменятся на силы притяжения между частицами. Может показаться, что нейтроны “упадут” в центр сферы или, в крайнем случае, “слипнутся” в тонкий слой за счет изотропии направлений действия гравитационных сил.

На самом деле ни того, ни другого не произойдет. Смена знака сил приводит только к тому, что концентрация частиц в гравитационном кластере (ГК) будет уменьшаться во внешней “атмосфере” наружу, а во внутренней – внутрь. При определенных условиях, так же как и у “атмосферы” зарядов, возможно появление полости внутри вещества. В этом случае на внешней и внутренней границах концентрация частиц будет плавно убывать. Такой объект может представлять интерес для исследования распределения вещества в “холодных” нейтронных звездах.

При высоких температурах вещества либо когда радиусы сфер, разделяющих внешнюю и внутреннюю “атмосферы”, будут малы по сравнению с толщиной внутренней “атмосферы”, внутренняя полость в ГК исчезает.

Заметим, что возможно веское возражение, которое способно превратить построенные модели в умозраительные картинки: предложенные распределения вещества для зарядов и гравитирующих частиц во внутренних “атмосферах” не могут быть осуществлены, поскольку поля, создаваемые ими, не удовлетворяют известной теореме Гаусса.

Корректный ответ на приводимое возражение удалось найти на пути последовательного обобщения и развития теории коллективного взаимодействия вещества с создаваемым им макроскопическим самосогласованным полем. Полученные в проведенном исследовании результаты показали ограниченность применимости теоремы Гаусса при расчете потоков статических самосогласованных полей.

Как видно из названия монографии, в ней обосновываются и исследуются физические механизмы удержания неоднородного равновесного и неравновесного веществ самосогласованным полем (гравитирующие частицы удерживаются в ограниченной области пространства создаваемым коллективно полем гравитации, а одноименные заряды – создаваемым коллективно электрическим полем). Знание этих механизмов позволяет:

- объяснить природу объемных сил, удерживающих такие распределения вещества в гравитационных кластерах, плотность которых может не только увеличиваться от центра к поверхности, но и иметь внутри себя области, в которых она обращается в нуль;
- прояснить природу объемных сил, удерживающих избыточные одноименные заряды у поверхности любых тел с определенной геометрией в экспериментальном парадоксе электростатики;
- обнаружить и объяснить упругие механические свойства самосогласованных систем с термодиффузией, толщина слоя которых чувствительна к изменению градиента температуры;
- выяснить, каким образом удерживаются одноименные заряды в экспериментах Шоулдерса и почему концентрация электронов на границе зарядового кластера может превышать их среднюю концентрацию в твердом теле;
- предложить альтернативную модель “каркаса” шаровой молнии, в основу которой, как показывают оценки, могут быть положены представления о шаровой молнии как о плотном скоплении одноименных зарядов, временно удерживаемых в ограниченной области пространства самосогласованным полем;
- рассчитать параметры зарядового кластера и обосновать его наблюдаемые физические свойства в экспериментах неупругого взаимодействия с плоской поверхностью металла.

В дальнейшем под веществом будут пониматься системы, состоящие из гравитирующих частиц либо из одноименных зарядов.

Предлагаемая монография состоит из трех частей. Часть 1 включает в себя две главы. В первой главе изложен обзор известных методов самосогласования поля и вещества. Обсуждены адекватность моделей, их область применимости, достоинства и недостатки. Во второй главе на основе трехмерного обобщения известных методов построена теория гидростатики вещества, погруженного в самосогласованное поле. Она позволяет выявить фундаментальные законы сохранения полного давления, следующую из них объемную плотность сил полевого происхождения, гамльтонианы взаимодействия поля и вещества.

Часть 2 посвящена анализу результатов взаимодействия вещества с плоским самосогласованным полем, и включает в себя четыре главы. В главе 1 исследованы статические равновесия бесстолкновительных гамильтоновых систем, содержащих вещество. В главе 2 объяснены свойства гамильтоновых систем, находящихся в состоянии политропического равновесия. В главе 3 найдены законы распределения полей и вещества в гамильтоновых системах с однородной температурой. В главе 4 выяснено влияние термодиффузионных полей на статическое равновесие гамильтоновых систем, находящихся в политропических состояниях.

Часть 3 посвящена анализу результатов взаимодействия вещества с самосогласованным полем сферической симметрии. Она включает в себя одну главу, в которой исследованы свойства статического равновесия вещества с однородной температурой. Получены законы распределения полей и вещества в шаровых кластерах гравитирующих частиц. Показана возможность существования кластера с полостью. Получены законы распределения зарядов в шаровом кластере. Рассчитан результат неупругого взаимодействия шарового кластера с плоской поверхностью металла. Полученные распределения поверхностной плотности осевшего заряда сопоставлены с результатами эксперимента.

Автор выражает свою признательность коллегам, оппонентам и рецензентам, советы и замечания которых были учтены при работе над монографией и, несомненно, обогатили ее. Автор и впредь будет благодарен всем, кто выскажет замечания, пожелания и предложения по дальнейшему совершенствованию рукописи, которые можно направить по адресам электронной почты:

*sapogin@mail.ru или sapogin@at.infotecstt.ru*

## ЧАСТЬ 1. МЕТОД САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ

### ГЛАВА 1. МЕТОДЫ САМОСОГЛАСОВАНИЯ ПОЛЯ И ВЕЩЕСТВА (обзор)

Общий метод построения самосогласованных равновесий, в котором учитывается взаимодействие движущихся заряженных частиц между собой, был впервые предложен Власовым в [4].

Существует альтернативный универсальный способ расчета статических самосогласованных полей, создаваемых веществом. Для систем взаимодействующих между собой гравитирующих частиц он обсуждался многими исследователями еще в конце прошлого века при решении задач политропического и изотермического равновесия вещества в газовых шарах. Полученные ими результаты были дополнены Эмденом [5], развиты Фаулером [6] и включены в книгу [7] Чандрасекаром задолго до появления термина “коллективное взаимодействие”, введенного Власовым.

Намного позже в СССР, независимо от этих исследователей, Френкель вводит для систем, находящихся в изотермическом равновесии, аналогичный способ расчета самосогласованных полей гравитирующих частиц и обобщает его на взаимодействующие между собой одноименные заряды [8]. Сделанные в [8] преждевременные выводы о том, что уравнение, полученное для гравитирующих частиц, приводит к результатам, лишенным физического смысла, а уравнение, полученное для зарядов, описывает электроны, находящиеся в равновесии вблизи поверхности раскаленных металлических тел, не позволили реализовать уникальные возможности предложенного способа расчета, а идея не получила достойного развития.

В главе 1 представлен обзор наиболее интересных, на наш взгляд, работ, имеющих важное значение для формирования основ физики удержания вещества самосогласованным полем.

#### § 1. Распределение гравитирующих частиц, находящихся в равновесии в газовых шарах

**Уравнение гравитационного равновесия.** Предлагаемый раздел изложим выборочно следуя монографии [7], наиболее доступной в нашей стране. Допустим, что *скопление гравитирующих частиц (далее звезда) находится в установившемся состоянии гравитационного равновесия\**. При этом

---

\* Далее везде курсив мой (В.С.).

ее распределение плотности таково, что *средняя плотность*  $\rho(r)$  внутри сферы радиусом  $r$ , мысленно выделяемой из общей массы звезды, *не увеличивается от центра к поверхности*. Эти два предположения позволяют определить порядок величин наиболее важных физических переменных, описывающих строение звезды.

Уравнение гравитационного равновесия получим только для сферически симметричного распределения материи.

Пусть  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор, отложенный от центра конфигурации. Для сферически симметричного распределения материи полное давление  $P$ , плотность  $\rho$  и другие физические переменные будут функциями только одного  $r$ .

Пусть  $M(r)$  – масса вещества звезды, заключенная внутри сферы радиусом  $r$ . Тогда

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr; \quad dM(r) = 4\pi r^2 \rho dr. \quad (1.1)$$

Будем обозначать через  $\bar{\rho}(r)$  среднюю плотность внутри этой сферы радиусом  $r$ , а через  $\bar{\rho}$  – среднюю плотность всей конфигурации:

$$\bar{\rho}(r) = \frac{M(r)}{\frac{4}{3}\pi r^3}; \quad \bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}, \quad (1.2)$$

где  $M$  – масса конфигурации, а  $R$  – радиус конфигурации, на котором  $\rho$  и  $P$  обращаются в нуль.

Рассмотрим бесконечно малый цилиндр на расстоянии  $r$  от центра с высотой  $dr$  и поперечным сечением, расположенным перпендикулярно к  $r$  (рис. 1.1). Пусть  $P$  – давление в точке  $r$  и пусть  $dP$  – изменение давления  $P$  при переходе от  $r$  к  $r+dr$ . Разность давлений  $dP$  представляет собой силу  $-dP$ , действующую на рассматриваемый элемент массы в направлении увеличения  $r$ . Этой силе противодействует сила притяжения, которую испытывает элемент массы. Масса бесконечно малого цилиндра равна  $\rho dr$ .

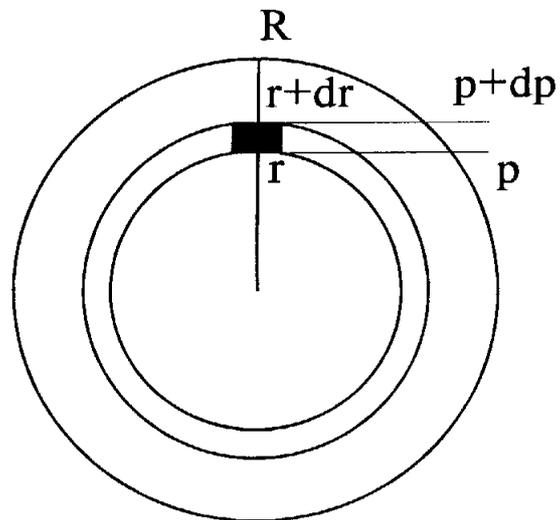


Рис. 1.1

Сила притяжения между  $M(r)$  и  $\rho dr$ , согласно теории потенциала, такая же, как между массой  $M(r)$ , собранной в центре конфигурации, и массой  $\rho dr$ , расположенной в точке  $r$ . По закону Ньютона эта сила притяжения равна  $GM(r)\rho dr/r^2$ , где  $G$  – гравитационная постоянная. Притяжение, вызванное материей, расположенной вне сферы радиуса  $r$ , равно нулю. Поэтому для соблюдения равновесия должно быть

$$-dP = \frac{GM(r)\rho dr}{r^2}, \quad (1.3)$$

или

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho. \quad (1.4)$$

Здесь  $P$  обозначает полное давление. Если рассматривать газовую звезду, то  $P$  есть сумма давления газа и давления излучения:

$$P = \frac{k}{\mu H} \rho T + \frac{1}{3} a T^4, \quad (1.5)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана,  $\mu$  – средний молекулярный вес,  $H$  – масса протона,  $a$  – постоянная Стефана-Больцмана. В уравнении (1.5) вместо газовой постоянной  $R$  использовано отношение  $\frac{k}{\mu H}$ . Окончательно из (1.4)

и (1.1) следует уравнение гравитационного равновесия звезды

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho} \cdot \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G\rho. \quad (1.6)$$

Ниже исследуется класс равновесных конфигураций для определенного вида соотношений между  $P$  и  $\rho$ , а именно

$$P = K\rho^{\frac{n+1}{n}}, \quad (1.7)$$

где  $K$  и  $n$  – некоторые постоянные. Эта проблема, в решение которой фундаментальный вклад был сделан Лэном, Риттером, Кельвином, Эмденом и Фаулером (см. список литературы в [7]), представляет значительный интерес с точки зрения физики.

**Политропическое равновесие.** Рассмотрим физические условия, которые приводят к появлению равновесных конфигураций, характеризующихся уравнением состояния (1.7).

Физическое понятие конвективного равновесия было впервые введено Кельвиным в 1862 году в связи с его исследованиями, относящимися к температуре земной атмосферы. Он поясняет, что «сущность конвективного равновесия состоит в том, что если малый сферический или кубический объем среды, находящийся в некотором положении  $P$  и заклю

ченный в непроницаемую для тела оболочку, расширяется или сжимается, достигая плотности среды в некотором другом месте  $P'$ , то его температура изменится от температуры, которую он имел в  $P$ , до температуры среды в точке  $P'$ ».

В современных трактовках работ Кельвина такие изменения рассматриваются как представляемые уравнением  $dQ = cdT$ , где теплоемкость  $c$  принимается приблизительно постоянной. Если во время процесса перемешивания прибавляющееся количество тепла  $dQ$  пропорционально мгновенному изменению температуры  $dT$ , то  $dQ = cdT$ . Но записанное в таком виде соотношение определяет более общие политропические изменения, введенные позже Эмденом [5]. Основные уравнения политропических изменений имеют вид

$$PV^{\gamma'} = const; P^{1-\gamma'} T^{\gamma'} = const; TV^{\gamma'-1} = const, \quad (1.8)$$

где  $\gamma'$  – показатель политропии, определяемый соотношением

$$\gamma' = \frac{c_p - c}{c_v - c}. \quad (1.9)$$

В (1.9)  $c$  – удельная теплоемкость политропического процесса;  $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении;  $c_v$  – удельная теплоемкость при постоянном объеме.

В плоскости  $(P, V)$  принадлежащие показателю  $\gamma'$  политропы образуют однопараметрическую совокупность кривых, причем параметром является постоянная, встречающаяся в первом соотношении (1.8). Это семейство кривых может быть классифицировано закреплением за каждой точкой числа, названного Эмденом политропической температурой. Она определяется как температура в том месте данной политропы, где удельный объем  $V$  (и, следовательно, плотность) имеет значение, равное единице. Мы будем употреблять символ  $\theta_{\gamma'}$  для обозначения политропической температуры. Тогда

$$TV^{\gamma'-1} = \theta_{\gamma'} \cdot 1 = \theta_{\gamma'}. \quad (1.10)$$

Так как изотерма есть политропа с бесконечной теплоемкостью, то  $\gamma' = 1$  и мы имеем

$$T = \theta_{\infty}, \quad (1.11)$$

то есть политропические температуры для изотерм совпадают с их действительными температурами.

При помощи политропических температур можно дать более удобный способ представления физических переменных. Запишем плотность в виде

$$\rho = \lambda \theta^n; n = \frac{1}{\gamma' - 1}, \quad (1.12)$$

где  $\lambda$  – есть некоторый постоянный множитель, который введен для задания масштаба шкалы плотностей. Величина  $n$  называется «индексом политропии».

Так как плотность  $\rho$  есть величина, обратная удельному объему, то из (1.10) получаем

$$T = \theta_{\gamma'} \rho^{\gamma'-1} = \theta_{\gamma'} \rho^{\frac{1}{n}} = \lambda^{\frac{1}{n}} \theta_{\gamma'} \theta. \quad (1.13)$$

Если в (1.13) выбрать множитель  $\lambda$  равным единице, то видно, что  $\theta$  есть температура в той шкале, в которой политропическая температура равна единице. Далее

$$P = R\rho T = R\lambda^{\frac{n+1}{n}} \theta_{\gamma'} \theta^{n+1}. \quad (1.14)$$

Если рассмотреть политропу с нулевой удельной теплоемкостью, то в этом частном случае получим адиабату. Тогда  $\gamma' = \gamma$  и из (1.14) следуют определения адиабатической температуры и адиабатического индекса.

Поскольку при анализе статического равновесия звезды лучевое давление не рассматривается, то

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}; K = \frac{k}{\mu H} \theta_{\gamma'} = R\theta_{\gamma'}. \quad (1.15)$$

Таким образом, можно рассматривать математическую проблему определения строения равновесной конфигурации, в которой  $P$  и  $\rho$  связаны уравнением (1.7). Ниже исследуются равновесные конфигурации, в которых соотношение (1.7) выполняется во всех точках.

Подставляя (1.15) в (1.6), найдем

$$\left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \lambda^{\frac{1}{n}-1} \right] \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = -\theta^n. \quad (1.16)$$

Введем безразмерную переменную  $\xi$ , определяемую формулой

$$r = \alpha \xi, \quad \alpha = \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \lambda^{\frac{1}{n}-1} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.17)$$

Уравнение (1.16) примет вид

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n. \quad (1.18)$$

Уравнение (1.18) называют уравнением Лэна–Эмдена показателя  $n$ . Оно определяет распределение плотности вещества звезды в некоторой области, в которой соблюдаются соотношения (1.12) и (1.15).

Для полных политроп (равновесные конфигурации, для которых тождество (1.7) выполнено во всех их точках) можно выбрать  $\lambda$  равным центральной плотности  $\rho_c$ .

Тогда нужно искать такое решение уравнения (1.18), которое принимает значение, равное единице в начале координат. Из требования того, что средняя плотность не должна увеличиваться от центра к поверхности, в центре производная  $\frac{d\theta}{d\xi}$  должна обращаться в нуль. Совокупность этих требований приводит к граничным условиям

$$\theta = 1; \quad \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0. \quad (1.19)$$

Решения уравнения (1.18), удовлетворяющие условиям (1.19), будем называть функцией Лэна–Эмдена показателя  $n$  и обозначать через  $\theta_n$ . Проблема свелась к нахождению решений  $\theta_n$  для различных значений  $n$ .

**Частные случаи решения уравнения Лэна–Эмдена.** Известно, что уравнение (1.18) имеет решения в элементарных функциях для трех индексов политропии:  $n=0$ , 1 и 5.

При  $n=0$  уравнение Лэна–Эмдена имеет вид

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -1. \quad (1.20)$$

Первое интегрирование приводит к результату

$$\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{1}{3} \xi^3 - C, \quad (1.21)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования. Второе интегрирование дает

$$\theta = D + \frac{C}{\xi} - \frac{1}{6} \xi^2, \quad (1.22)$$

где  $D$  – вторая постоянная интегрирования.

Видно, что общее решение (1.22) имеет особую точку в начале координат и что

$$\theta \sim \frac{C}{\xi} \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow 0.$$

Выбирая из общего решения решение, конечное в начале координат, примем  $C=0$  и

$$\theta = D - \frac{1}{6} \xi^2. \quad (1.23)$$

Функция Лэна–Эмдена характеризуется тем, что  $\theta = 1$  в начале координат и, следовательно,

$$\theta_0 = 1 - \frac{1}{6} \xi^2. \quad (1.24)$$

Функция  $\theta_0$  имеет первый нуль в точке  $\xi_1 = \sqrt{6}$ .

При  $n=1$  уравнение (1.18) имеет вид

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta. \quad (1.25)$$

Переходя к новой функции

$$\theta = \frac{\chi}{\xi}, \quad (1.26)$$

приведем (1.25) к виду

$$\frac{d^2 \chi}{d\xi^2} = -\chi. \quad (1.27)$$

Общее решение этого уравнения может быть представлено функцией

$$\chi = C \sin(\xi - \delta), \quad (1.28)$$

где  $C$  и  $\delta$  – постоянные интегрирования. Переходя к функции  $\theta$ , получим

$$\theta = \frac{C \sin(\xi - \delta)}{\xi}. \quad (1.29)$$

Если  $\delta \neq 0$ , то общее решение имеет особую точку в начале координат

$$\theta \sim \frac{const}{\xi} \text{ при } \xi \rightarrow 0.$$

Ограничиваясь решением, конечным в начале координат, приравняем  $\delta$  к нулю. Тогда

$$\theta = C \frac{\sin \xi}{\xi}. \quad (1.30)$$

Форма решения (1.30) впервые была дана Риттером. Функция Лэна–Эмдена в этом случае имеет вид

$$\theta_1 = \frac{\sin \xi}{\xi}. \quad (1.31)$$

Функция  $\theta_1$  имеет первый нуль при  $\xi_1 = \pi$  и монотонно уменьшается в интервале  $(0, \pi)$ .

При  $n=5$  уравнение (1.18) имеет вид

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^5. \quad (1.32)$$

Переходя к функции  $z$  от переменной  $t$ :

$$\xi = \frac{1}{x} = e^{-t}; \quad \theta = \left( \frac{x}{2} \right)^{1/2} z = \left( \frac{1}{2} e^t \right)^{1/2} z, \quad (1.33)$$

приведем (1.32) к виду

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{z}{4} (1 - z^4). \quad (1.34)$$

Умножая обе части (1.34) на  $\frac{dz}{dt}$ , получим уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{4} z (1 - z^4) \frac{dz}{dt}, \quad (1.35)$$

результат интегрирования которого имеет вид

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{1}{8} z^2 - \frac{1}{24} z^6 + D, \quad (1.36)$$

где  $D$  – постоянная интегрирования. Следующее интегрирование можно осуществить в элементарных функциях только для  $D=0$ :

$$\frac{dz}{z\sqrt{1 - z^4 / 3}} = -\frac{1}{2} dt, \quad (1.37)$$

где знак выбран таким образом, чтобы  $t \rightarrow \infty$ . Выполняя подстановку

$$z^4 / 3 = \sin^2 \zeta, \quad (1.38)$$

для которой

$$4 \frac{dz}{z} = 2ctg\zeta d\zeta, \quad (1.39)$$

приведем (1.37) к виду

$$\cos ec\zeta d\zeta = -dt. \quad (1.40)$$

Уравнение (1.40) может быть проинтегрировано. Результат интегрирования

$$tg \frac{1}{2} \zeta = Ce^{-t}, \quad (1.41)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования.

Тогда из (1.38) получим

$$\frac{1}{3} z^4 = \frac{4tg^2(\zeta / 2)}{[1 + tg^2(\zeta / 2)]^2} \quad (1.42)$$

или из (1.41)

$$z = \pm \left[ \frac{12C^2 e^{-2t}}{(1 + C^2 e^{-2t})^2} \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (1.43)$$

Используя (1.33), имеем

$$\theta = \left[ \frac{3C^2}{(1 + C^2 \xi^2)^2} \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (1.44)$$

Функция Лэна–Эмдена  $\theta_5$  выражается соотношением

$$\theta_5 = (1 + \xi^2 / 3)^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.45)$$

Видно, что  $\theta_5$  – убывающая функция, и она стремится к нулю только тогда, когда  $\xi \rightarrow \infty$ . Это означает, что соответствующая равновесная конфигурация имеет бесконечный радиус.

Для других значений индексов политропии уравнение Лэна–Эмдена решается только численными методами.

Построим физические характеристики рассмотренных систем. Радиус звезды задается выражением

$$R = \alpha \xi_1 = \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1-n}{2n}} \xi_1, \quad (1.46)$$

где  $\xi_1$  определяется как первый нуль функции  $\theta_n$ . Значение  $n=1$  – критическое. Если  $n=1$ , то  $\xi_1 = \pi$  и радиус

$$R = \left[ \frac{K}{2\pi G} \right]^{\frac{1}{2}} \pi. \quad (1.47)$$

Следовательно, радиус звезды, находящейся в состоянии поли-тропы индекса 1, зависит только от  $K$  и не зависит от центральной плотности  $\lambda$ . Зависимость радиуса звезды от ее политропической температуры дается в (1.15).

Для  $n=5$ ,  $R \rightarrow \infty$  для всех конечных значений  $\lambda$ .

Масса  $M(\xi)$ , содержащаяся внутри сферы радиусом  $\xi$ , дается выражением

$$M(\xi) = \int_0^{\alpha\xi} 4\pi r r^2 dr = 4\pi \alpha^3 \lambda \int_0^{\xi} \xi^2 \theta^n d\xi, \quad (1.48)$$

или, учитывая (1.18), получим

$$M(\xi) = -4\pi\alpha^3\lambda\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}. \quad (1.49)$$

Подставляя (1.17) в (1.49), получаем

$$M(\xi) = -4\pi \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{\frac{3}{2}} \lambda^{\frac{3-n}{2n}} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right). \quad (1.50)$$

Полная масса всей конфигурации  $M$  дается выражением

$$M = -4\pi \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{\frac{3}{2}} \lambda^{\frac{3-n}{2n}} \left( \xi^2 \frac{d\theta_n}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1}. \quad (1.51)$$

Из (1.51) видно, что случай  $n=3$  также критический. Когда  $n=3$ ,

$$M = -4\pi \left[ \frac{K}{\pi G} \right]^{\frac{3}{2}} \left( \xi^2 \frac{d\theta_3}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1}. \quad (1.52)$$

Из (1.52) следует, что масса звезды, находящейся в политропическом состоянии с индексом 3, зависит только от ее политропной температуры.

Заметим, что при  $n=5$  масса конечна, хотя радиус конфигурации равен бесконечности. Это следует из (1.45), поскольку

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \left( -\xi^2 \frac{d\theta_5}{d\xi} \right) = \sqrt{3}. \quad (1.53)$$

Соотношение между массой конфигурации и ее радиусом можно получить, исключая  $\lambda$  из (1.46) и (1.51):

$$GM^{\frac{n-1}{n}} R^{\frac{3-n}{n}} = \frac{(n+1)K}{(4\pi)^{\frac{1}{n}}} \left[ -\xi^{\frac{n+1}{n-1}} \frac{d\theta_n}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_1}^{\frac{n-1}{n}}. \quad (1.54)$$

Обозначая выражение в квадратных скобках через  $\beta$ , (1.54) можно переписать в виде

$$K = N_n GM^{\frac{n-1}{n}} R^{\frac{3-n}{n}}, \quad (1.55)$$

где

$$N_n = \frac{1}{n+1} \left( \frac{4\pi}{\beta^{n-1}} \right)^{1/n}.$$

Вычисляя значения  $N_n$ , можно использовать (1.55) для оценки политропной температуры конфигурации с данной массой  $M$  и радиусом  $R$  с индексом политропы  $n$ .

Получим отношение средней плотности вещества к центральной. С учетом (1.2) для средней плотности материи внутри сферы с радиусом  $r = \alpha\xi$  имеем отношение

$$\bar{\rho}(\xi) = \frac{M(\xi)}{\frac{4}{3}\pi\alpha^3\xi^3} = -\frac{3}{\xi}\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)\lambda. \quad (1.56)$$

Связь центральной плотности со средней дается выражением

$$\rho_c = \lambda = -\left[\frac{\xi}{3}\frac{1}{\frac{d\theta_n}{d\xi}}\right]_{\xi=\xi_1} \bar{\rho}. \quad (1.57)$$

Соотношение (1.57) показывает, что для политропы с заданным индексом  $n$  центральная плотность есть определенная кратная величина по отношению к средней плотности. Расчеты показывают, что сравнительно малое изменение  $n$  (в пределах  $0 \leq n \leq 5$ ) приводит к весьма разнообразным законам распределения плотностей, включая два предельных случая - однородного распределения плотности (при  $n=0$ ) и бесконечно большой концентрации массы в центре (при  $n=5$ ).

Центральное давление можно вычислить из (1.15):

$$P_c = K\lambda^{\frac{n+1}{n}}.$$

Подставляя в полученное равенство значения  $K$  и  $\lambda$  из (1.55) и (1.57), получим

$$P_c = W_n GM^2 / R^4, \quad (1.58)$$

где

$$W_n = \left\{ 4\pi(n+1) \left[ \left( \frac{d\theta_n}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1} \right]^2 \right\}^{-1}.$$

Расчеты показывают, что с увеличением  $n$  значения центрального давления монотонно возрастают.

**Гравитационные равновесия с постоянной температурой и уравнение Эмдена.** Рассмотрим изотермические газовые шары, находящиеся в гравитационном равновесии. Линейную зависимость давления от плотности представим в виде

$$P = K\rho + D, \quad (1.59)$$

где

$$K = \frac{kT}{\mu H}; D = \frac{aT^4}{3}. \quad (1.60)$$

Тогда уравнение гравитационного равновесия звезды (1.6) может быть записано в виде

$$\frac{K}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -4\pi G \rho. \quad (1.61)$$

Выполняя подстановку

$$\rho = \lambda e^{-\Psi}; r = \left[ \frac{K}{4\pi G \lambda} \right]^{1/2} \xi = \alpha \xi, \quad (1.62)$$

где  $\lambda$  – произвольная постоянная, приводим (1.61) к виду

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\Psi}{d\xi} \right) = e^{-\Psi}. \quad (1.63)$$

Уравнение (1.63) получено Эмденом [5] и носит его имя. Оно описывает распределение плотности в любой области звезды, в которой имеет место соотношение вида (1.59). Если выбрать граничные условия

$$\Psi = 0; \frac{d\Psi}{d\xi} = 0 \text{ при } \xi = 0, \quad (1.64)$$

то постоянная  $\lambda$  будет играть роль центральной плотности. Как известно, проинтегрировать уравнение (1.63) в явном виде не представляется возможным. В связи с этим для его решения обычно прибегают к численным методам.

Интегрирование при помощи степенных рядов приводит к результату

$$\Psi = \frac{1}{6} \xi^2 - \frac{1}{120} \xi^4 + \frac{1}{1890} \xi^6 + \dots, \quad (1.65)$$

справедливому для значений  $\xi < 1$ .

Известны преобразования изотермического уравнения.

Положим

$$\Psi = \frac{\chi}{\xi}. \quad (1.66)$$

Тогда уравнение (1.63) принимает вид

$$\frac{d^2 \chi}{d\xi^2} = \xi e^{-\chi/\xi}. \quad (1.67)$$

Если перейти к переменной  $x = \frac{1}{\xi}$ , то (1.63) принимает другой вид

$$x^4 \frac{d^2 \Psi}{dx^2} = e^{-\Psi}. \quad (1.68)$$

Можно показать, что уравнению (1.68) удовлетворяет следующее особое решение:

$$e^{-\Psi_s} = 2x^2; d\Psi_s / dx = -2 / x. \quad (1.69)$$

**Изоклины уравнения Эмдена.** Существует преобразование Эмдена, связанное с особым решением (1.69). Он вводит переменную  $z$ , определенную равенством

$$-\Psi = 2 \ln x + z. \quad (1.70)$$

Дифференцируя (1.70), находим

$$\frac{d\Psi}{dx} = -\frac{2}{x} - \frac{dz}{dx}; \frac{d^2\Psi}{dx^2} = \frac{2}{x^2} - \frac{d^2z}{dx^2}. \quad (1.71)$$

Тогда (1.68) принимает вид

$$x^2 \frac{d^2z}{dx^2} + e^z - 2 = 0. \quad (1.72)$$

Исключая  $x$  из уравнения, положим

$$x = 1 / \xi = e^t. \quad (1.73)$$

Тогда

$$\frac{dz}{dx} = e^{-t} \frac{dz}{dt}; \frac{d^2z}{dx^2} = e^{-2t} \left( \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} \right), \quad (1.74)$$

после чего (1.72) приводится к виду

$$\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} + e^z - 2 = 0, \quad (1.75)$$

который допускает понижение порядка дифференциального уравнения. Вводя новую функцию  $y = dz / dt$ , получим

$$yy' - y + e^z - 2 = 0, \quad (1.76)$$

где  $y' = dy / dz$ . Как показано Эмденом [5], уравнение (1.76) имеет особую точку  $(0, \ln 2)$ . Других особых точек в конечной части плоскости  $(y, z)$  не существует. Все решения (1.76) на плоскости  $(y, z)$  проходят через особую точку, приближаясь к ней по спирали (рис. 1.2). Это обстоятельство позволяет получить закон распределения плотности вещества в окрестности особой точки. Он имеет вид

$$\rho = \frac{2\lambda}{\xi^2} \left[ 1 + \frac{A}{\sqrt{\xi}} \cos \left( \frac{\sqrt{7}}{2} \ln \xi - \delta \right) \right], \quad (1.77)$$

где  $A$  и  $\delta$  – произвольные постоянные.

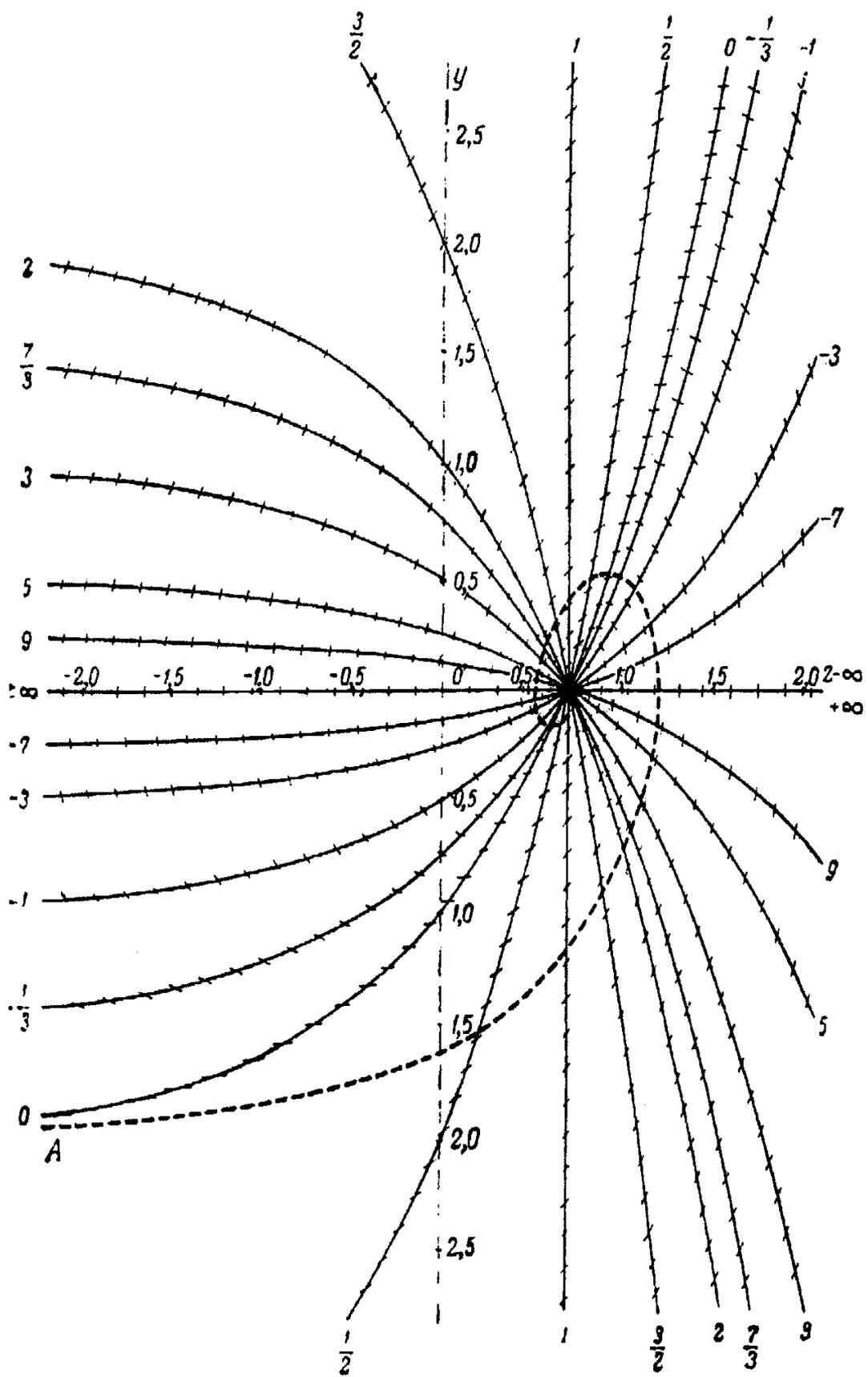


Рис. 1.2

Из (1.77) следует, что при  $\xi \rightarrow \infty$  распределение плотности асимптотически приближается к тому, которое соответствует особому решению, а именно

$$\rho_s = \frac{2\lambda}{\xi^2}. \quad (1.78)$$

Решение (1.77) пересекает особое решение (1.78) в точках, расстояние между которыми асимптотически возрастает в геометрической прогрессии, имеющей знаменатель

$$1: e^{\frac{2\pi}{\sqrt{7}}} = 1:10,749\dots \quad (1.79)$$

Закон распределения плотности (1.77) при  $\xi \rightarrow \infty$  имеет общий характер и будет справедлив, в частности, также и для  $E$ -решения.  $E$ -решением Эмден называет решение, которое характеризуется следующими свойствами:  $\Psi_E$  - конечно,  $\Psi'_E=0$ , когда  $\xi \rightarrow 0$ . Линия  $y = -2$  является асимптотой  $E$ -решения при  $z \rightarrow -\infty$ ,  $t \rightarrow +\infty$  (см. рис. 1.2).

О поведении  $E$ -решения можно сказать следующее. Когда  $t$  уменьшается, пунктирная кривая  $E$ -решения (см. рис. 1.2) монотонно возрастает и в определенной точке пересекает ось  $y$ . В этой точке  $\Psi = 2 \ln \xi$  или  $\rho = \lambda / \xi^2$ , что равно половине значения  $\rho$  на особом решении.

При дальнейшем уменьшении  $t$  решение приближается к особой точке по спирали. После каждого оборота спирали  $z_1$  и  $y$  асимптотически уменьшаются в отношении

$$1: e^{\frac{2\pi}{\sqrt{7}}} = 0,09303\dots$$

Распределение плотностей при  $\xi \rightarrow \infty$  выражается законом, подобным (1.77).

Все остальные решения (отличные от решения  $E$ ) приходят из бесконечности  $y \rightarrow -\infty$  и снова спиралью обходят вокруг особой точки, когда  $t \rightarrow \infty$ . Поведение этих решений при  $z \rightarrow -\infty$  можно установить, применив теорему Харди к уравнению (1.76). Мы можем иметь, согласно этой теореме, одну из следующих ситуаций:

$$\frac{dy}{dz} \rightarrow 0; \quad \frac{dy}{dz} \rightarrow \infty; \quad \frac{dy}{dz} \rightarrow 1 \text{ при } z \rightarrow -\infty.$$

Первый случай соответствует  $E$ -кривой. Очевидно, что второй случай невозможен. Следовательно, остается только третий случай. Если реализуются решения, у которых  $\frac{dy}{dz} \rightarrow 1$  при  $z \rightarrow -\infty$ , то

$$y \sim z + C_1, \quad (1.80)$$

где  $C_1$  – постоянная величина. С учетом (1.73) получаем

$$\Psi = 2 \ln \xi + C / \xi - C_1 \text{ при } \xi \rightarrow 0.$$

Соответствующий закон распределения плотностей имеет вид

$$\rho = Ae^{-C/\xi} / \xi^2 \text{ при } C > 0, \xi \rightarrow 0, \quad (1.81)$$

где  $A$  и  $C$  – постоянные. Из (1.81) следует, что вдоль всех решений изотермического уравнения, исключая Е-решение и особое решение, плотность  $\rho \rightarrow 0$ , когда  $\xi \rightarrow 0$ . Однако все решения имеют то же самое поведение на бесконечности. Они асимптотически приближаются к особому решению, испытывая колебания около него, и пересекаются с ним в точках, расстояния между которыми увеличиваются асимптотически в геометрической прогрессии со знаменателем  $e^{2\pi/\sqrt{7}}$ .

*Как будет показано ниже, изложенный подход явился первым шагом в построении универсального способа расчета статических макроскопических самосогласованных полей, создаваемых коллективно взаимодействующими между собой равновесными гравитирующими частицами.*

*Укажем на недостатки подхода. Математическое равенство объемных сил (1.4) не позволяет выявить физические причины равновесия элементарного объема вещества. Записывая его в векторной форме  $\rho \mathbf{g} = \text{grad}(p) = -\mathbf{f}$ , можно утверждать, что: 1) в рассматриваемых системах вектор  $\mathbf{g}$  всегда сонаправлен с градиентом давления частиц; 2) объемная сила  $\mathbf{f}$ , компенсирующая действие объемной силы  $\rho \mathbf{g}$ , равна и противоположна градиенту давления. В развиваемой ниже гидростатике гравитирующих частиц, удерживаемых самосогласованным полем, будет доказано, что объемная сила  $\mathbf{f}$  совпадает с градиентом давления самосогласованного поля по величине и направлению.*

*Требование, накладываемое на изменение плотности вещества (она не должна увеличиваться от центра к поверхности), ограничило анализ равновесий только конфигурациями, в которых направления векторов  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{r}$  противоположны. Получающиеся решения с другими направлениями векторов были отброшены как посторонние, поскольку поля, создаваемые ими, не удовлетворяли теореме Гаусса.*

## § 2. Поля термоэлектронов, находящихся в изотермическом равновесии, по Лауэ

В начале века было обнаружено явление, названное термоэлектронной эмиссией: испускание электронов нагретыми твердыми или жидкими телами. Явление было объяснено тем, что вследствие распределения электронов по энергиям имеется некоторое количество электронов, энергия которых достаточна для того, чтобы преодолеть потенциальный барьер, имеющийся на границе металла и вакуума. При повышении температуры тела количество таких электронов резко возрастает и делается вполне заметным.

**Уравнение равновесия термоэлектронов.** В то же время в работах Ричардсона, Шоттки и Лауэ [9-11] были сделаны первые попытки расчета равновесного распределения электронов, составляющих газ одноименных зарядов в приповерхностной области сильно нагретых металлических тел. Исследователи полагали, что уравнение, которое дает возможность найти искомые распределения (сейчас оно известно как уравнение Пуассона), имеет вид

$$\Delta\varphi = -\rho, \quad (2.1)$$

где  $\rho$  – объемная плотность электрического заряда, связанная с потенциалом  $\varphi$  уравнением Больцмана:

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-\frac{e\varphi}{kT}} \text{ при } \rho < 0, e < 0, \quad (2.2)$$

в котором  $e$  – заряд электрона,  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура, при которой рассматриваемый газ электронов находится в равновесном состоянии.

Наиболее полное и глубокое исследование проблемы термоэлектронов, на наш взгляд, принадлежит Лауэ [11]\*. Его работу мы положим в основу краткого изложения этого параграфа.

В работе исследуются решения дифференциального уравнения

$$\Delta\varphi = -\rho_0 e^{-\alpha\varphi} \quad (2.3)$$

для различной геометрии электродов в приложении к термоэлектронам. В (2.3) полагается  $\rho_0 < 0$ , и постоянная  $\alpha = e\varphi / kT < 0$ .

**Равновесие термоэлектронов у плоского электрода.** Плоская равновесная конфигурация термоэлектронов описывается уравнением, следующим из (2.3):

---

\* Перевод статьи Лауэ с немецкого выполнила П.А.Сивоконь.

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\rho_0 e^{-\alpha\varphi}. \quad (2.4)$$

Умножая (2.4) на  $\frac{d\varphi}{dx}$  и интегрируя результат, можно найти

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \frac{2\rho_0}{\alpha} e^{-\alpha\varphi} + A. \quad (2.5)$$

Далее следует различать три случая, смотря по тому, будет ли постоянная интегрирования  $A$  положительной, отрицательной или равной нулю.

Как будет показано в § 14, величина  $A$ , входящая в соотношение (2.5), является интегралом полного давления, а не произвольной постоянной. Это уточнение позволяет найти гамильтониан коллективного взаимодействия одноименных зарядов с плоским полем.

**Случай  $A > 0$ .** Обозначая  $A = K^2$  и вводя подстановку  $-\alpha\varphi = \ln v$ , приводим уравнение (2.5) к виду

$$-\int \frac{d(\alpha\varphi)}{\sqrt{e^{-\alpha\varphi} + C}}, \text{ где } C = \frac{\alpha K^2}{2\rho_0}, \quad (2.6)$$

а табличный интеграл

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{v+C}} = \frac{1}{\sqrt{C}} \ln \frac{\sqrt{v+C} - \sqrt{C}}{\sqrt{v+C} + \sqrt{C}} \quad (2.7)$$

дает распределение потенциала по длине системы

$$\varphi = \frac{1}{\alpha} \left\{ \ln \left[ \operatorname{sh}^2 \left( \frac{\alpha K(x - x_0)}{2} \right) \right] - \ln \frac{\alpha K^2}{2\rho_0} \right\}, \quad (2.8)$$

градиента потенциала

$$d\varphi / dx = K \operatorname{cth} \left( \frac{\alpha K(x - x_0)}{2} \right) \quad (2.9)$$

и плотности электронов

$$\rho = \frac{\alpha K^2}{2 \operatorname{sh}^2 \left( \frac{\alpha K(x - x_0)}{2} \right)}. \quad (2.10)$$

В соотношениях (2.8) – (2.10)  $x_0$  – произвольная постоянная. Из (2.8) – (2.10) видно, что при  $x = x_0$   $\varphi \rightarrow +\infty$ ,  $|\rho| \rightarrow \infty$ ,  $\frac{d\varphi}{dx} \rightarrow -\infty$ . При  $x \gg 1$  потенциал  $\varphi$  переходит в

$$K(x - x_0) - \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{2\alpha K^2}{\rho_0} \right), \quad (2.11)$$

градиент потенциала стремится к  $K$ , а плотность убывает по экспоненциальному закону

$$\rho = 2\alpha K^2 \exp[-\alpha K(x - x_0)]. \quad (2.12)$$

Полученные решения описывают равновесные состояния термоэлектронов у поверхности плоских нагретых тел в том случае, если они удерживаются полем положительных зарядов, остающихся в металле. Речь идет, по-видимому, о поле зарядов изображения, остающихся в металле. Термоэлектрод лежит вблизи  $x_0$  при заданных  $\alpha$  и  $K$ , и тем ближе, чем выше плотность  $\rho$  на нем.

**Случай  $A < 0$ .** Решение дается в работе [10]. Полагая  $A = -K^2$  и используя приведенную выше подстановку, придем к интегралу

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{v-C}} = \frac{2}{\sqrt{C}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{v-C}{C}}. \quad (2.13)$$

Интегрируя, получим распределение потенциала

$$\varphi = \frac{1}{\alpha} \left\{ \ln \left[ \sin^2 \left( \alpha K(x - x_0) / 2 \right) \right] - \ln \frac{\alpha K^2}{2\rho_0} \right\}, \quad (2.14)$$

градиента потенциала

$$\frac{d\varphi}{dx} = K \operatorname{ctg} \left[ \frac{1}{2} \alpha K(x - x_0) \right] \quad (2.15)$$

и распределение плотности заряда по длине системы

$$\rho = \frac{\alpha K^2}{2 \sin^2 \left[ \alpha K(x - x_0) / 2 \right]}. \quad (2.16)$$

Полученные распределения периодичны по  $x$ . Ими следует пользоваться для интервала  $x_0 < x < x'_0$ , где

$$x'_0 = x_0 - \frac{2\pi}{\alpha K}. \quad (2.17)$$

Плоскость  $x = (x'_0 - x_0) / 2 = -\frac{\pi}{\alpha K}$  является плоскостью симметрии. В ней все физические величины принимают минимальные значения:

$$\varphi_m = -\frac{1}{\alpha} \log \frac{\alpha K^2}{2\rho_0}; \quad \rho_m = \frac{\alpha K^2}{\rho_0}. \quad (2.18)$$

На границах системы  $x_0$  и  $x'_0$  значения  $\varphi$  и  $|\rho|$  положительно бесконечны. Лауэ считает, что решения (2.14) – (2.18) описывают равновесное распределение электронов, установившееся в пространстве между двумя плоскими термоэлектродами, находящимися на расстоянии  $x$  и  $x'_0$  систе

мы. При этом температуры обоих электродов предполагаются одинаковыми и совпадающими с температурой термоэлектронного газа.

**Случай  $A=0$ .** Интегрирование (2.5) здесь особенно просто. Распределение потенциала

$$\varphi = \frac{1}{\alpha} \left\{ \ln \left[ \alpha \rho_0 (x - x_0)^2 / 2 \right] \right\}, \quad (2.19)$$

градиента потенциала

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2}{\alpha(x - x_0)} \quad (2.20)$$

и плотности заряда по длине системы

$$\rho = \frac{2}{\alpha(x - x_0)^2}. \quad (2.21)$$

Решение впервые получено Ричардсоном [9]. Из (2.19) – (2.21) видно, что при  $x=x_0$  значения  $\varphi$  и  $\rho$  становятся бесконечными.

***Равновесие термоэлектронов в сферически симметричном случае.***

Сферически симметричная конфигурация термоэлектронов, потенциал которой зависит от  $r$ , описывается уравнением

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\rho_0 e^{-\alpha\varphi}. \quad (2.22)$$

Введение произвольной постоянной  $\beta$  с размерностью длины

$$\varphi = \Psi - \frac{4}{\alpha} \log(\beta S), \quad (2.23)$$

где  $S = \frac{1}{r}$ , приводит уравнение (2.23) к виду

$$\frac{d^2\Psi}{dS^2} + \frac{4}{\alpha S^2} = -\rho_0 \beta^4 e^{-\alpha\Psi}. \quad (2.24)$$

До тех пор, пока

$$\frac{4}{\alpha S^2} \ll |\rho_0| \beta^4 e^{-\alpha\Psi},$$

можно приближенно считать, что

$$\frac{d^2\Psi}{dS^2} \approx -\rho_0 \beta^4 e^{-\alpha\Psi}. \quad (2.25)$$

Это позволяет обобщить решения (2.8), (2.14) и (2.19) на сферическую симметрию. Случай  $A < 0$  приводит к соотношениям

$$\varphi = \frac{1}{\alpha} \left\{ \ln \frac{2\rho_0 r^4}{\alpha K^2} + \ln \left[ \sin^2 \left( \frac{\alpha K}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right) \right] \right\}; \quad (2.26)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{4}{\alpha r} - \frac{K}{r^2} \operatorname{ctg} \left[ \frac{\alpha K}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right]; \quad (2.27)$$

$$\rho = \frac{\alpha K^2}{2r^4 \sin^2 \left[ \frac{\alpha K}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right]}. \quad (2.28)$$

Постоянная  $\beta$  отсутствует в решении уравнения. Полученные соотношения справедливы в области значений  $r_0 \leq r \leq r'_0$ , где  $r_0$  и  $r'_0$  связаны между собой равенством

$$\frac{1}{r'_0} = \frac{1}{r_0} + \frac{2\pi}{\alpha K}.$$

На границах системы при  $r \rightarrow r_0$  и  $r \rightarrow r'_0$  имеем

$$\varphi = \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \frac{1}{2} \alpha \rho_0 r^2 \left( 1 - \frac{r}{r_0} \right)^2 \right]; \quad (2.29)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{2}{\alpha} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r - r_0} \right); \quad (2.30)$$

$$\rho = \frac{2}{\alpha r^2 \left( 1 - \frac{r}{r_0} \right)^2}; \quad (2.31)$$

$$\varphi = \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \frac{1}{2} \alpha \rho_0 r^2 \left( 1 - \frac{r}{r'_0} \right)^2 \right]; \quad (2.32)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{2}{\alpha} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'_0 - r} \right); \quad (2.33)$$

$$\rho = \frac{2}{\alpha r^2 \left( 1 - \frac{r}{r'_0} \right)^2}. \quad (2.34)$$

На значение  $r$ , которое лежит ближе к  $r_0$ , чем к  $r'_0$ , приходится минимум потенциала и плотности. Вводя характеристическую граничную плотность  $\rho_1$ , получим

$$r_0 = r_1 / \left( 1 + \frac{1}{r_1} \sqrt{\frac{2}{\alpha \rho_1}} \right) \quad \text{и} \quad \left| \frac{d\varphi}{dr} \right|_1 = \sqrt{\frac{2\rho_1}{\alpha} - \frac{4}{\alpha r_1}}. \quad (2.35)$$

Вводя характеристическую граничную плотность  $\rho_2$  для термоэлектрода, находящегося при  $r_2$ , близком к  $r_0$ , получим

$$\left| \frac{d\varphi}{dr} \right|_2 = \sqrt{\frac{2\rho_2}{\alpha} + \frac{4}{\alpha r_2}}. \quad (2.36)$$

Различие в законах говорит о том, что решение (2.35) пригодно для выпуклого, а (2.36) – для вогнутого электрода, ограничивающего термоэлектронное облако.

Далее Лауэ показывает, что для двух очень близко расположенных поверхностей уровня с расстоянием  $v$  между ними  $\Delta\varphi$  можно представить в виде

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \quad (2.37)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы главной кривизны поверхности уровня. Это позволяет дифференциальное уравнение (2.3) записать в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\rho_0 e^{-\alpha\varphi}. \quad (2.38)$$

Предполагая величину  $(R_1^{-1} + R_2^{-1})^2$  малой, упростим уравнение (2.38):

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \sqrt{\frac{2\rho_0}{\alpha}} e^{-\frac{\alpha\varphi}{2}} - \frac{2}{\alpha} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (2.39)$$

Интегрируя (2.39), получим

$$\varphi = \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \frac{\alpha\rho_0}{2} \left( \frac{1 - e^{-\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)v}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \right)^2 \right]. \quad (2.40)$$

В предельном случае, когда  $R_1^{-1} + R_2^{-1} \rightarrow 0$ , решение (2.40) переходит в решение (2.19). На малых расстояниях от электрода выполняется соотношение (сравним его с (2.35))

$$\left| \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right| = \sqrt{\frac{2\rho_1}{\alpha}} - \frac{2}{\alpha} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (2.41)$$

Из (2.41) следует, что мерой изменения напряженности поля у электрода является средняя кривизна  $R_1^{-1} + R_2^{-1}$  электрода. Из (2.40) видно также, что всегда существует поверхность, на которой потенциал имеет особенность вида  $2 \ln v / \alpha$ .

**Равновесие термоэлектронов у цилиндрического электрода.** Исследование решений для цилиндрической симметрии проводим преобразуя уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \rho_0 e^{-\alpha \varphi} \quad (2.42)$$

с помощью подстановки  $W = W(Z)$ , где  $W = U + iV$ ,  $Z = x + iy$ , в предположении, что

$$\Psi = \varphi - \frac{2}{\alpha} \ln \left| \frac{dZ}{dW} \right|. \quad (2.43)$$

После подстановки (2.42) преобразуется в уравнение

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial U^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial V^2} = \rho_0 e^{-\alpha \Psi}. \quad (2.44)$$

Простое вычисление показывает, что функция

$$\Psi = \frac{1}{\alpha} \left\{ \ln(\alpha \rho_0) - \ln \left[ \frac{8}{(1 - |W|^2)^2} \right] \right\} \quad (2.45)$$

является решением (2.44). Тогда

$$\varphi = \frac{1}{\alpha} \left\{ \ln(\alpha \rho_0) - \ln \left[ \frac{8|W'|^2}{(1 - |W|^2)^2} \right] \right\} \quad (2.46)$$

представляет собой решение дифференциального уравнения (2.42), в котором  $W$  – какая-либо функция от  $Z = x + iy$ .

Если ввести три типа преобразования:

$$W = \exp(CZ), \quad W = \operatorname{ctg}(CZ), \quad W = 1 - \frac{2x_0}{Z}, \quad (2.47)$$

то мы получим решения (2.8), (2.14) и (2.19). Если предположить, что  $\alpha = -1$  и  $\rho_0 = -1$ , то получим решение дифференциального уравнения  $\Delta \Psi = \exp(\Psi)$ , которое в случае приближения к кругу единичного радиуса изнутри становится положительно бесконечным:  $-2 \ln(1 - r)$ .

Применение преобразования  $W = \ln(Z / r_0)$ , где под  $r$  понимается радиус, выходящий из начала координат, приводит к следующим формулам:

$$U = \ln \frac{r}{r_0}; \quad \left| \frac{dW}{dZ} \right|^2 = \frac{1}{r^2}; \quad \varphi = \Psi + \frac{1}{\alpha} \ln r^2. \quad (2.48)$$

Тогда для случая (2.8) мы получим

$$\Psi = \frac{1}{\alpha} \left\{ \ln[sh^2(CU)] - \ln \frac{2C^2}{\alpha\rho_0} \right\}, \quad C > 0. \quad (2.49)$$

Из (2.49) следуют характеристики системы

$$\varphi = \frac{1}{\alpha} \left\{ \ln \left( \frac{\alpha\rho_0 r^2}{8C^2} \right) + \ln \left[ \left( \left( \frac{r}{r_0} \right)^C - \left( \frac{r_0}{r} \right)^C \right)^2 \right] \right\}; \quad (2.50)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{2}{\alpha r} \left[ 1 + C \operatorname{ctg} \left( C \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) \right) \right]; \quad (2.51)$$

$$\rho = \frac{8C^2}{\alpha r^2 \left( \left( \frac{r}{r_0} \right)^C - \left( \frac{r_0}{r} \right)^C \right)}. \quad (2.52)$$

Рассмотрим область  $r \geq r_0$ . При  $r = r_0$  потенциал  $\varphi$  и плотность заряда  $|\rho|$  положительно бесконечны. Для больших значений  $r$  потенциал  $\varphi$  отрицателен и бесконечен, а  $|\rho| \rightarrow 0$  в соответствии с формулами

$$\varphi = \left\{ 2(1 + C) \ln(r / r_0) + \ln(\alpha\rho_0 r^2 / (8C^2)) \right\} / \alpha; \quad (2.53)$$

$$d\varphi / dr = 2(1 + C) / (\alpha r); \quad (2.54)$$

$$\rho = 8C^2 (r_0 / r)^{2(1+C)} / (\alpha r_0^2). \quad (2.55)$$

Соотношения (2.50) – (2.55) описывают состояния равновесия термоэлектронов снаружи накаливаемого цилиндра.

В области  $r \leq r_0$  при  $r \rightarrow r_0$  слева мы снова имеем бесконечное значение потенциала. При  $0 \leq r \leq r_0$  имеем три различные возможности в зависимости от значения постоянной  $C$ :

$$\varphi = \left\{ 2(1 - C) \ln(r / r_0) + \ln(\alpha\rho_0 r_0^2 / (8C^2)) \right\} / \alpha; \quad (2.56)$$

$$d\varphi / dr = 2(1 - C) / (\alpha r); \quad (2.57)$$

$$\rho = 8C^2 (r_0 / r)^{2(1-C)} / \alpha r_0^2. \quad (2.58)$$

Если  $C < 1$ , то  $\varphi$  и  $|\rho|$  становятся положительно бесконечными при малом  $r$ . Если  $C > 1$ , то  $\varphi$  становится отрицательно бесконечной величиной и  $\rho = 0$ . Для  $C = 1$  остается решение

$$\varphi = \left\{ \ln(\alpha\rho_0 r_0^2 / 8) + 2 \ln[1 - (r / r_0)^2] \right\} / \alpha; \quad (2.59)$$

$$d\phi / dr = -4r \left[ \alpha (r_0^2 - r^2) \right]^{-1}; \quad (2.60)$$

$$\rho = 8 \left[ 1 - (r / r_0)^2 \right]^{-2} (\alpha r_0^2)^{-1}. \quad (2.61)$$

Соотношения (2.56) – (2.61) описывают равновесное состояние термоэлектронов внутри раскаленного цилиндра.

**Капиллярное давление термоэлектронов.** Важнейший физический вывод, содержащийся в приведенных решениях, следующий: термоэлектронное облако во всех случаях представляет собой тонкую пленку. Рассчитывая давление электрического поля и давление зарядов у поверхности электрода, Лауэ показывает, что в слое термоэлектронов всегда существует отрицательное натяжение поверхности. Для ее характеристики он вводит коэффициент поверхностного натяжения

$$\sigma = 2\sqrt{2\rho_g / \alpha} / |\alpha| = 2(kT / \varepsilon)^{3/2} (2|\rho_g|)^{1/2}, \quad (2.62)$$

где  $\rho_g / \alpha = (d\phi / dx)_1^2 / 2 \quad (2.63)$

– граничное давление поля.

Для слабоизогнутого термоэлектрода выражение (2.63) имеет вид

$$(d\phi / dx)^2 / 2 = \rho_g / \alpha + 2\sqrt{2\rho_g / \alpha} (R_1^{-1} + R_2^{-1}) / |\alpha|. \quad (2.64)$$

Это показывает, что на термоэлектрод действует капиллярное давление

$$p = -\sigma (R_1^{-1} + R_2^{-1}). \quad (2.65)$$

Выбор знака в (2.65) зависит от знака кривизны поверхности. Лауэ полагает, что капиллярный слой электронов создает градиент давления, направленный по радиус-вектору, если рассматривается внешняя часть выпуклого электрода. Если рассматривается внутренняя часть выпуклого электрода, то градиент давления термоэлектронов направлен против радиус-вектора.

*Может показаться, что полученные Лауэ законы статического равновесия электронов не имеют отношения к гравитационному равновесию вещества в газовых шарах. Заметим, что введение функции  $y = -\alpha\phi + \ln(\alpha\rho_0)$  переводит уравнение (2.3) в уравнение  $\Delta y = \exp(y)$ , которое в сферической системе координат для радиальной зависимости имеет вид*

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dy}{dr} \right) = e^y. \quad (2.66)$$

*Если сравнить (2.66) с изотермическим уравнением Эмдена (1.63), то станут видны их сходство и различие: уравнения имеют одинаковую структуру; после замены в (2.66)  $y$  на  $-\Psi$ , а  $r$  на  $\xi$  их правые части бу*

дут отличаться только знаком. Различие знаков соответствует замене сил притяжения между гравитирующими частицами силами отталкивания одноименных зарядов.

Отметим существенный недостаток подхода. Полученные решения описывают распределения термоэлектронов для случая, когда они удерживаются полем положительных зарядов изображения, остающихся в термоэлектроре. Покажем, что поле зарядов изображения не входит в уравнение (2.1), в связи с чем природа сил, удерживающих слой электронов у поверхности электрода, в развиваемом подходе остается невыясненной.

Макроскопическое электростатическое поле вблизи поверхности термоэлектрода создается двумя системами зарядов: отрицательными зарядами (термоэлектронами), вышедшими из нагретого металла, и положительными зарядами (заряды изображения), остающимися в металле. В связи с этим потенциал, создаваемый в рассматриваемой области, можно найти из принципа суперпозиции

$$\varphi = \varphi_T + \varphi_u, \quad (2.67)$$

где  $\varphi_T$  – потенциал поля термоэлектронов, а  $\varphi_u$  – потенциал зарядов изображения. Подставляя (2.67) в (2.1), получим

$$\Delta(\varphi_T + \varphi_u) = \Delta\varphi_T + \Delta\varphi_u = -\rho. \quad (2.68)$$

Поскольку заряды изображения отсутствуют в рассматриваемой области, то их потенциал в ней удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi_u = 0 \quad (2.69)$$

и не оказывает никакого влияния на решения уравнения (2.1), в котором  $\varphi = \varphi_T$ . Здесь проявляется локальность уравнения Пуассона, которое определяет дивергенцию напряженности в точке нахождения элементарного объема с плотностью заряда  $\rho$ . Потенциал самосогласованного поля, удовлетворяющий уравнению (2.3), исчезает там, где отсутствуют объемные заряды, создающие его.

В гидростатике одноименных зарядов будет доказано, что объемные силы, удерживающие в равновесии распределения зарядов, следующие из решения (2.3), имеют полевое происхождение.

### § 3. Коллективное взаимодействие в системах заряженных частиц по Власову

**Основные предпосылки и уравнения теории.** Предлагаемый параграф изложим, следуя первой монографии в [4], ставшей в наше время раритетом.

В основе развиваемой теории лежат две основные физические предпосылки.

1. Отказ от принципа пространственной и скоростной локализации частицы (в смысле классической механики), имеющей место независимо от силовых взаимодействий.

2. Введение силовых взаимодействий по аналогии с классической механикой, но с учетом нового принципа нелокализованности частиц.

Первую предпосылку можно выполнить, если поведение каждой частицы описывать протяженной функцией распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , удовлетворяющей уравнению непрерывности в пространстве шести измерений (в формулах сохранены обозначения Власова).

Силовые взаимодействия можно включить через вектор ускорения, содержащийся в уравнении непрерывности. Согласно второй предпосылке это включение следует произвести по аналогии с классической механикой, но учесть, что факт разброса положения частиц имеет место до введения сил и определяется самой функцией  $f$ .

В теории допускается включение сил по схеме обычной электродинамики. Последняя, в отличие от механики, допускает эффект самовоздействия. С математической точки зрения оба метода приводят к аналогичным уравнениям. Для большого числа одинаковых частиц эти уравнения совпадают.

Рассмотрим случай двух частиц, взаимодействующих при помощи центральных сил, а также и электродинамически.

Имеем систему уравнений

$$-\frac{\partial f_1}{\partial t} = \operatorname{div}_{\mathbf{r}_1} \mathbf{v}_1 f_1 + \operatorname{div}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{g}_1 f_1,$$

где

$$\mathbf{g}_1 = -\frac{1}{m_1} \nabla_{\mathbf{r}_1} \int K(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \rho_2(\mathbf{r}_2, t) d\mathbf{r}_2 + \frac{e_1}{m_1} \left( \mathbf{e}_2 + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_1, \mathbf{h}_2] \right);$$

$$-\frac{\partial f_2}{\partial t} = \operatorname{div}_{\mathbf{r}_2} \mathbf{v}_2 f_2 + \operatorname{div}_{\mathbf{v}_2} \mathbf{g}_2 f_2,$$

где

$$\mathbf{g}_2 = -\frac{1}{m_2} \nabla_{\mathbf{r}_2} \int K(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) \rho_1(\mathbf{r}_1, t) d\mathbf{r}_1 + \frac{e_2}{m_2} \left( \mathbf{e}_1 + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_2, \mathbf{h}_1] \right) \quad (3.1)$$

и

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{e}_i &= 4\pi e_i \int f_i d\mathbf{v}_i; \\ \operatorname{rot} \mathbf{h}_i - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} e_i \int \mathbf{v}_i f_i d\mathbf{v}_i; \\ \rho_i &= \int f_i d\mathbf{v}_i, \operatorname{div} \mathbf{h}_i = 0, \operatorname{rot} \mathbf{e}_i + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial t} = 0, i = 1, 2. \end{aligned}$$

**Отличительные особенности метода.** Отметим некоторые особенности предложенного способа описания частиц.

1. Он отличается от известного уравнения Больцмана с интегралом столкновений тремя аспектами:

а) на основании общей структуры уравнения непрерывности в него добавлено слагаемое, учитывающее действие сил;

б) в уравнении непрерывности отсутствует интеграл столкновений  $\left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]^{st}$ , в котором существенным образом используется представление

классической механики о частицах конечных размеров, в связи с чем он не соответствует по физическому смыслу остальным членам уравнения;

в) *ближние и дальние столкновения частиц* вводятся интегральным учетом взаимодействия, который отличается от классического введением протяженности функции распределения в шестимерном пространстве.

2. Благодаря единообразию включения сил произвольной природы метод не содержит внутри себя каких-либо сингулярных функций.

3. Характерной чертой метода является динамическая связь каждой частицы со всем коллективом в целом. Она будет прослежена ниже.

4. На движение каждого элемента  $(d\mathbf{r} d\mathbf{v})f$  – “облачка”, характеризующего частицу, не оказывает влияния взаимодействие с остальными элементами того же самого “облачка”. В этом смысле заряд одной частицы проявляется только как результат взаимодействия с другой.

5. Напряженности полей играют роль только некоторого связующего фактора между частицами. Обычное представление о поле проявляется только после исключения зависимости  $f$ -функции от скоростей и перехода к пространственно-временному описанию.

6. Результирующая сила, действующая на обе частицы, обращается в нуль при введении требования антисимметрии выражения  $\operatorname{grad}_r K(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$  при перестановке переменной дифференцирования.

7. Доказано выполнение всех существующих в механике законов сохранения после уточнения понятия замкнутой системы.

8. Способ описания допускает понятие проницаемости частиц. Функции  $f_1$  и  $f_2$  могут перекрываться частично или полностью. В частном случае, если  $f_1=f_2=f$  для любого момента времени, то уравнения для  $f_1$  и  $f_2$  становятся тождественными.

9. Система уравнений (3.1) может быть переведена в систему уравнений, в которую войдет одна функция распределения, зависящая от координат и скоростей обеих частиц. Умножая для этого уравнения (3.1) на  $f_2$  и  $f_1$  соответственно и складывая результаты, получим (электродинамических взаимодействий нет)

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \operatorname{div}_{r_1} v_1 f_1 + \operatorname{div}_{r_2} v_2 f + \operatorname{div}_{v_1} \left( -\frac{1}{m_1} \operatorname{grad} V_{12} \right) f + \\ + \operatorname{div}_{v_2} \left( -\frac{1}{m_2} \operatorname{grad} V_{21} \right) f ; \quad (3.2)$$

$$V_{12} = \int K(|r_1 - r_2|) d r_2 \int f d v_1 d r_1 d v_2 ;$$

$$V_{21} = \int K(|r_2 - r_1|) d r_1 \int f d v_2 d r_2 d v_1 ,$$

где общая функция распределения мультипликативна, то есть

$$f(1,2)=f_1(1)f_2(2) \quad (3.3)$$

с условием нормировки  $\int f_1 d r_1 d v_1 = \int f_2 d r_2 d v_2 = 1$ .

10. Способ описания совокупности частиц эквивалентен описанию системы частиц в пространстве  $6N$  измерений при помощи мультипликативной функции распределения вида

$$f(1,2,\dots,N) = f_1(1)f_2(2) \cdots f_N(N).$$

Функция (3.3) есть точное решение (3.2), приводящее к уравнению (3.1).

11. Структура уравнений такова, что они могут легко включить эффект самовоздействия. Для этого учтем взаимодействие отдельных элементарных объемов одного и того же “облачка”:

$$V_{12} = \int K_{11} \rho_1 d r'_1 + \int K_{12} \rho_2 d r_2 ; \\ V_{21} = \int K_{22} \rho_2 d r'_2 + \int K_{21} \rho_1 d r_1 . \quad (3.4)$$

Добавляя общую напряженность поля для отдельных частиц

$$\operatorname{div} e = 4\pi(e_1 \int f_1 d v_1 + e_2 \int f_2 d v_2),$$

осуществим построение теории с самовоздействием.

12. При наличии самовоздействия для каждой отдельной частицы можно в случае одинаковых частиц сформулировать одно уравнение с одной функцией  $f = f_1 + f_2$  ( $m_1 = m_2, K_{11} = K_{12} =$

=  $K_{21} = K_{22}$ ). Тогда из (3.1) с учетом (3.4) следует система уравнений (электродинамические слагаемые отсутствуют)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f}{\partial t} &= \operatorname{div}_r \mathbf{v} f + \operatorname{div}_v \mathbf{g} f; \\ \mathbf{g} &= -\frac{1}{m} \nabla_r \int K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \int f d\mathbf{v}' d\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В (3.5) переменные  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{r}$  могут отличаться только областью изменения. Здесь эта область имеет бесконечные размеры.

13. Для системы, состоящей из  $N$  одинаковых частиц, находящихся в одном и том же состоянии движения и взаимодействующих электродинамически, уравнения приобретают вид (предположено, что  $f_i = f_r = \dots = f_N = f$ )

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f}{\partial t} &= \operatorname{div}_r \mathbf{v} f + \operatorname{div}_v \frac{1}{m} \left\{ -\operatorname{grad} V + e \left( \mathbf{e} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{h}] \right) \right\} f; \\ V(\mathbf{r}, t) &= \sum_n^{N-1} \int \dots \int K_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) \rho(\mathbf{r}_1, t) \rho(\mathbf{r}_2, t) \dots \rho(\mathbf{r}_n, t) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_n; \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{e} &= 4\pi e(N-1) \int f d\mathbf{v}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{h} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} e(N-1) \int \mathbf{v} f d\mathbf{v}; \\ \operatorname{div} \mathbf{h} &= 0; \operatorname{rot} \mathbf{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = 0; \\ \rho(\mathbf{r}, t) &= \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Число групп по  $S$  частиц в каждой, которые можно образовать из  $N$  частиц, равно

$$\frac{(N-1)!}{S!(N-1-S)!} = C_S^N.$$

Коллективные взаимодействия, возникающие в группах из  $S$  частиц, должны быть повторены  $C_S^N$  раз. Введем числовой фактор  $C_S^N$  в ядро  $K_s$  таким образом:

$$\begin{aligned} K_1 &= (N-1)K(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|); \\ K_2 &= \frac{(N-1)(N-2)}{2} K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|, |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|, |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \end{aligned}$$

и т.д. Нелинейные функционалы выражают в наиболее общей форме неаддитивность сил взаимодействия в коллективе частиц.

Для  $N > 1$ , заменяя  $N-1$  через  $N$  и оставляя взаимодействия аддитивного типа, введем в (3.6) функцию  $f^* = Nf$ . Тогда для  $f^*$  получим первоначальную форму уравнений (знак \* опущен)

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \mathbf{v} \operatorname{grad}_r f + \frac{F}{m} \operatorname{grad}_v f;$$

$$F = -\operatorname{grad}_r \int K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' \int f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) d\mathbf{v}', \quad (3.7)$$

где теперь в  $f$  включено  $N$ , а  $K$  – энергия взаимодействия пары, которая не содержит общего числа частиц. Уравнение (3.7) совпадает с (3.5), которое включает эффект самовоздействия. Поэтому можно утверждать, что для достаточно большого числа частиц в случае пренебрежения неаддитивными взаимодействиями разница между двумя способами описания исчезает.

*Отметим достоинства предложенного подхода:*

1) в более общем случае  $f$ -функция может быть задана в пространстве скоростей и ускорений сколь угодно большого порядка  $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}}, \dots, t)$ , что позволяет уточнять исходное описание;

2) метод допускает включать кроме электродинамических сил другие центральные силы, действующие между частицами;

3) применение метода позволило решить задачи о вибрационных свойствах электронных скоплений, колебаниях плазмы, объяснить природу кристаллизации, показать существование эффекта акустической эмиссии в плотной среде, учесть роль коллективного взаимодействия электронов в потоках заряженных частиц.

К недостатку теории следует отнести отсутствие явного обратного влияния самосогласованного поля на частицы, которое в изложенном методе играет роль второстепенного связующего фактора.

Как будет показано ниже, существует альтернативный способ построения статических равновесий вещества, удерживаемого самосогласованным полем. Он дополняет изложенный метод и позволяет обнаружить фундаментальные законы сохранения, существующие в системах коллективного взаимодействия гравитирующих частиц или одноименных зарядов. Эти законы проявляют себя и в приложениях теории Власова к скоплениям электронов, возникающим в плоском диоде при протекании постоянного тока [12].

#### § 4. Самосогласование поля и вещества, находящихся в изотермическом равновесии, по Френкелю

*Историческая справка.* После публикации приоритетной работы Власова [4], независимо от исследований Лэна, Риттера, Кельвина, Эмдена [5], Фаулера [6] и Чандрасекара [7], а также работ Ричардсона [9], Шоттки [10], Лауэ [11], Френкель вводит для систем с постоянной температурой аналогичный способ расчета полей гравитирующих частиц. Затем он обобщает его на взаимодействующие между собой одноименные заряды и называет макроскопические статические поля, создаваемые этими системами, самосогласованными [8].

Поскольку основные положения этой идеи являются базовыми для нашей книги, мы сочли возможным включить их в параграф 4 почти целиком.

*Силы дальнего действия между частицами и метод самосогласованного поля.* Хотя общая теория, изложенная в предыдущей главе (*речь идет о теории неравновесного состояния и термодинамических флуктуаций*), позволяет, в принципе, решить любую статистическую проблему, однако решение это во многих случаях может быть получено простым и непосредственным образом путем применения различных **специальных\*** методов, соответствующих особенностям рассматриваемой молекулярной системы. Общей чертой этих специальных методов является в большинстве случаев замена сил взаимодействия между частицами надлежащим образом выбранными внешними силами, причем на практике этот выбор осуществляется различно, в зависимости от характера междучастичных сил и, прежде всего, в зависимости от быстроты их возрастания с уменьшением расстояния между частицами.

В результате система взаимодействующих частиц трактуется как идеальный газ, то есть как система невзаимодействующих частиц, находящихся в некотором “эквивалентном” внешнем силовом поле. Эквивалентность эта может иметь, конечно, лишь приблизительный характер, так что результаты, получаемые указанным методом, должны также считаться приближенными.

Мы рассмотрим сначала междучастичные силы несколько необычного характера – силы ньютоновского и кулоновского типов. Они отличаются от обычных молекулярных сил сравнительно медленным убыванием с увеличением расстояния. Их действие может быть описано с достаточной степенью точности с помощью **эквивалентного** или **внешнего**

---

\* Выделено Френкелем Я.И.

**силового поля** (тяжести, электрического, магнитного). Подобное внешнее поле определяется таким образом, чтобы оно в **среднем** совпадало с полем, фактически создаваемым **всеми** частицами, то есть чтобы оно представляло собой **вероятное взаимодействие их при том их распределении, которое этим же самым полем обуславливается**. Рассматриваемое таким образом “эквивалентное” внешнее поле назовем “самосогласованным”.

Само собой понятно, что самосогласованное поле передает взаимодействие частиц не вполне точно. Отступления **фактического от вероятного** здесь так же, как и в случае распределения частиц по состояниям, могут быть выражены в форме **флуктуаций**. Эти флуктуации, грубо говоря, эквивалентны столкновениям между частицами. При рассмотрении статистического равновесия как стационарного распределения в самосогласованном поле они не играют роли; значение их сводится лишь к тому, что при первоначальном отсутствии равновесия они стремятся установить его.

Заметим, что междучастичные силы не оказывают никакого влияния на распределение частиц по скоростям; в состоянии статистического равновесия это распределение должно, следовательно, определяться законом Максвелла (как в отношении поступательного движения частиц, так и в отношении их вращательного или колебательного движения).

Таким образом, междучастичные силы должны проявляться лишь в изменении распределения частиц по положениям (и ориентациям в случае молекул) в отличие от того распределения, которое обуславливается одними лишь внешними силами.

Мы поясним изложенные принципы следующими двумя примерами. **Гравитирующий газ (звезда)**. Представим себе громадную газообразную массу, частицы которой притягиваются друг к другу по закону Ньютона, и отвлечемся от всякого иного взаимодействия между ними.

Подобные условия, при которых на передний план выступают именно силы тяготения, осуществляются до некоторой степени в звездах и туманностях. На самом деле эти небесные тела не находятся в состоянии статистического равновесия: температура их быстро возрастает от периферии к центру; из недр наружу направлен мощный поток лучистой энергии и т.д.

Таким образом, рассматриваемая нами газообразная масса, обладающая постоянной температурой и находящаяся как в механическом, так и в статистическом равновесии, представляет собой совершенно фиктивную звезду. Этот фиктивный характер еще усугубляется тем, что час

тицы газа трактуются нами как материальные точки, взаимодействующие друг с другом по закону Ньютона.

Поскольку температуру нашей “звезды” можно считать заданной, вопрос сводится лишь к определению ее плотности как функции расстояния от центра  $r$  (само собой разумеется, что распределение плотности должно обладать шаровой симметрией, так что звезду можно трактовать как “газовый шар” [*термин широко употребляемый Эмденом (!)*]). Эта функция определяется законом Больцмана, то есть формулой

$$\rho = Ce^{-U/kT}, \quad (4.1)$$

где  $U = m\phi$  – потенциальная энергия частицы в самосогласованном поле, то есть в поле тяготения, создаваемом звездой в данной точке, а  $\phi$  – потенциал этого поля, то есть потенциальная энергия, отнесенная к единице массы. Заметим, что вследствие чрезвычайной малости сил тяготения, зависящих от отдельных частиц, и сравнительно медленного изменения этих сил с расстоянием самосогласованное поле в данном случае можно считать тождественным фактическому, совершенно не принимая во внимание флуктуации.

Для определения потенциала поля тяжести  $\phi$  как функции расстояния мы можем воспользоваться законом Ньютона в дифференциальной форме, то есть в форме уравнения Пуассона

$$\nabla^2\phi = 4\pi\chi\rho, \quad (4.2)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

– оператор Лапласа, а  $\chi$  – гравитационная постоянная ( $\chi = 6,66 \cdot 10^{-7}$ )\*. В случае шаровой симметрии мы имеем (полагая  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ )

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{d\phi}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{d\phi}{dr} \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{d^2\phi}{dr^2} \frac{x}{r} + \frac{d\phi}{dr} \left( \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right),$$

то есть

$$\nabla^2\phi = \frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2(r\phi)}{dr^2}.$$

Таким образом, уравнение Пуассона сводится в этом случае к следующему виду:

---

\* По-видимому, опечатка, поскольку в СГС  $\chi=6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ .

$$\frac{d^2(r\varphi)}{dr^2} = 4\pi\chi\rho r. \quad (4.2a)$$

Подставляя в уравнение (4.2) выражение  $\rho$  согласно формуле (4.1), и полагая для краткости

$$\frac{m\varphi}{kT} = \Psi \text{ и } \frac{4\pi\chi m}{kT} C = \mu^2 (> 0), \quad (4.3)$$

мы получаем уравнение

$$\nabla^2\Psi = \mu^2 e^{-\Psi} \quad (4.3a)$$

или, учитывая шаровую симметрию,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = \frac{d^2(r\Psi)}{r dr^2} = \mu^2 e^{-\Psi}. \quad (4.3b)$$

Как видно, (4.3b) точно совпадает со структурой изотермического уравнения Эмдена [см. соотношение (1.63)] и отличается от него только постоянным множителем  $\mu^2$  в правой части.

Наша задача сводится к решению этого уравнения. Заметим, что формулу Больцмана (4.1) можно было бы заменить условием механического равновесия газа

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{d\varphi}{dr}, \quad (4.4)$$

где  $p$  представляет собой давление. Полагая

$$p = nkT = \rho kT / m \text{ и } \frac{m\varphi}{kT} = \Psi,$$

получаем

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{d\Psi}{dr},$$

откуда следует формула

$$\rho = Ce^{-\Psi}.$$

Мы не будем останавливаться на подробном анализе уравнения (4.3b). Отметим лишь тот факт, что оно приводит к результатам, лишенным физического смысла, а именно: если мы положим  $\Psi = 0$  при  $r = \infty$ , то при конечных значениях  $r$  для  $\Psi$  получаются отрицательные значения, а в точке  $r = 0$   $\Psi$  обращается в  $-\infty$ .

Это соответствует такому распределению плотности газа, при котором в случае конечности общей его массы последняя сосредоточена практически в одной точке ( $r = 0$ ). При этом ее плотность обращается в бесконечность при  $r = 0$  и сохраняет конечную (и при этом постоянную) величину  $\rho = C$  на бесконечном расстоянии.

Эти результаты показывают, что статистическое равновесие газовой массы под влиянием одних лишь сил тяготения на самом деле невозможно. Для того чтобы обеспечить равновесие во внутренних, сильно сжатых частях ее, должны появляться отталкивающие силы, препятствующие дальнейшему сжатию, а в наружных, сильно разреженных, – силы притяжения, препятствующие улечиванию на бесконечное расстояние.

Заметим, что подобное улечивание газа из атмосферы небесных тел действительно происходит, и тем быстрее, чем меньше размеры тела, т.е. чем слабее силы тяготения, сдерживающие его атмосферу. Поэтому Луна уже давно лишилась своей воздушной оболочки, в то время как у Земли она еще сохранилась.

**Электронный газ.** Электронный газ наблюдается в состоянии статистического равновесия в виде «тучи» или «облака» свободных электронов у поверхности раскаленных металлических тел. Последние, как известно, испускают электроны, заряжаясь при этом положительно. Если возникающий таким образом положительный заряд не компенсируется притоком новых электронов, то испущенные электроны притягиваются телом и остаются вблизи его поверхности, образуя так называемый объемный заряд.

В действительности испущенные электроны не остаются навсегда вне тела; ударяясь о его поверхность, они могут снова поглощаться им, причем на смену им испускаются новые. Поскольку число электронов, а также (максвелловское) распределение скоростей в электронной атмосфере тела остаются постоянными, это обстоятельство не влияет на распределение плотности электронного газа. Последняя может быть рассчитана поэтому таким же самым способом, как и в предыдущем примере гравитирующего газа.

Разница заключается лишь в том, что в случае электронного газа мы имеем дело не с взаимным притяжением (по закону Ньютона), а с взаимным отталкиванием (по закону Кулона) и что к этому отталкиванию, которое может быть охарактеризовано некоторым самосогласованным полем, присоединяется притяжение к электроду, испускающему электроны, под влиянием внешнего электрического поля, обусловленного положительным зарядом этого электрода.

Обозначая число электронов в единице объема через  $n$ , а объемную плотность обусловленного ими заряда –  $(n\varepsilon)^*$  через  $\rho$ , мы можем по-прежнему определить  $\rho$  в зависимости от потенциальной энергии элек

---

\* заряд электрона Френкель обозначает через  $-\varepsilon$ , считая  $\varepsilon > 0$ .

трона в соответствующей точке по формуле Больцмана (4.1). При этом потенциальная энергия  $U$  может быть представлена в виде

$$U = -\varepsilon\varphi = -\varepsilon(\varphi^0 + \varphi'),$$

где  $\varphi^0$  – потенциал внешнего электрического поля (исходящего от тела), а  $\varphi'$  – потенциал электрического поля, создаваемого самими электронами. Под самосогласованным полем мы будем в дальнейшем понимать результирующее поле  $\varphi$ .

Согласно уравнению Пуассона (представляющему собой в данном случае дифференциальную форму закона Кулона), мы имеем

$$\nabla^2\varphi' = -4\pi\rho = 4\pi n\varepsilon,$$

или, так как  $\nabla^2\varphi^0 = 0$  во внешнем пространстве, где находится электронный газ, то

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho. \quad (4.5)$$

Подставляя в (4.5) выражение  $\rho = -Ce^{-U/kT}$ , где  $C$  – положительная величина, а  $U = -\varepsilon\varphi$ , и полагая

$$\frac{\varepsilon\varphi}{kT} = \Psi, \quad \frac{4\pi C\varepsilon}{kT} = \mu^2 (> 0), \quad (4.5a)$$

получаем уравнение

$$\nabla^2\Psi = \mu^2 e^\Psi, \quad (4.5b)$$

весьма сходное с уравнением (4.3a) и отличающееся от него лишь знаком при  $\Psi$  в показателе. Это отличие обоих уравнений друг от друга соответствует замене сил тяготения между частицами газа силами отталкивания между электронами.

*Как видно, (4.5b) точно совпадает с уравнением, которое исследовал Лауэ [см. соотношение (2.66)] и отличается от него только постоянным множителем  $\mu^2$  в правой части.*

Уравнение (4.5b) при надлежащих граничных условиях имеет решения, характеризующиеся быстрым убыванием плотности электронного газа (а вместе с ней и электрического потенциала) по мере удаления от положительно заряженной поверхности тела.

**Распределение электронов в случае плоской симметрии.** Для простоты мы рассмотрим случай плоской поверхности  $x = 0$  и предположим, что положительный заряд ее, приходящийся на единицу площади ( $\eta$ ), численно равен заряду всех электронов на этой площади:

$$\eta = -\int_0^\infty \rho dx = \varepsilon \int_0^\infty n dx,$$

где  $n(x)$  – число электронов в единице объема на расстоянии  $x$  от поверхности. При этом условии электрическое поле  $E$  у самой поверхности должно равняться  $4\pi\eta$ , а на некотором, строго говоря, бесконечном расстоянии обращаться в нуль.

Мы имеем, таким образом, следующие граничные условия:

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 = 4\pi\eta; \quad -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_\infty = 0.$$

В рассматриваемом случае (плоская симметрия) уравнение (4.5b) сводится к более простому уравнению

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = \mu^2 e^\Psi. \quad (4.6)$$

Умножая его на  $\frac{d\Psi}{dx}$ , получим

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{2} \left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 = \mu^2 \frac{d}{dx} e^\Psi,$$

следовательно,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 = \mu^2 e^\Psi + const. \quad (4.6a)$$

Если при  $x = \infty$  плотность  $\rho$  должна обращаться в нуль, то потенциал  $\Psi$  должен при этом обращаться в  $-\infty$  (согласно формуле  $\rho = Ce^\Psi$ ); для того чтобы вместе с тем исчезло и электрическое поле, мы должны приравнять постоянную интегрирования в (4.6a) нулю.

*Как и Лауэ, Френкель считает второе слагаемое в правой части (4.6a) произвольной постоянной. Как будет показано в § 14, произвольная постоянная в правой части (4.6a) представляет собой интеграл полного давления, являющийся важнейшим законом сохранения рассматриваемого коллективного взаимодействия.*

Таким образом, мы имеем

$$-\frac{d\Psi}{dx} = \sqrt{2}\mu e^{\frac{\Psi}{2}}, \quad (4.6b)$$

где отрицательный знак выбран потому, что ищется убывающее решение. Интегрируя это уравнение и полагая  $\Psi = \Psi_0$  при  $x = 0$ , получаем

$$e^{-\frac{\Psi}{2}} = \frac{\mu}{\sqrt{2}} x + e^{-\frac{\Psi_0}{2}}, \quad (4.7)$$

откуда следует, что

$$\Psi = -2 \ln \frac{\mu}{\sqrt{2}} (x + x_0), \quad (4.7a)$$

где

$$x_0 = \frac{\sqrt{2}}{\mu} e^{-\frac{\Psi_0}{2}}. \quad (4.7b)$$

Заметим, что из (4.7) получается следующая формула для зависимости плотности  $\rho = -Ce^{\Psi}$  от расстояния:

$$\rho = -\frac{2C}{\mu^2(x + x_0)^2}. \quad (4.8)$$

*Рассмотренный случай совпадает со случаем  $A=0$ , приводимым у Лауэ [см. соотношения (2.19) – (2.21)]. Решение впервые получено Ричардсоном в [9].*

Отрицательный заряд, приходящийся на единицу площади, равен, следовательно,

$$\int_0^{\infty} \rho dx = -\frac{2C}{\mu^2 x_0}.$$

Приравнивая его к  $-\eta$  и принимая во внимание вторую из формул (4.5a), находим следующее соотношение:

$$\sqrt{2}\mu e^{\frac{\Psi_0}{2}} = \frac{4\pi\epsilon}{kT} \eta.$$

То же самое соотношение получается из условия

$$-(d\Psi / dx)_0 = 4\pi\eta\epsilon / (kT)$$

в связи с формулой (4.6b).

Мы видим, таким образом, что это условие эквивалентно предыдущему.

Потенциал  $\Psi_0$  и параметр  $\mu$ , входящие в решение нашей задачи, остаются пока совершенно не определенными. Эта неопределенность отчасти зависит от того, что к потенциалу всегда можно прибавить произвольную постоянную, не изменяя величины электрического поля. При замене  $\Psi$  на  $\Psi' = \Psi + C$  уравнение (4.5b) приобретает вид

$$\nabla^2 \Psi' = \mu^2 e^{\Psi' - C} = \mu'^2 e^{\Psi'},$$

где

$$\mu' = \mu e^{-\frac{C}{2}}.$$

Таким образом, параметр  $\mu$  приобретает смысл лишь при нормировке потенциала, связанной с фиксированием его значения в некоторой начальной точке.

Полагая, например,  $\Psi_0 = 0$ , мы получаем, согласно (4.7) и (4.7a),

$$\Psi = -2 \ln\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}} x + 1\right)$$

и далее, согласно (4.7b),

$$\rho_{x=0} = -C = -\frac{\mu^2 kT}{4\pi\varepsilon}.$$

Таким образом, параметр  $\mu$  может быть определен либо через поверхностную плотность заряда по формуле (4.8), которая в рассматриваемом случае сводится к соотношению

$$\mu = \frac{4\pi\varepsilon}{\sqrt{2kT}} \eta,$$

либо через концентрацию электронов у поверхности испускающего их металла по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon^2 n_0}{kT}}. \quad (4.8a)$$

Что касается этой концентрации, то она зависит от природы и температуры металла, точнее от числа электронов  $I_0$ , испускаемых единицей поверхности металла за единицу времени, и коэффициента отражения  $r_0$  металлической поверхности по отношению к падающим на нее электронам.

Число электронов, падающих на единицу поверхности в единицу времени, равно

$$I = n_0 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}.$$

При наличии статистического равновесия оно должно равняться сумме числа электронов  $I_0$ , испускаемых металлом, и числа электронов  $r_0 I$ , отскакивающих от его поверхности или упруго отраженных. Таким образом,

$$I = I_0 + r_0 I \text{ или } (1 - r_0)I = I_0,$$

откуда следует концентрация электронов у поверхности

$$n_0 = \frac{I_0}{1 - r_0} \sqrt{\frac{2\pi m}{kT}}. \quad (4.8b)$$

**Электронный газ между двумя электродами.** Если электронный газ заключен между двумя параллельными электродами из различных металлов при одной и той же температуре, то наряду с условием (4.8b) при  $x = 0$  должно быть выполнено у поверхности второго электрода (скажем, при  $x = a$ ) аналогичное условие

$$n_1 = \frac{I_0}{1 - r_1} \sqrt{\frac{2\pi m}{kT}},$$

где индекс 1 относится ко второму металлу.

Это условие не может быть удовлетворено, если исходить из формулы (4.6b), которая представляет собой **частное** решение уравнения (4.6), соответствующее граничному условию  $\Psi \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ .

В общем случае постоянная в формуле (4.6a) должна быть отлична от нуля. Обозначая ее через  $\mu^2 b$ , имеем

$$\frac{d\Psi}{dx} = \mp \sqrt{2\mu} (e^\Psi - b)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.9)$$

Выбор знака зависит от направления электрического поля. Вблизи обоих электродов оно должно быть направлено **наружу** (так, чтобы задерживать вылетающие электроны).

Таким образом, отрезок  $a$  можно разделить на две, вообще говоря, неравные, части  $(0, \xi)$  и  $(\xi, a)$ , так что в первой из них  $\frac{d\Psi}{dx} < 0$ , а во второй  $\frac{d\Psi}{dx} > 0$ .

Точка  $x = \xi$  соответствует при этом минимальному значению  $\Psi$ , равному, очевидно,  $\ln b$ .

Таким образом, уравнение (4.9) распадается на два уравнения:

$$\frac{d\Psi}{dx} = -\sqrt{2\mu} (e^\Psi - e^{\Psi_{\min}})^{\frac{1}{2}}, \quad (4.9a)$$

при  $0 \leq x \leq \xi$  и

$$\frac{d\Psi}{dx} = \sqrt{2\mu} (e^\Psi - e^{\Psi_{\min}})^{\frac{1}{2}}, \quad (4.9b)$$

при  $\xi \leq x \leq a$ .

Примерный ход потенциала  $\Psi(x)$  представлен на рис. 4.1, причем сплошная кривая соответствует случаю  $n_1 > n_0$ , пунктирная - противоположному случаю.

Не останавливаясь на точном решении рассматриваемой задачи, мы найдем приближенное ее решение для того случая, когда величина  $\Psi$  на всем интервале  $(0, a)$  мала в сравнении с 1, то есть когда минимальный потенциал  $\Psi_{\min}$  по абсолютной величине мал в сравнении с величиной  $kT / \varepsilon$ , представляющей собой меру энергии теплового движения.

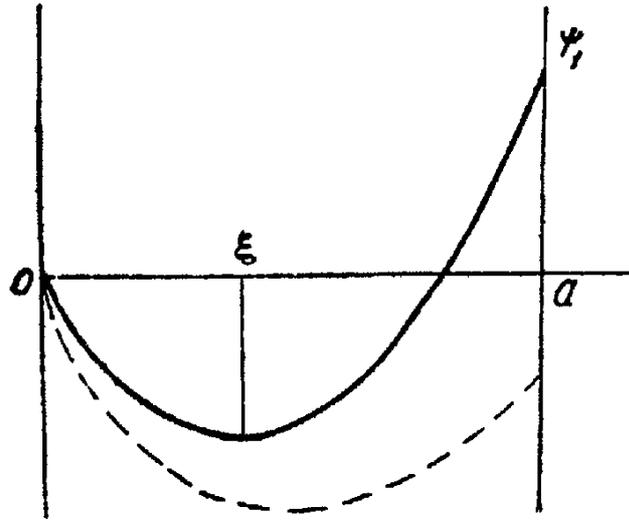


Рис. 4.1

В этом случае удобнее исходить не из уравнений (4.9а) и (4.9б), а непосредственно из уравнения (4.6), положив в нем приближенно  $e^{\Psi} = 1 + \Psi$ . Оно сводится при этом к линейному уравнению

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = \mu^2(1 + \Psi), \quad (4.10)$$

решение которого имеет вид

$$1 + \Psi = A \cdot e^{\mu x} + B \cdot e^{-\mu x}, \quad (4.10а)$$

где  $A$  и  $B$  - постоянные.

Вспоминая, что  $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi\varepsilon n$  и, следовательно,

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = \frac{4\pi\varepsilon^2}{kT} n,$$

получаем

$$1 + \Psi = \frac{4\pi\varepsilon^2}{\mu^2 kT} n. \quad (4.10б)$$

При этом для определения постоянных  $A$ ,  $B$  и параметра  $\mu$  служат граничные условия  $n(0) = n_0$ ,  $n(a) = n_1$  и  $\Psi(0) = 0$ . Последнее условие в связи с формулой (4.10б) непосредственно дает

$$\mu = \sqrt{\frac{kT}{4\pi\varepsilon^2 n_0}},$$

что совпадает с формулой (4.8а).

Подставляя полученное выражение в (4.10б), получаем для потенциала второго металла формулу

$$\Psi_1 = \frac{n_1}{n_0} - 1 = \frac{I}{1 - r_1} \cdot \frac{1 - r_0}{I_0}. \quad (4.11)$$

Постоянные  $A$  и  $B$  определяются при этом из уравнений

$$A + B = 1; Ae^{\mu a} + Be^{-\mu a} = \frac{n_1}{n_0}. \quad (4.11a)$$

*Рассмотренный случай  $const = \mu^2 b > 0$  соответствует случаю Лауэ при  $A > 0$ .*

*Изложенный фрагмент работы Френкеля указывает на универсальность предложенного им метода расчета самосогласованных электростатических полей и полей гравитации, создаваемых коллективным взаимодействием равновесных зарядов либо гравитирующих частиц.*

*К сожалению, сделанные им преждевременные выводы о том, что уравнение, полученное для гравитирующих частиц, приводит к результатам, лишенным физического смысла, а уравнение, полученное для зарядов, описывает термоэлектроны, не позволили ему реализовать уникальные возможности предложенного метода, а сама идея не получила достойного развития.*

*Как будет показано ниже, Френкель в приводимом фрагменте заложил в физике новое направление исследования: удержание вещества самосогласованным полем, которое позволяет ставить и решать широкий класс задач, связанных с поиском равновесных и неравновесных распределений вещества с полем как в системах со столкновениями, так и без столкновений.*

## **ГЛАВА 2. ГИДРОСТАТИКА ВЕЩЕСТВА В САМОСОГЛАСОВАННОМ ПОЛЕ**

Ниже проводится трехмерный анализ гидростатики вещества в самосогласованном поле, позволяющий выявить ряд неизвестных закономерностей, присущих только коллективным взаимодействиям.

### **§ 5. Гидростатика гравитирующих частиц в самосогласованном поле**

*Условие равновесия гравитирующих частиц.* На элементарный объем гравитирующих частиц, находящихся в самосогласованном поле, действуют две статические объемные силы (объемная плотность сил) полевого происхождения, которые удерживают его в механическом равновесии:

$$\rho_1 \mathbf{g} + \mathbf{f}_1 = 0, \quad (5.1)$$

где  $\rho_1$  – массовая плотность вещества в элементарном объеме, а  $\mathbf{g}$  – напряженность макроскопического поля гравитации, создаваемого коллективом частиц в месте расположения объема. Объемную силу  $\mathbf{f}_1$ , по аналогии с гидростатикой, обычно связывают с градиентом давления вещества

$$\mathbf{f}_1 = -\text{grad}(p). \quad (5.2)$$

Выясним ее физический смысл в самосогласованном поле. Подставляя (5.2) в (5.1), получим

$$\mathbf{g} = \text{grad}(p) / \rho_1, \quad (5.3)$$

то есть в рассматриваемых системах вектор  $\mathbf{g}$  всегда сонаправлен градиенту давления частиц и отличен от него по модулю. Дополним условие равновесия (5.1) уравнением, определяющим дивергенцию напряженности поля гравитации в рассматриваемом объеме

$$\text{div } \mathbf{g} = -4\pi G \rho_1, \quad (5.4)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная.

*Интеграл полного давления.* Действие частиц на поле и поля на частицы характеризуется законом коллективного взаимодействия, который получаем из умножения (5.4) на (5.3):

$$\text{grad}(\mathbf{g}^2 / 8\pi G + p) = 0. \quad (5.5)$$

(При получении (5.5) привлечены известное тождество векторного анализа  $\text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{A}$  и свойство потенциальности вектора  $\mathbf{g} = -\text{grad}\phi$ , имеющего одну компоненту  $g_x$ ). Из (5.5) следует, что состояния исследуемой системы характеризуются скалярным интегралом

$$\mathbf{g}^2 / 8\pi G + p = P_1 = \text{const}, \quad (5.6)$$

который удобно назвать полным давлением. Из (5.6) видно, что в рассматриваемых системах возможен только один тип равновесия: при  $P_1 > 0$ . Как будет показано ниже, свойство однородности (независимости скалярной функции полного давления от координат системы) оказывается фундаментальным в коллективных взаимодействиях гравитирующих частиц.

В самосогласованных системах с плоской симметрией интеграл полного давления (5.6) становится гамильтонианом  $H(p, q, t)$  коллективного взаимодействия (штрихи означают дифференцирование по  $x$ )

$$\varphi'^2 / 8\pi G + p(\varphi) = H(\varphi', \varphi, x) = P_1 = \text{const}, \quad (5.7)$$

в котором роль обобщенного времени (циклическая переменная) играет координата  $x$ , а канонически сопряженными величинами являются обобщенный импульс  $\varphi' / 4\pi G$  и обобщенная координата  $\varphi$ . Конкретный вид гамильтониана (5.7), как первого интеграла уравнения Пуассона, в бесстолкновительных и в равновесных изотермических системах гравитирующих частиц был получен в [13]. В системах с таким коллективным взаимодействием давление поля всегда больше там, где меньше давление частиц, и наоборот.

**Градиент давления поля как объемная плотность сил.** Закон коллективного взаимодействия (5.5) позволяет установить физический смысл объемной силы

$$\mathbf{f}_1 = \text{grad}(\mathbf{g}^2 / 8\pi G), \quad (5.8)$$

а именно: она создается градиентом давления самосогласованного поля гравитации, сонаправлена ему, действует на массовую плотность вещества и в равновесных состояниях компенсирует объемную силу  $\rho_1 \mathbf{g}$ . Существование (5.1), (5.8) указывает на неизвестное ранее свойство самосогласованного поля гравитации удерживать неоднородное вещество в ограниченной области пространства.

В связи с этим граничные условия, накладываемые при решении задач гравитационного равновесия звезды на изменение плотности вещества, которая может только уменьшаться от центра к поверхности, оказываются искусственными и должны быть пересмотрены.

**Уравнения равновесия гравитирующих частиц в самосогласованном поле.** Подставляя (5.3) в (5.4), получаем уравнение, описывающее равновесное распределение гравитирующего вещества в самосогласованном поле

$$\text{div}(\text{grad}(p) / \rho_1) = -4\pi G \rho_1. \quad (5.9)$$

Дополним уравнение (5.9) уравнением состояния вещества

$$p = K\rho_1^{(n+1)/n}, \quad (5.10)$$

где  $K, n$  – некоторые постоянные [см.(1.7)].

*Полученная система уравнений (5.9),(5.10) описывает трехмерное политропическое либо изотермическое равновесие гравитирующих частиц, удерживаемых самосогласованным полем.* Для частного случая радиального механического равновесия  $\rho_1 = \rho_1(r)$  система (5.9),(5.10) переходит в уравнение Лэна–Эмдена [7], которое определяет гравитационное равновесие вещества звезды для уравнения состояния (5.10) [см. также (1.18)].

Используя связь гравитационного потенциала с напряженностью  $\mathbf{g} = -grad(\varphi)$  в [8], Френкель переводит (5.4) в уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho_1. \quad (5.11)$$

Согласование задачи осуществляется с помощью функции распределения Больцмана

$$\rho_1 = \rho_0 \exp(-m\varphi / kT), \quad (5.12)$$

которая следует из (5.1),(5.2) для изотермического равновесия вещества с уравнением состояния

$$p = \rho_1 kT / m, \quad (5.13)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана;  $m$  – масса гравитирующей частицы;  $T$  – абсолютная температура системы.

Подставляя (5.12) в (5.11), получаем уравнение [сравним его с (4.3а)]

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho_0 \exp(-m\varphi / kT), \quad (5.14)$$

*которое позволяет рассчитать трехмерное распределение потенциала в изотермической газовой конфигурации, удерживаемой в равновесии самосогласованным полем.* В частном случае радиального равновесия  $\varphi = \varphi(r)$  уравнение (5.14) является полевым аналогом  $E$  – уравнения Эмдена для изотермического распределения плотности вещества в газовом шаре [7] (см.(1.63)). В плоском случае оно обосновывает результаты, полученные в [13] для систем с однородной температурой.

Обобщая результаты [8] на уравнение состояния (5.10), получим уравнение

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho_0(1 - \varphi / \varphi_n)^n, \quad (5.15)$$

где  $\varphi_n = K(n+1)\rho_0^{1/n}$  – значение потенциала, при котором функция распределения обращается в нуль. Уравнение (5.15) является полевым аналогом уравнения (5.9) и позволяет рассчитать трехмерное распределение потенциала поля гравитации в политропической газовой конфигурации, удерживаемой в равновесии самосогласованным полем. В частном случае

радиальной зависимости  $\varphi = \varphi(r)$  уравнение (5.15) представляет собой полевой аналог уравнения Лэна–Эмдена (1.18).

## § 6. Гидростатика одноименных зарядов в самосогласованном поле

**Условие равновесия одноименных зарядов.** На элементарный объем одноименных зарядов, находящихся в самосогласованном поле, действуют две статические объемные силы полевого происхождения, которые удерживают его в механическом равновесии

$$\rho_2 \mathbf{E} + \mathbf{f}_2 = 0, \quad (6.1)$$

где  $\rho_2$  – плотность заряда вещества в элементарном объеме, а  $\mathbf{E}$  – напряженность макроскопического электрического поля, создаваемого коллективом зарядов в месте расположения объема. Объемную силу  $\mathbf{f}_2$ , по аналогии с гидростатикой, свяжем с градиентом давления вещества:

$$\mathbf{f}_2 = -\text{grad}(p). \quad (6.2)$$

Выясним ее физический смысл в самосогласованном поле. Подставляя (6.2) в (6.1), получим

$$\mathbf{E} = \text{grad}(p) / \rho_2, \quad (6.3)$$

то есть в рассматриваемых системах вектор  $\mathbf{E}$  всегда сонаправлен градиенту давления зарядов и отличен от него по модулю. Дополним условие равновесия (6.1) уравнением, определяющим дивергенцию напряженности электрического поля в рассматриваемом объеме (дано в СГС)

$$\text{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho_2. \quad (6.4)$$

**Интеграл полного давления.** Действие зарядов на поле и поля на заряды характеризуется законом коллективного взаимодействия, который получаем из умножения (6.3) на (6.4) (учтена потенциальность вектора  $\mathbf{E}$ , имеющего одну компоненту  $E_x$ ):

$$\text{grad}\left(\mathbf{E}^2 / 8\pi - p\right) = 0. \quad (6.5)$$

Из (6.5) следует, что состояния исследуемой системы характеризуются скалярным интегралом

$$\mathbf{E}^2 / 8\pi - p = P_2 = \text{const}, \quad (6.6)$$

который также удобно назвать полным давлением. Из (6.6) видно, что в рассматриваемых системах возможны три типа равновесий: при  $P_2 > 0$ ,  $P_2 = 0$  и  $P_2 < 0$ . Как показано ниже, свойство однородности (независимости скалярной функции полного давления от координат системы) оказывается фундаментальным в коллективных взаимодействиях одноименных зарядов.

В самосогласованных системах с плоской симметрией интеграл полного давления становится гамильтонианом  $H(p, q, t)$  коллективного взаимодействия (штрихи означают дифференцирование по  $x$ )

$$(\varphi')^2 / 8\pi - p(\varphi) = H(\varphi', \varphi, x) = P_2 = const, \quad (6.7)$$

в котором роль обобщенного времени (циклическая переменная) играет координата  $x$ , а канонически сопряженными величинами являются обобщенный импульс  $\varphi' / 4\pi$  и обобщенная координата  $\varphi$ . Конкретный вид гамильтониана, как первого интеграла уравнения Пуассона, в бесстолкновительных и в равновесных изотермических системах одноименных зарядов был исследован в [14–18]. В системах с таким коллективным взаимодействием давление поля всегда больше там, где больше давление частиц.

**Градиент давления поля как объемная плотность сил.** Закон коллективного взаимодействия (6.5) позволяет установить *физический смысл объемной силы*

$$f_2 = -grad(E^2 / 8\pi). \quad (6.8)$$

*Она создается градиентом давления самосогласованного электрического поля, противоположна ему по направлению, действует на массовую плотность вещества, как и давление поля гравитации, и в равновесных состояниях компенсирует объемные силы  $\rho_2 \mathbf{E}$ . Существование (6.1), (6.8) указывает на неизвестное ранее свойство самосогласованного электрического поля удерживать неоднородное вещество из одноименных зарядов в ограниченной области пространства.*

Далее мы будем пользоваться понятием полного давления только в смысле, даваемым соотношениями (5.6) и (6.6).

**Примечание.** Формулы (5.5), (5.6), (5.8); (6.5), (6.6), (6.8); (15.6), (16.6) получены для однокомпонентного неоднородного потенциального поля:  $\mathbf{g} = (g_x, 0, 0)$  или  $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$ . Для векторных полей  $\mathbf{g}$  или  $\mathbf{E}$  общего вида объемные плотности сил полевого происхождения (5.8) и (6.8) заменяются на соотношения  $f_1 = \mathbf{g} \operatorname{div} \mathbf{g} / (4\pi G)$ ;  $f_2 = -\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} / (4\pi)$ , которые переходят в (5.8) и (6.8) для плоско-неоднородных полей.

**Уравнения равновесия зарядов в самосогласованном поле.** Подставляя (6.3) в (6.4), получаем уравнение, описывающее равновесное распределение одноименных зарядов в самосогласованном поле:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(p) / \rho_2) = 4\pi\rho_2. \quad (6.9)$$

Дополним уравнение (6.9) уравнением состояния зарядов

$$p = K_1 \rho_2^{(n+1)/n}, \quad (6.10)$$

где  $K_1, n$  – некоторые постоянные.

*Полученная система уравнений (6.9), (6.10) описывает трехмерное политропическое либо изотермическое распределение одноименных зарядов в самосогласованном поле.*

Используя связь потенциала с напряженностью электрического поля  $E = -grad(\varphi)$  в [8], Френкель переводит (6.4) в уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho_2. \quad (6.11)$$

Согласование задачи осуществляется с помощью функции распределения Больцмана

$$\rho_2 = \rho_0 \exp(-q\varphi / kT), \quad (6.12)$$

которая следует из (6.1), (6.2) для изотермического равновесия зарядов с уравнением состояния

$$p = \rho_2 kT / q, \quad (6.13)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана;  $q$  – элементарный заряд частицы;  $T$  – абсолютная температура системы.

Подставляя (6.12) в (6.11), получаем уравнение (сравним с (4.5b))

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho_0 \exp(-q\varphi / kT), \quad (6.14)$$

которое описывает трехмерное распределение потенциала в изотермической конфигурации одноименных зарядов, удерживаемой в равновесии самосогласованным полем.

Обобщая результаты [8] на уравнение состояния (6.10), получим уравнение

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho_0(1 - \varphi / \varphi_n)^n, \quad (6.15)$$

где  $\varphi_n = K_1(n + 1)\rho_0^{1/n}$  – значение потенциала, при котором функция распределения обращается в нуль. Уравнение (6.15) является полевым эквивалентом уравнений (6.9), (6.10) и позволяет рассчитать трехмерное распределение электрического потенциала в политропической конфигурации одноименных зарядов, удерживаемых в равновесии самосогласованным полем. В частном случае радиальной зависимости  $\varphi = \varphi(r)$  уравнение (6.15) представляет собой полевой аналог уравнения Лэна–Эмдена (1.18), отличающийся от него только знаком в правой части. Это указывает на замену сил притяжения между гравитирующими частицами силами кулоновского отталкивания между зарядами.

## ЧАСТЬ 2. САМОСОГЛАСОВАННЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫЕ СИСТЕМЫ С ПЛОСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

### ГЛАВА 1. БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

#### § 7. Нерелятивистский газ гравитирующих частиц

Ниже, на основе гамильтоновой функции, описывающей коллективное взаимодействие гравитирующих частиц с плоским самосогласованным полем, проводится классификация возбуждаемых полей и состояний движения частиц в бесстолкновительных системах, а также выводятся законы пространственного распределения потенциала и напряженности самосогласованного поля гравитации, энергии и концентрации частиц системы.

Определяются гравидинамические характеристики бесстолкновительного движения нерелятивистских и релятивистских частиц. Обосновываются физические причины существования исследуемого равновесия. Определяется размер пространства взаимодействия и его зависимость от релятивистского фактора. Рассчитывается период движения гравитирующей частицы в пространстве взаимодействия и выясняется его зависимость от релятивистского фактора. Находятся бесстолкновительные функции распределения. Приводятся оценки для самосогласованных систем, состоящих из нейтронов.

**Бесстолкновительная функция распределения и уравнение равновесия.** Рассмотрим двухпотокное движение нерелятивистских гравитирующих частиц системы, ограниченное по продольной координате  $x$ , при котором уравнение непрерывности имеет вид

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 = 0, \quad (7.1)$$

где  $\mathbf{j}_1$  – плотность потока частиц, движущихся в положительном направлении оси  $x$ , а  $\mathbf{j}_2$  – плотность потока частиц, движущихся против оси  $x$ . При этом  $j_1 = j_2 = j_0$ .

В силу плоской симметрии задачи для любого потока в (7.1)

$$j_0 = n(x)v(x) / 2 = n_0 v_0 / 2 = const, \quad (7.2)$$

где  $n$  – концентрация системы в произвольной плоскости;  $v$  – соответствующий ей модуль скорости частиц системы;  $n_0$  – минимальная концентрация системы в плоскости  $x=0$ ;  $v_0$  – максимальная скорость частиц системы (здесь и далее индекс 0 относится к плоскости  $x=0$ ).

Предположим, что частицы системы совершают прямолинейное движение в направлении оси и обратно, не изменяя значений поперечных координат при возврате. При этом за время движения любой частицы не происходит столкновений с частицами, которые могут оказаться на занятой траектории, т.е. система бесстолкновительна.

Движение гравитирующей частицы в статическом самосогласованном поле не зависит от времени явно и определяется интегралом энергии

$$E = \frac{mv^2}{2} + m\varphi = const, \quad (7.3)$$

где  $E$  – значение полной механической энергии, одинаковое у всех частиц из-за их моноэнергетичности,  $m$  – масса гравитирующей частицы. Калибровка потенциала самосогласованного поля выбрана в виде  $\varphi_0=0$ .

Пространственное распределение потенциала статического самосогласованного гравитационного поля  $\varphi$  описывается уравнением Пуассона, в правой части которого концентрация частиц должна быть выражена через функцию распределения по координате:

$$\varphi'' = 4\pi Gmn(\varphi), \quad (7.4)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная. Штрихи в (7.4) обозначают дифференцирование по  $x$ .

Бесстолкновительная функция распределения нерелятивистских частиц  $n(\varphi)$  может быть получена из (7.2), (7.3) и имеет вид

$$n = n_0 / \sqrt{1 - \varphi / \varphi_n}, \quad (7.5)$$

где  $\varphi_n = \frac{E}{m} = \frac{v_0^2}{2}$  – наибольшее значение гравитационного потенциала системы, достигаемое на ее границах. Отличие полученной функции распределения от равновесной бoльцмановской заключается в том, что в бесстолкновительном случае концентрация частиц системы больше там, где больше ее потенциал.

Подставляя выражение (7.5) в (7.4), преобразуем (7.4) к виду

$$\varphi'' / 4\pi = 2Gmj_0 / \sqrt{2(\varphi_n - \varphi)}. \quad (7.6)$$

Уравнение (7.6) описывает статические двухпотокные равновесия гравитирующих частиц с самосогласованным полем.

**Гамильтонова функция системы.** Уравнение (7.6) имеет первый интеграл, являющийся гамильтонианом взаимодействия в системе и соответствующий ее полному давлению  $P$  :

$$(\varphi')^2 / 8\pi G + 2mj_0\sqrt{2(\varphi_n - \varphi)} = P = H(\varphi' / 4\pi G, \varphi, x) = const. \quad (7.7)$$

В (7.7) первое слагаемое представляет собой давление самосогласованного поля системы, а второе – бесстолкновительное давление частиц плo

ской системы  $p$ , совпадающее с удвоенной объемной плотностью их кинетической энергии. Закон сохранения (7.7) впервые получен в [13].

Канонически сопряженные величины в функции Гамильтона (7.7) – обобщенный импульс  $\varphi' / 4\pi G$  и обобщенная координата  $\varphi$ . Роль обобщенного времени играет координата  $x$ . Эффективная потенциальная энергия системы в (7.7) совпадает с давлением частиц  $U(\varphi) = p$ . Закон сохранения (7.7) выполняется как следствие того, что гамильтониан системы не зависит от обобщенного времени явно, то есть

$$\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

Это равенство выполняется при отсутствии любых внешних статических полей гравитации, рассматриваемых по отношению к самосогласованному полю гравитации системы. Класс функций пространственного распределения потенциала самосогласованного поля гравитации и его производной устанавливается всегда таким, чтобы в любой плоскости по длине взаимодействия оставалась неизменной сумма давлений самосогласованного поля и частиц системы (5.7). Это приводит к тому, что в бесстолкновительной нерелятивистской системе выполняется закон коллективного взаимодействия (5.5), хотя его конкретный вид формируется только при решении задачи.

Закон сохранения (7.7), следующий из (5.5), означает также, что в любой плоскости пространства взаимодействия рассматриваемой системы градиенты давлений самосогласованного поля и частиц системы равны между собой, но имеют различные направления.

**Распределения физических величин.** Как видно из (7.7), величина полного давления в системе всегда неотрицательна. Определим его в плоскости  $x=0$ . Предположим, что в этой плоскости давление самосогласованного поля обращается в нуль, или  $\varphi'_0 = 0$ . Тогда полное давление (7.7) задано исходными величинами  $j_0, m, E$ :

$$P = j_0 \sqrt{8mE} \quad (7.8)$$

и определяет наибольшее значение градиента потенциала на границах системы:

$$\varphi'_H = \sigma \sqrt{8\pi G j_0 \sqrt{8mE}} = \sigma \sqrt{8\pi G P}, \quad (7.9)$$

где

$$\sigma = \text{sign}(\varphi'_H) = \text{sign}(\varphi'). \quad (7.10)$$

Интегрирование уравнения (7.7) представим в виде

$$\sigma x = \int_0^{\varphi} d\varphi / \sqrt{8\pi G \left[ P - 2mj_0 \sqrt{2(\varphi_n - \varphi)} \right]}. \quad (7.11)$$

Интегрируя (7.11), получим

$$\sigma x / l = \left( 2 + 2mj_0 \sqrt{2(\varphi_n - \varphi)} / P \right) \left( 1 - 2mj_0 \sqrt{2(\varphi_n - \varphi)} / P \right)^{1/2}, \quad (7.12)$$

где

$$\begin{aligned} l &= P^{3/2} / (6\sqrt{8\pi G} m^2 j_0^2) = 2v_0 / (3\sqrt{8\pi G} m n_0) = \\ &= 2v_0^2 / (3g_n) \end{aligned} \quad (7.13)$$

– пространственный масштаб системы;  $g_n$  – модуль ускорения частиц на границах системы, совпадающий с (7.9).

Для получения зависимости  $\varphi = \varphi(x)$  введем безразмерные переменные

$$t = 2mj_0 \sqrt{2(\varphi_n - \varphi)} / P, \quad z = \sigma x / l, \quad (7.14)$$

изменяющиеся в (7.12) в пределах  $0 \leq t \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 2$ . Неотрицательность  $z$  определяет (7.10) в виде

$$\sigma = \begin{cases} +1 & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x = 0; \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (7.15)$$

Тогда из (7.12) можно получить кубическое уравнение с параметром  $t^3 + 3t^2 - 4 + z^2 = 0$ .

Исследуя поведение его действительных решений способом введения вспомогательных величин и отбрасывая посторонние решения, получим законы пространственного распределения гравитационного потенциала системы в области  $0 \leq z \leq 2$ :

$$\varphi_1 / \varphi_n = 1 - (2 \cos \theta_1 - 1)^2 \quad \text{при } 0 \leq z \leq \sqrt{2}; \quad (7.16)$$

$$\varphi_2 / \varphi_n = 1 - (2 \cos \theta_2 - 1)^2 \quad \text{при } \sqrt{2} \leq z \leq 2, \quad (7.17)$$

где

$$\theta_1 = \arccos(1 - z^2 / 2) / 3; \quad (7.18)$$

$$\theta_2 = \left[ \pi - \arccos(z^2 / 2 - 1) \right] / 3. \quad (7.19)$$

Из соотношений (7.16) – (7.19) видно, что самосогласованное поле, создаваемое коллективом частиц, представляет собой симметричную относительно  $x=0$  потенциальную яму, ограниченную в пространстве. При выполнении условия  $\sigma x / l \ll 1$  потенциал на дне ямы изменяется по квадратичному закону

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_H} \approx \frac{2}{9} \frac{x^2}{l^2}. \quad (7.20)$$

Пространство взаимодействия системы ограничено размерами  
 $L=4l$ . (7.21)

Распределение проекции напряженности самосогласованного поля по длине системы (или ускорение частиц) находится дифференцированием (7.16), (7.17):

$$g_1(x) = -2\sigma g_H \sin(\theta_1 / 2) \text{ при } 0 \leq z \leq \sqrt{2}; \quad (7.22)$$

$$g_2(x) = -2\sigma g_H \sin(\theta_2 / 2) \text{ при } \sqrt{2} \leq z \leq 2. \quad (7.23)$$

Законы изменения скорости частиц и бесстолкновительного давления по длине системы находятся из (7.3) и второго слагаемого в (7.7) и имеют вид

$$p_1 / p_0 = v_1 / v_0 = 2 \cos \theta_1 - 1 \text{ при } 0 \leq z \leq \sqrt{2}; \quad (7.24)$$

$$p_2 / p_0 = v_2 / v_0 = 2 \cos \theta_2 - 1 \text{ при } \sqrt{2} \leq z \leq 2, \quad (7.25)$$

где  $p_0 = n_0 m v_0^2$  – давление в плоскости  $x=0$ , а  $v_0 = P / 2mj_0$ . Заметим, что результат дифференцирования (7.24), (7.25) по времени совпадает с (7.22), (7.23).

Закон изменения концентрации находится из (7.5) и имеет вид

$$n_1 / n_0 = (2 \cos \theta_1 - 1)^{-1} \text{ при } 0 \leq z \leq \sqrt{2}; \quad (7.26)$$

$$n_2 / n_0 = (2 \cos \theta_2 - 1)^{-1} \text{ при } \sqrt{2} \leq z \leq 2. \quad (7.27)$$

Градиент давления частиц системы всегда направлен к плоскости  $x=0$  и распределен на длине системы по закону

$$\frac{dp_1}{dx} = -\frac{2\sigma p_0}{3l} \frac{\sin \theta_1}{\cos(3\theta_1 / 2)} \text{ при } 0 \leq z \leq \sqrt{2}; \quad (7.28)$$

$$\frac{dp_2}{dx} = -\frac{2\sigma p_0}{3l} \frac{\sin \theta_2}{\cos(3\theta_2 / 2)} \text{ при } \sqrt{2} \leq z \leq 2. \quad (7.29)$$

Распределение давления поля по длине системы имеет вид

$$D_1 = g_1^2 / 8\pi G = 4p_0 \sin^2(\theta_1 / 2) \text{ при } 0 \leq z \leq \sqrt{2}; \quad (7.30)$$

$$D_2 = g_2^2 / 8\pi G = 4p_0 \sin^2(\theta_2 / 2) \text{ при } \sqrt{2} \leq z \leq 2. \quad (7.31)$$

Из соотношений (7.24) и (7.30), а также (7.25) и (7.31) легко убедиться, что сумма давлений частиц и поля системы в любой плоскости пространства взаимодействия остается постоянной и равной полному давлению системы  $P = p_0$ .

Дифференцирование (7.30) и (7.31) показывает, что градиент давления поля в любой плоскости системы направлен противоположно гра

диенту давления частиц системы (7.28), (7.29) и равен ему по модулю. Как следствие этого, градиент полного давления системы в любой плоскости обращается в нуль.

Направления градиентов позволяют выяснить направления объемных сил, удерживающих рассматриваемую систему в ограниченной области пространства в равновесии. Силы, стягивающие слой вещества, направлены к плоскости  $x=0$ , и в соответствии с соотношением (5.3) вектор  $\mathbf{g}$  [его проекция на ось  $x$  дается соотношениями (7.22), (7.23)] сонаправлен градиенту давления частиц системы (7.28), (7.29). Силы, расширяющие слой, создаются градиентом давления самосогласованного поля (5.8), который противоположен градиенту давления частиц (7.28), (7.29), равен ему по модулю и тем самым, компенсируя его действие, удерживает систему в равновесии.

**Фазовая траектория.** Фазовая траектория системы следует из (7.7):

$$\varphi' / g_n = \sigma \sqrt{1 - \sqrt{1 - \varphi / \varphi_n}}. \quad (7.32)$$

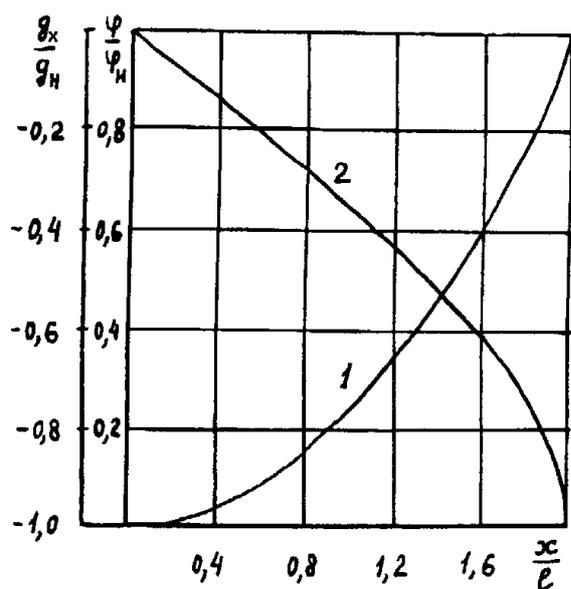


Рис. 7.1

Как видно из (7.32), график фазовой траектории системы в координатах  $\left(\frac{\varphi}{\varphi_n}, \frac{\varphi'}{g_n}\right)$  представляет собой ограниченную кривую, которая начинается в точке (1,-1), проходит через точку (0,0) и заканчивается в точке (1,1).

Период движения гравитирующей частицы в самосогласованном поле находится интегрированием:

$$\tau = 4 \int_0^{L/2} (dx / v_1 + dx / v_2) = 12l / v_0 = 3T / 2, \quad (7.33)$$

где  $T = 8l / v_0$  – временной масштаб системы.

**Обсуждение результатов.** На рис. 7.1, 7.2 представлены гравидинамические и кинематические характеристики исследуемой системы, рассчитанные по соотношениям (7.16) – (7.19) и (7.22) – (7.27) для  $\sigma=+1$ . На рис. 7.1 приведены распределения потенциала  $\varphi / \varphi_n$  (кривая 1) и проекции на

пряженности самосогласованного поля гравитации  $g_x / g_n$  (кривая 2) по  $x / l$  на половине длины системы. На рис. 7.2 изображены зависимости концентрации  $n / n_0$  (кривая 1) и скорости движения частиц  $v / v_0$  (кривая 2) от координаты  $x / l$  на половине длины системы.

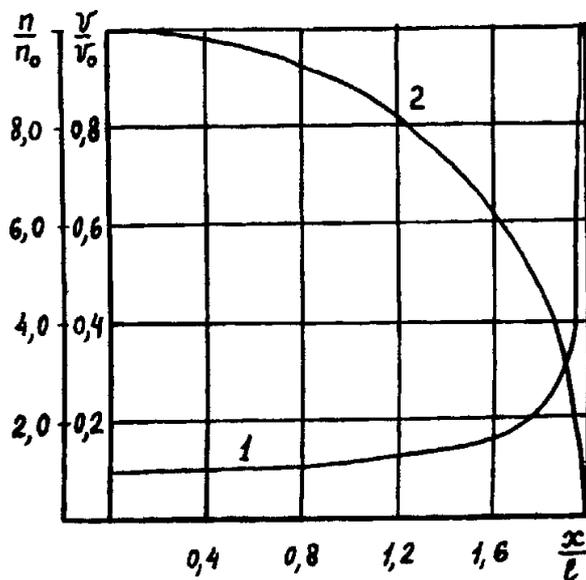


Рис. 7.2

На рис. 7.3 приведена верхняя часть фазовой траектории системы для  $\sigma=+1$ . Нижняя часть получается зеркальным отображением верхней части относительно оси  $\varphi/\varphi_n$ . Как видно из соотношений (7.16) – (7.27) и рис. 7.1 и 7.2, частицы, пересекающие плоскость  $x=0$  в направлении оси  $x$  со скоростью  $v_0$ , в дальнейшем движении неравномерно замедляются. Причина замедления связана с тем, что самосогласованное поле представляет для них потенциальный барьер.

Все частицы потока останавливаются на вершине барьера при  $\varphi=\varphi_n$ . Частицы, участвующие в создании обратного потока, начинают движение с нулевой скоростью в плоскости возврата  $x=L/2$ . Двигаясь с переменным ускорением, они достигают максимальной скорости  $v_0$  в плоскости  $x=0$ . Наибольшие значения потенциала, напряженности поля и бесконечное значение концентрации системы достигаются в плоскости возврата. Из чего следует, что границы системы резкие. Гравитирующие частицы противоположного потока, пересекающие плоскость  $x=0$ , движутся аналогичным образом.

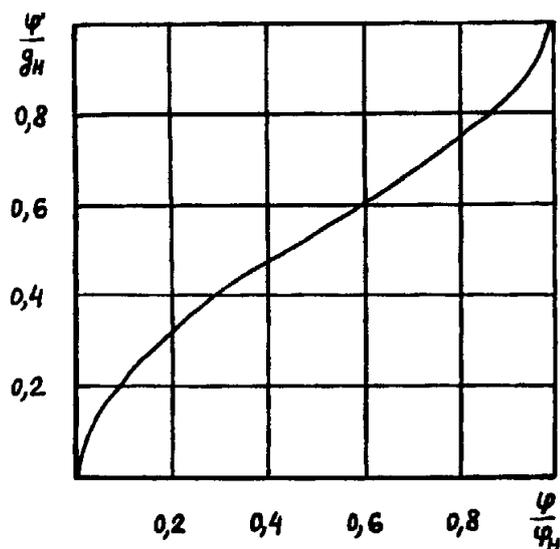


Рис. 7.3

Плоскость нулевого давления поля делит все пространство взаимодействия на две области с разными направлениями вектора напряженности по отношению к оси  $x$ .

**Поведение частиц вблизи плоскости возврата.** Рассмотрим поведение частиц системы вблизи плоскости возврата. Введем для этого безразмерную координату  $t/l$ , отсчитываемую от этой плоскости против оси  $x$ :

$$t/l = L/2l - x/l. \quad (7.34)$$

С учетом (7.34) переменная  $z$  примет вид

$$z = 2 - t/l. \quad (7.35)$$

Предполагая  $t/l \ll 1$ , выберем решение, принадлежащее интервалу  $\sqrt{2} \leq z \leq 2$ . Тогда

$$3\theta = \arccos(z^2/2 - 1) = \arccos(1 - 2t/l) \ll 1. \quad (7.36)$$

Выписывая степенной ряд для  $\cos 3\theta$  до членов второго порядка малости по  $3\theta$ , придем к равенству

$$\theta^2 = 4t/9l. \quad (7.37)$$

Оставляя члены второго порядка малости по  $\theta$  в разложении (7.17), получим линейную зависимость потенциала системы вблизи плоскости возврата

$$\varphi = \varphi_H (1 - 4t/3l). \quad (7.38)$$

Напряженность поля гравитации в рассматриваемой области однородна и направлена по оси  $t$ :

$$g_t = 4\varphi_H / (3l) = 4E / (3ml) = 2v_0 / 3l. \quad (7.39)$$

Из (7.39) следует, что движение гравитирующих частиц в области возврата равнопеременное с изменением модуля скорости по закону

$$v = (2g_t t)^{1/2} = 2v_0 \sqrt{t/3l}, \quad (7.40)$$

а закон изменения концентрации на границе системы имеет особенность  $\sim (t)^{-1/2}$ :

$$n = 2j_0 / \sqrt{2g_t t}. \quad (7.41)$$

## § 8. Релятивистский газ гравитирующих частиц

**Бесстолкновительная функция распределения релятивистских частиц.** Исследуем двухпотокное движение релятивистских гравитирующих частиц, как и ранее, ограниченное по продольной координате  $x$ . Для этого движения остаются в силе соотношения (7.1), (7.2), а (7.3) заменяется выражением

$$E = mc^2 / \sqrt{1 - v_0 / c^2} = \gamma_0 mc^2 = \gamma mc^2 + m\varphi = \text{const}, \quad (8.1)$$

где  $\gamma$  – релятивистский фактор,  $m$  – масса покоя частицы,  $c$  – скорость света в вакууме.

В уравнение (7.4) нужно подставить бесстолкновительную релятивистскую функцию распределения, которая получается из (7.2) и (8.1):

$$n / n_0 = v_0 / v = \sqrt{\frac{1 - \gamma_0^{-2}}{1 - (\gamma_0 - \varphi / c^2)^{-2}}}, \quad (8.2)$$

где  $\gamma_0$  определяет наибольший потенциал системы, достигаемый на ее плоскостях возврата:

$$\varphi_{H2} / c^2 = \gamma_0 - 1. \quad (8.3)$$

**Гамильтонова функция системы.** Гамильтониан взаимодействия рассматриваемой системы имеет вид

$$(\varphi')^2 / 8\pi G + 2j_0 mc \sqrt{(\gamma_0 - \varphi / c^2)^2 - 1} = P = const. \quad (8.4)$$

Определяя величину полного давления (8.4) в плоскости  $x=0$  в предположении существования плоскости нулевого давления поля ( $\varphi'_0 = 0$ , с калибровкой  $\varphi_0 = 0$ ), получим

$$P = 2j_0 mc \sqrt{\gamma_0^2 - 1}. \quad (8.5)$$

Соотношение (8.5) задает наибольшее значение градиента потенциала на границе системы

$$\varphi'_{H2} = \sigma \sqrt{8\pi GP}. \quad (8.6)$$

**Распределения физических величин.** Интегрирование уравнения (8.4) при замене  $v = \alpha(\gamma_0 - \varphi / c^2)$  представим в виде

$$\sigma \frac{x}{l_2} = \int_{v_1}^{v_2} dv / \sqrt{1 - \sqrt{v^2 - \alpha^2}}, \quad (8.7)$$

где

$$\alpha = 2j_0 mc / P = (\gamma_0^2 - 1)^{-1/2}; v_1 = \alpha(\gamma_0 - \varphi / c^2); v_2 = \alpha\gamma_0; \quad (8.8)$$

$$l_2 = c\sqrt{P} / (2mj_0\sqrt{8\pi G}) = cg_{H2} / (16\pi Gj_0 m) \quad (8.9)$$

– пространственный масштаб системы;  $g_{H2}$  – модуль ускорения частиц на плоскостях возврата.

Вводя переменную  $z = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1} = \exp[Arch(v / \alpha)]$ , приведем (8.7) к комбинации эллиптических интегралов

$$\sigma x / l_2 = \left( \gamma_0 \sqrt{\gamma_0^2 - 1} \right)^{-1/2} \times \left[ 2\gamma_0 E(\theta, k) - \left( \gamma_0 - \sqrt{\gamma_0^2 - 1} \right) F(\theta, k) - \frac{\Pi(\theta, 1, k)}{\gamma_0 + \sqrt{\gamma_0^2 - 1}} \right], \quad (8.10)$$

где  $F, E, \Pi$  – эллиптические интегралы I, II, III родов соответственно;

$$\theta = \arcsin \left( 1 - \frac{s}{\gamma_0 + \sqrt{\gamma_0^2 - 1}} \right)^{1/2}; \quad (8.11)$$

$$s = (\gamma_0 - \varphi / c^2) + \sqrt{(\gamma_0 - \varphi / c^2)^2 - 1}; \quad (8.12)$$

$$k = \left[ \left( 1 + \sqrt{1 - \gamma_0^{-2}} \right) / 2 \right]^{1/2} \quad (8.13)$$

– параметр удержания системы в двухпотоковом состоянии, квадрат которого изменяется в пределах  $1/2 \leq k^2 < 1$ .

Длина пространства взаимодействия системы  $L_2$  ограничена размерами

$$L_2 / 2l_2 = \left( \gamma_0 \sqrt{\gamma_0^2 - 1} \right)^{-1/2} \times \left[ 2\gamma_0 E(\theta_0, k) - \left( \gamma_0 - \sqrt{\gamma_0^2 - 1} \right) F(\theta_0, k) - \frac{\Pi(\theta_0, 1, k)}{\gamma_0 + \sqrt{\gamma_0^2 - 1}} \right], \quad (8.14)$$

где

$$\theta_0 = \arcsin \left[ 1 - \left( \gamma_0 + \sqrt{\gamma_0^2 - 1} \right)^{-1} \right]^{1/2}. \quad (8.15)$$

При получении (8.10), (8.14) были использованы следующие соотношения:

$$\int_x^a x dx / \sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)} = \frac{2cF(\varphi, k)}{\sqrt{a-c}} + 2\sqrt{a-c}E(\varphi, k); \quad (8.16)$$

$$\int_x^a dx / \sqrt{(a-x)(x-b)^3(x-c)} = 2\Pi(\varphi, 1, k) / [(a-b)\sqrt{a-c}], \quad (8.17)$$

существующие при условии  $a > x > b > c$ ,  $\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{a-x}{a-b}}$ ,  $k = \sqrt{\frac{a-b}{a-c}}$ .

На рис. 8.1 представлена зависимость длины полупространства взаимодействия системы  $L_2 / (2l_2)$  от релятивистского фактора  $\gamma_0$ , вычисленная из соотношения (8.14).

**Фазовые траектории.** Поскольку получить прямую зависимость  $\varphi = \varphi(x)$  в рассматриваемом случае не удастся, связь между проекцией напряженности и потенциалом системы можно определить из (8.4):

$$\frac{g}{g_{H2}} = -\sigma \left\{ 1 - \sqrt{\frac{[\gamma_0 - (\gamma_0 - 1)\varphi / \varphi_{H2}]^2 - 1}{\gamma_0^2 - 1}} \right\}^{1/2}. \quad (8.18)$$

Уравнение фазовых траекторий системы, зависящее от параметра  $\gamma_0$ , получается из соотношения (8.18), взятого с противоположным знаком. Графики фазовых траекторий системы в координатах  $\left(\frac{\varphi}{\varphi_{H2}}, \frac{\varphi'}{g_{H2}}\right)$  представляют собой ограниченные кривые, одна ветвь которых ( $\sigma=-1$ ) начинается в точке (0,0), а заканчивается в точке (1,1). Другая ветвь графика получается зеркальным отображением первой ветви относительно оси  $\varphi/\varphi_{H2}$ . При  $\gamma_0 \rightarrow 1$  (8.18) переходит в (7.32).

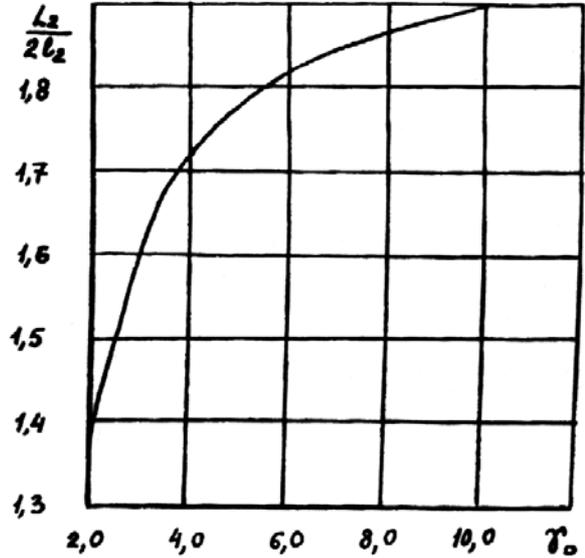


Рис. 8.1

На рис. 8.2 представлены фазовые траектории системы, рассчитанные при  $\sigma = +1$  для различных значений параметра  $\gamma_0$ . Кривая 1 соответствует значению  $\gamma_0 = 2$ , кривая 2 соответствует  $\gamma_0 = 6$ , кривая 3 соответствует  $\gamma_0 = 20$ .

Время пролета пространства взаимодействия частицей вычисляется из соотношения

$$\tau = 4 \int_0^{L/2} \frac{dx}{v(x)} = \frac{4c}{g_{H2}} \int_1^{\gamma_0} \frac{\gamma d\gamma}{\sqrt{1 - \alpha \sqrt{\gamma^2 - 1}} \sqrt{\gamma^2 - 1}} = \frac{8c}{g_{H2}} \sqrt{\gamma_0^2 - 1}. \quad (8.19)$$

При  $\gamma_0 \rightarrow 1$  (8.19) переходит в (7.33).

**Обсуждение результатов.** Численное моделирование соотношений (8.2), (8.10), (8.18) показало, что характер движения релятивистских частиц, распределения их потенциала, проекции напряженности поля, концентрации по длине системы остается таким же, как и для нерелятивистских частиц, хотя и проявляет зависимость от релятивистской энергии  $\gamma_0$ .

Отметим своеобразие предельного перехода к нерелятивистским соотношениям при  $\gamma_0 \rightarrow 1$  в (8.10). Учитывая асимптотические выражения для сомножителей, стоящих перед эллиптическими интегралами, и разложения  $k=(1/2)^{1/2}$ ,  $\gamma_0^2 \approx 1 + u_0^2$ ,  $\gamma^2 \approx 1 + u^2$ , получим

$$\sigma x / l_2 \approx \frac{1}{\sqrt{u_0}} [2E(\theta_2, k) - (1 - u_0)F(\theta_2, k) - (1 - u_0)\Pi(\theta_2, 1, k)], \quad (8.20)$$

где  $\theta_2 \approx (u_0 - u)^{1/2}$ . Воспользовавшись разложением в ряды эллиптических интегралов для малых значений  $\theta_2$ , приведем (8.20) к виду, совпадающему с (7.12):

$$\sigma x / l = (2 + u / u_0)(1 - u / u_0)^{1/2}, \quad (8.21)$$

где  $l = 2u_0 l_2 / 3$ ,  $u / u_0 = v / v_0 = \frac{2mj_0}{P} v$ .

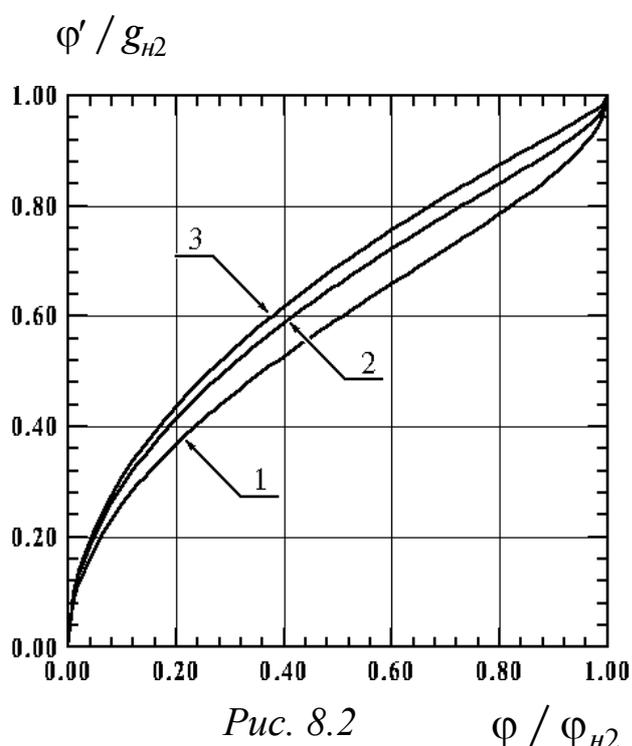


Рис. 8.2

$\phi / \phi_{н2}$

**Оценки.** Приведем оценки, характеризующие параметры самосогласованных систем, состоящих из нейтронов. Предположим, что они связаны самосогласованным полем и имеют неограниченное время жизни. При бесстолкновительном взаимодействии нерелятивистского потока с концентрацией  $n_0 = 10^{20} \text{ м}^{-3}$  и скоростью  $v_0 = 10^6 \text{ м/с}$  плотность одного из потоков  $j_0 = 5 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ . Наибольшее значение потенциала системы  $\phi_n = 5 \cdot 10^{11} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$  достигается на ее границах. Полное давление в системе  $P = 1,7 \cdot 10^5 \text{ Па}$  совпадает с давлением поля на гра-

нице. Наибольшее значение напряженности поля гравитации, достигаемое на границах системы  $g_n = 17 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2$ . Пространственный масштаб  $l = 4,0 \cdot 10^{13} \text{ м}$ , размер пространства взаимодействия  $L = 1,6 \cdot 10^{14} \text{ м}$ . Временной масштаб системы  $T = 3,2 \cdot 10^8 \text{ с}$ , а период движения нейтрона  $\tau = 4,8 \cdot 10^8 \text{ с}$ . Полученные сравнительно большими значения пространственно-временных характеристик системы можно объяснить слабостью гравитационного взаимодействия по сравнению с полевым.

## § 9. Нерелятивистский газ одноименных зарядов

Решения плоских статических задач о бесстолкновительном движении потоков одноименных зарядов, взаимодействующих с внешним или собственным полем, а также аналогичных задач в системах со столкновениями давно известны в вакуумной электронике и стали уже хрестоматийными.

Парадоксально, но ни в оригинальных публикациях [19–24], ни в дальнейших изложениях в монографиях и учебниках [8,25–30] не было замечено существование в упомянутых работах сохраняющейся величины, являющейся гамильтонианом взаимодействия исследуемых систем.

Как будет показано ниже, обнаруженный гамильтониан описывает коллективное бесстолкновительное взаимодействие моноэнергетических зарядов одного знака с плоским статическим самосогласованным полем. Оказывается, что класс функций распределения потенциала плоского самосогласованного поля не может быть произвольным. Их полный набор определяется гамильтонианом взаимодействия, совпадающим с полным давлением системы, которое в этом случае состоит из разности давлений самосогласованного поля и зарядов системы.

Развиваемый ниже канонический формализм простейших плоских статических самосогласованных полей дает уникальную возможность провести однозначную классификацию возбуждаемых полей и состояний движения зарядов с точки зрения аналитической механики, а также уточнить как пределы применимости известных результатов, так и их физическую адекватность.

В данном параграфе найдены законы распределения скалярных плоских самосогласованных полей и нерелятивистских зарядов бесстолкновительных систем, находящихся в состояниях с положительным, нулевым и отрицательным полными давлениями. Обоснована физика удержания зарядов самосогласованным полем, определена длина пространства взаимодействия при положительном и нулевом полном давлении. Рассчитан период движения заряда в пространстве взаимодействия. В состоянии с отрицательным полным давлением обнаружен эффект ускорения зарядов плоским самосогласованным полем. Получена бесстолкновительная функция распределения зарядов системы. Приведены оценки для самосогласованных систем, состоящих из электронов.

***Бесстолкновительная функция распределения и уравнение равновесия.*** Рассмотрим двухпотокное движение системы нерелятивистских положи

тельных зарядов, ограниченное по продольной координате  $x$ , при котором уравнение непрерывности имеет вид

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 = 0, \quad (9.1)$$

где  $j_1$  – плотность тока, выходящего из плоскости  $x = 0$  в свободное от внешних полей и электродов полупространство в положительном направлении оси  $x$ ;  $j_2$  – плотность тока, возвращающегося в плоскость  $x = 0$ . При этом  $j_1 = j_2 = j_0$ .

В силу плоской симметрии для любого потока в (9.1)

$$j_0 = \frac{q}{2} n(x) v(x) = \frac{q}{2} n_0 v_0 = const, \quad (9.2)$$

где  $n$  – концентрация зарядов в произвольной плоскости;  $v$  – соответствующий ей модуль скорости зарядов системы;  $n_0$  – концентрация зарядов системы в плоскости  $x = 0$ ;  $v_0$  – соответствующий ей модуль скорости зарядов системы. Далее везде индекс 0 относится к плоскости  $x = 0$ .

Магнитное поле отсутствует в такой системе противоположных токов, а заряды совершают одномерное движение по непересекающимся прямым в направлении оси и обратно, не изменяя значений поперечных координат при отражении. Бесстолкновительность системы здесь проявляется в том смысле, что за время движения любого ее заряда не происходит столкновений с зарядами, которые могут оказаться на занятой траектории.

Движение каждого заряда в плоском самосогласованном поле не зависит от времени явно вследствие статичности задачи и определяется интегралом энергии:

$$Y = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + q\varphi = const, \quad (9.3)$$

где  $Y$  – значение полной механической энергии, одинаковое у всех зарядов из-за их моноэнергетичности;  $m$  – масса элементарного заряда  $q$  системы. Калибровка самосогласованного поля выбрана в виде  $\varphi_0 = 0$ .

Пространственное распределение скалярного потенциала  $\varphi$  статического макроскопического самосогласованного поля, возбуждаемого движущимися зарядами системы, находится из уравнения Пуассона, в правой части которого плотность зарядов должна быть выражена через функцию распределения по координате [14] (дано в СГС):

$$\varphi'' = -4\pi q n(\varphi), \quad (9.4)$$

где штрихи обозначают дифференцирование по  $x$ .

Бесстолкновительная функция распределения нерелятивистских зарядов  $n(\varphi)$  следует из уравнения непрерывности (9.2) и закона сохранения (9.3) и имеет вид

$$n = n_0 / \sqrt{1 - \varphi / \varphi_{н1}}, \quad (9.5)$$

где  $\varphi_{н1} = Y / q = mv_0^2 / 2q$  – наибольшее значение потенциала, достигаемое на границе системы. Функция распределения (9.5) задает распределение зарядов для всех возможных классов решений (9.4). Отличие полученной функции распределения от равновесной больцмановской заключается в том, что в случае бесстолкновительной системы концентрация ее зарядов больше там, где больше ее скалярный потенциал. Прослеживается глубокая аналогия с (7.5).

Подставляя (9.5) в (9.4), преобразуем (8.4) к виду

$$\frac{\varphi''}{4\pi} = - \frac{2j_0}{\sqrt{\frac{2}{m}(Y - q\varphi)}}. \quad (9.6)$$

Уравнение (9.6) описывает статические двухпоточковые равновесия одноименных зарядов с самосогласованным полем.

**Гамильтонова функция системы.** Уравнение (9.6) имеет первый интеграл, являющийся вторым гамильтонианом системы и соответствующий ее полному давлению  $P$  :

$$\frac{(\varphi')^2}{8\pi} - \frac{2j_0}{q} \sqrt{2m(Y - q\varphi)} = H\left(\frac{\varphi'}{4\pi}, \varphi\right) = P = const. \quad (9.7)$$

В (9.7) уменьшаемое представляет собой давление самосогласованного поля системы, а вычитаемое – бесстолкновительное давление зарядов плоской системы  $p$ , совпадающее с удвоенной объемной плотностью их кинетической энергии. Интеграл полного давления (9.7) получен впервые в [31,32].

Канонически сопряженные величины в функции Гамильтона (9.7) – это обобщенный импульс  $\varphi' / 4\pi$  и обобщенная координата  $\varphi$ . Роль обобщенного времени играет координата  $x$ . Эффективная потенциальная энергия системы в (9.7) совпадает с давлением частиц, взятым с противоположным знаком:  $U(\varphi) = -p$ . Закон сохранения (9.7) выполняется как следствие того, что гамильтониан системы не зависит от обобщенного времени явно, то есть

$$\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x} = 0. \quad (9.8)$$

Равенство (9.8) выполняется при отсутствии любых внешних статических электрических полей, рассматриваемых по отношению к самосо

гласованному полю системы. Класс функций пространственного распределения потенциала самосогласованного поля и их производных устанавливается всегда таким, чтобы в любой плоскости оставалась неизменной разность давлений самосогласованного поля и зарядов системы. Это приводит к тому, что в бесстолкновительной нерелятивистской системе выполняется закон коллективного взаимодействия (6.5), хотя его конкретный вид формируется только при решении задачи.

Закон сохранения (9.7), следующий из (6.5), означает также, что в любой плоскости пространства взаимодействия рассматриваемой системы градиенты давлений самосогласованного поля и зарядов равны между собой и имеют одинаковые направления.

**Случай положительного полного давления.** Как видно из (9.7), величина полного давления может быть положительной, нулевой и отрицательной. Исследуем случай положительного полного давления. Для этого полное давление (9.7) зададим в плоскости  $x = 0$ :

$$\frac{(\varphi'_0)^2}{8\pi} - \frac{2j_0}{q} \sqrt{2mY} = H\left(\frac{\varphi'_0}{4\pi}, 0\right) = P, \quad (9.9)$$

где  $\varphi'_0$  – значение градиента потенциала в этой плоскости. Направление вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}_0 = -\varphi'_0$  противоположно выбранному направлению оси  $x$ , поскольку все заряды системы в области  $x \geq 0$  положительны. Обе части равенства (9.9) разделим на величину давления поля  $W_0 = E_0^2 / 8\pi$ :

$$\frac{P}{W_0} = 1 - 2\beta = P_1, \quad (9.10)$$

где  $\beta = W_k / W_0$  – параметр состояния самосогласованной системы;  $W_k = n_0 m v_0^2 / 2$  – объемная плотность кинетической энергии зарядов системы в этой плоскости.

Система находится в двухпотоковом состоянии при выполнении неравенства  $0 < P_1 < 1$  или  $0 < \beta < 1/2$ . При движении зарядов системы в этом случае всегда существует такое значение координаты  $x = L$ , при котором эффективная потенциальная энергия системы обращается в нуль и система ограничена. Ее потенциал принимает в этой плоскости наибольшее значение  $\varphi_{n1} = Y / q$ . Плоскость  $x = L$  будем называть в дальнейшем плоскостью возврата потока.

**Распределения физических величин.** Интегрирование уравнения в (9.7) представим в виде

$$x = \int_0^{\varphi} d\varphi / \sqrt{8\pi \left[ P + 2j_0 \sqrt{2m(Y - q\varphi)} / q \right]}.$$

Интегрируя приводимое выражение с учетом того, что для  $P > 0$  при  $0 \leq x \leq L$  градиент потенциала  $\varphi' > 0$ , получим

$$x = x_0 - \frac{q}{12\sqrt{2\pi}mj_0^2} \left[ \frac{2j_0}{q} \sqrt{2m(Y - q\varphi)} + P \right]^{\frac{1}{2}} \times \quad (9.11)$$

$$\times \left[ \frac{2j_0}{q} \sqrt{2m(Y - q\varphi)} - 2P \right],$$

где  $x_0$  - постоянная интегрирования. Выделим пространственный масштаб системы в (9.11), учитывая (9.10):

$$l = \frac{qW_0^{3/2}}{12\sqrt{2\pi}mj_0^2} = \frac{qE_0^3}{384\pi^2mj_0^2}. \quad (9.12)$$

Определим постоянную интегрирования  $x_0$  из условия калибровки  $\varphi(0) = \varphi_0 = 0$ :

$$\frac{x_0}{l} = \left[ \frac{2j_0}{qW_0} \sqrt{2mY} + P_1 \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{2j_0}{qW_0} \sqrt{2mY} - 2P_1 \right] = 2(3\beta - 1). \quad (9.13)$$

Для получения зависимости  $\varphi = \varphi(x)$  введем в (9.11) безразмерные переменные

$$t_1 = \frac{2j_0}{qP} \sqrt{2m(Y - q\varphi)} - 1, \quad z_1 = (x_0 - x) / (lP_1^{3/2}). \quad (9.14)$$

Находя  $t_1 = t_1(z)$  из (9.11), придем к кубическому уравнению с параметром  $t_1^3 - 3t_1 + 2 - z_1^2 = 0$ . Исследуя поведение его действительных решений способом введения вспомогательных величин и отбрасывая посторонние решения, получим законы пространственного распределения потенциала в системе с положительным давлением в единицах  $\varphi_e = qW_0^2 / 8mj_0^2 = 3E_0l / 4 = \varphi_{H1} / 4\beta^2$  в области  $z_1 \geq -2$  :

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_e} = 4\beta^2 - [P_1(1 - \cos\theta_1)]^2 \text{ при } -2 \leq z_1 \leq -\sqrt{2}; \quad (9.15)$$

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_e} = 4\beta^2 - [P_1(1 + 2\cos\theta_2)]^2 \text{ при } -\sqrt{2} \leq z_1 \leq 0; \quad (9.16)$$

$$\frac{\varphi_3}{\varphi_e} = 4\beta^2 - [P_1(1 + 2\cos\theta_3)]^2 \text{ при } 0 \leq z_1 \leq \sqrt{2}; \quad (9.17)$$

$$\frac{\varphi_4}{\varphi_e} = 4\beta^2 - [P_1(1 + 2 \cos \theta_4)]^2 \text{ при } \sqrt{2} \leq z_1 \leq 2; \quad (9.18)$$

$$\frac{\varphi_5}{\varphi_e} = 4\beta^2 - [P_1(1 + 2ch\theta_5)]^2 \text{ при } z_1 \geq 2, \quad (9.19)$$

где

$$\theta_1 = \left( \pi + \arccos(z_1^2 / 2 - 1) \right) / 3; \quad (9.20)$$

$$\theta_2 = \left( \pi + \arccos(1 - z_1^2 / 2) \right) / 3; \quad (9.21)$$

$$\theta_3 = \left( \pi - \arccos(1 - z_1^2 / 2) \right) / 3; \quad (9.22)$$

$$\theta_4 = \left( \arccos(z_1^2 / 2 - 1) \right) / 3; \quad (9.23)$$

$$\theta_5 = \left( Arch(z_1^2 / 2 - 1) \right) / 3. \quad (9.24)$$

Из соотношений (9.15) – (9.24) видно, что самосогласованное поле, создаваемое коллективом зарядов в области  $x \geq 0$ , представляет собой потенциальный барьер, ограниченный в пространстве.

Проекция напряженности самосогласованного поля системы на координату  $x$  находится дифференцированием из (9.15) – (9.19) с учетом (9.20) – (9.24) и второго равенства в (9.14):

$$\frac{E_{1x}}{E_0} = -2P_1^{1/2} \sin \frac{\theta_1}{2} \text{ при } -2 \leq z_1 \leq -\sqrt{2}; \quad (9.25)$$

$$\frac{E_{2x}}{E_0} = -2P_1^{1/2} \cos \frac{\theta_2}{2} \text{ при } -\sqrt{2} \leq z_1 \leq 0; \quad (9.26)$$

$$\frac{E_{3x}}{E_0} = -2P_1^{1/2} \cos \frac{\theta_3}{2} \text{ при } 0 \leq z_1 \leq \sqrt{2}; \quad (9.27)$$

$$\frac{E_{4x}}{E_0} = -2P_1^{1/2} \cos \frac{\theta_4}{2} \text{ при } \sqrt{2} \leq z_1 \leq 2; \quad (9.28)$$

$$\frac{E_{5x}}{E_0} = -2P_1^{1/2} ch \frac{\theta_5}{2} \text{ при } z_1 \geq 2. \quad (9.29)$$

Законы изменения концентрации в системе находятся из (9.11) с учетом (9.2):

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{2\beta}{P_1(1 - 2 \cos \theta_1)} \text{ при } -2 \leq z_1 \leq -\sqrt{2}; \quad (9.30)$$

$$\frac{n_2}{n_0} = \frac{2\beta}{P_1(1 + 2 \cos \theta_2)} \text{ при } -\sqrt{2} \leq z_1 \leq 0; \quad (9.31)$$

$$\frac{n_3}{n_0} = \frac{2\beta}{P_1(1 + 2 \cos \theta_3)} \text{ при } 0 \leq z_1 \leq \sqrt{2}; \quad (9.32)$$

$$\frac{n_4}{n_0} = \frac{2\beta}{P_1(1 + 2 \cos \theta_4)} \text{ при } \sqrt{2} \leq z_1 \leq 2; \quad (9.33)$$

$$\frac{n_5}{n_0} = \frac{2\beta}{P_1(1 + 2ch\theta_5)} \text{ при } z_1 \geq 2. \quad (9.34)$$

Из формул (9.30) – (9.34) и (9.2) легко получить зависимости отношения скорости зарядов  $v(x) / v_0$  от длины системы, которые совпадают с зависимостями отношения давления зарядов  $p(x)$  к  $p_0$ :

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{v_1}{v_0} = \frac{P_1(1 - 2 \cos \theta_1)}{2\beta} \text{ при } -2 \leq z_1 \leq -\sqrt{2}; \quad (9.35)$$

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{v_2}{v_0} = \frac{P_1(1 + 2 \cos \theta_2)}{2\beta} \text{ при } -\sqrt{2} \leq z_1 \leq 0; \quad (9.36)$$

$$\frac{p_3}{p_0} = \frac{v_3}{v_0} = \frac{P_1(1 + 2 \cos \theta_3)}{2\beta} \text{ при } 0 \leq z_1 \leq \sqrt{2}; \quad (9.37)$$

$$\frac{p_4}{p_0} = \frac{v_4}{v_0} = \frac{P_1(1 + 2 \cos \theta_4)}{2\beta} \text{ при } \sqrt{2} \leq z_1 \leq 2; \quad (9.38)$$

$$\frac{p_5}{p_0} = \frac{v_5}{v_0} = \frac{P_1(1 + 2ch\theta_5)}{2\beta} \text{ при } z_1 \geq 2. \quad (9.39)$$

Градиент давления зарядов системы направлен к плоскости  $x=0$  и распределен на длине системы по законам:

$$\frac{dp_1}{dx} = -\frac{2p_0 \sin \theta_1 \sin(3\theta_1 / 2)}{3\beta\sqrt{1 - 2\beta} \sin(3\theta_1 - \pi)} \text{ при } -2 \leq z_1 \leq -\sqrt{2}; \quad (9.40)$$

$$\frac{dp_2}{dx} = -\frac{2p_0 \sin \theta_2 \sin[(3\theta_2 - \pi) / 2]}{3\beta\sqrt{1 - 2\beta} \sin(3\theta_2 - \pi)} \text{ при } -\sqrt{2} \leq z_1 \leq 0; \quad (9.41)$$

$$\frac{dp_3}{dx} = -\frac{2p_0 \sin \theta_3 \sin[(\pi - 3\theta_3) / 2]}{3\beta\sqrt{1 - 2\beta} \sin(\pi - 3\theta_3)} \text{ при } 0 \leq z_1 \leq \sqrt{2}; \quad (9.42)$$

$$\frac{dp_4}{dx} = -\frac{2p_0 \sin \theta_4 \cos(3\theta_4 / 2)}{3\beta\sqrt{1 - 2\beta} \sin(3\theta_4)} \text{ при } \sqrt{2} \leq z_1 \leq 2; \quad (9.43)$$

$$\frac{dp_5}{dx} = -\frac{2p_0 sh\theta_5 ch(3\theta_5 / 2)}{3\beta\sqrt{1 - 2\beta} sh(3\theta_5)} \text{ при } z_1 \geq 2. \quad (9.44)$$

Распределение давления поля по длине системы имеет вид:

$$D_1 = 4P \sin^2(\theta_1 / 2) \text{ при } -2 \leq z_1 \leq -\sqrt{2}; \quad (9.45)$$

$$D_2 = 4P \cos^2(\theta_2 / 2) \text{ при } -\sqrt{2} \leq z_1 \leq 0; \quad (9.46)$$

$$D_3 = 4P \cos^2(\theta_3 / 2) \text{ при } 0 \leq z_1 \leq \sqrt{2}; \quad (9.47)$$

$$D_4 = 4P \cos^2(\theta_4 / 2) \text{ при } \sqrt{2} \leq z_1 \leq 2; \quad (9.48)$$

$$D_5 = 4Pch^2(\theta_5 / 2) \text{ при } z_1 \geq 2. \quad (9.49)$$

Из парных соотношений (9.35) и (9.45), (9.36) и (9.46), (9.37) и (9.47), (9.38) и (9.48), (9.39) и (9.49) легко убедиться, что разность давлений поля и зарядов системы в любой плоскости пространства взаимодействия остается постоянной и равна положительному полному давлению  $P$  системы.

Дифференцирование выражений (9.45) – (9.49) показывает, что градиент давления поля в любой плоскости пространства взаимодействия всегда сонаправлен градиенту давления зарядов системы (9.40) – (9.44) и равен ему по модулю. Как следствие этого, градиент полного давления системы в любой плоскости обращается в нуль.

Направления градиентов позволяют определить направления объемных сил, удерживающих рассматриваемую систему в ограниченной области пространства в равновесии. Силы, прижимающие слой к плоскости  $x=0$ , направлены против оси  $x$ . В соответствии с соотношением (6.3) вектор  $E$  [его проекция на ось  $x$  дается выражениями (9.25) – (9.29)] сонаправлен с градиентом давления зарядов системы (9.40) – (9.44). Силы, отталкивающие слой, создаются градиентом давления самосогласованного поля (6.8), взятым с противоположным знаком. Они противоположны градиенту давления зарядов (9.40) – (9.44), равны ему по модулю и тем самым, компенсируя его действие, удерживают систему в равновесии.

Граница системы в состоянии с положительным полным давлением всегда резкая, поскольку  $x = L$  является вертикальной асимптотой для функции (9.30). В связи с этим пространство взаимодействия системы заключено в пределах  $0 \leq x \leq L$ , а для переменной  $z_1$  – в пределах  $-2 \leq z_1 \leq z_0$ , где

$$z_0 = 2(3\beta - 1) / P_1^{3/2}. \quad (9.50)$$

Величина  $z_0$  определяет выбор нужных функций из полного набора решений. Ниже дано соответствие переменных  $\beta$  и  $z_0$  на границах интервалов.

Таблица 9.1

$\beta$	0	1/4	1/3	$(\sqrt{3}-1)/2$	3/8
$z_0$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2

Длина пространства взаимодействия определяется интегралом полного давления и имеет вид

$$\frac{L}{l} = 2P_1^{3/2} - 3P_1 + 1 = 2\left[(1 - 2\beta)^{3/2} + 3\beta - 1\right]. \quad (9.51)$$

Из (9.51) видно, что пространство взаимодействия не образуется, если параметр состояния системы стремится к нулю.

**Фазовые траектории.** Фазовые траектории системы можно получить из любых пар соотношений (9.15) – (9.19) и (9.25) – (9.29). Они имеют вид

$$\frac{\varphi'}{E_0} = \sqrt{1 + 2\beta(\sqrt{1 - \varphi / \varphi_{н1}} - 1)}. \quad (9.52)$$

Графики фазовых траекторий системы в координатах  $\left(\frac{\varphi}{\varphi_{н1}}, \frac{\varphi'}{E_0}\right)$  представляют собой ограниченные кривые, которые начинаются в точке (0,1), а заканчиваются в точке  $(1, \sqrt{1 - 2\beta})$ .

Период движения заряда в пространстве взаимодействия от плоскости  $x = 0$  до плоскости возврата и обратно определяется в результате интегрирования:

$$\tau_1 = 2 \int_0^L \frac{dx}{v(x)}. \quad (9.53)$$

Выпишем эти периоды для различных интервалов по  $\beta$ :

$$\left(\frac{\tau_1}{T_1}\right)_1 = 12\beta P_1^{1/2} \left[ \sin \frac{\theta_1(z_0)}{2} - \frac{1}{2} \right] \text{ при } 0 < \beta < \frac{1}{4}; \quad (9.54)$$

$$\left(\frac{\tau_1}{T_1}\right)_2 = 12\beta P_1^{1/2} \left[ \cos \frac{\theta_2(z_0)}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] + \left(\frac{\tau_1}{T_1}\right)_{1m} \text{ при } \frac{1}{4} \leq \beta < \frac{1}{3}; \quad (9.55)$$

$$\left(\frac{\tau_1}{T_1}\right)_3 = 12\beta P_1^{1/2} \left[ \cos \frac{\theta_3(z_0)}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right] + \left(\frac{\tau_1}{T_1}\right)_{2m} \text{ при } \frac{1}{3} \leq \beta < \frac{\sqrt{3}-1}{2}; \quad (9.56)$$

$$\left(\frac{\tau_1}{T_1}\right)_4 = 12\beta P_1^{1/2} \left[ \cos \frac{\theta_4(z_0)}{2} - \frac{\pi}{12} \right] + \left(\frac{\tau_1}{T_1}\right)_{3m} \text{ при } \frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq \beta < \frac{3}{8}; \quad (9.57)$$

$$\left(\frac{\tau_1}{T_1}\right)_5 = 12\beta P_1^{\frac{1}{2}} \left\{ ch \left[ \frac{1}{6} Arch \left( \frac{z_0^2}{2} - 1 \right) \right] - 1 \right\} + \left(\frac{\tau_1}{T_1}\right)_{4m} \quad \text{при } \frac{3}{8} \leq \beta < \frac{1}{2}, \quad (9.58)$$

где

$$\left(\frac{\tau_1}{T_1}\right)_{1m} = \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right); \quad \left(\frac{\tau_1}{T_1}\right)_{2m} = \left(\frac{\tau_1}{T_1}\right)_{1m} + 2 \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right);$$

$$\left(\frac{\tau_1}{T_1}\right)_{3m} = \left(\frac{\tau_1}{T_1}\right)_{2m} + 6(14 - 8\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right);$$

$$\left(\frac{\tau_1}{T_1}\right)_{4m} = \left(\frac{\tau_1}{T_1}\right)_{3m} + \frac{9}{4} \left( 1 - \cos \frac{\pi}{12} \right).$$

В соотношениях (9.54) – (9.58)  $T_1 = 2l / v_0$  – временной масштаб системы, который можно выразить через частоту системы  $\Omega$ :

$$T_1 = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{E_0^3}{48\pi^2 m q n_0^2 v_0^3}. \quad (9.59)$$

Характеристическую напряженность электрического поля системы можно получить из отношения частоты системы  $\Omega$  к частоте ленгмюровских колебаний  $\omega_0$ . Характеристическая напряженность имеет вид

$$E_{*1} = 2v_0 (6\pi)^{\frac{1}{3}} (\pi m n_0)^{\frac{1}{2}}. \quad (9.60)$$

Само отношение  $\Omega / \omega_0$  можно выразить через параметр состояния системы  $\beta$ :

$$\frac{\Omega}{\omega_0} = 6\pi\beta^{\frac{3}{2}}, \quad (9.61)$$

в связи с чем отношение  $E_{*1} / E_0$  изменяется в пределах

$$0 < \frac{E_{*1}}{E_0} < \frac{\sqrt[3]{6\pi}}{\sqrt{2}}. \quad (9.62)$$

**Обсуждение результатов.** На рис. 9.1, 9.2 представлены электродинамические и кинематические характеристики исследуемой системы для параметра состояния  $\beta = 0,45$ , охватывающего полный набор решений. Пунктиром обозначена граница системы. Она соответствует значению  $L / l \approx 0,76$ . На рис. 9.1 приведены зависимости потенциала  $\phi / \phi_e$  (кривая 1), проекции напряженности электрического поля  $-E_x / E_0$  (кривая 2), модуля скорости  $v / v_0$  (кривая 3) от координаты  $x / l$  системы. На рис. 9.2 представлены зависимости концентрации  $n / n_0$  (кривая 1) и эф

эффективной потенциальной энергии  $-U / W_0$  (кривая 2) от координаты  $x / l$  системы.

Как видно из формул (9.15) – (9.39) и рис. 9.1, заряды, участвующие в создании потока в направлении оси  $x$ , “стартуют” со скоростью  $v_0$  в плоскости  $x = 0$  и в дальнейшем движении неравномерно замедляются. Причина замедления связана с тем, что потенциал самосогласованного поля системы представляет для них барьер. Все заряды потока останавливаются на вершине барьера при  $\varphi = \varphi_{n1}$ .

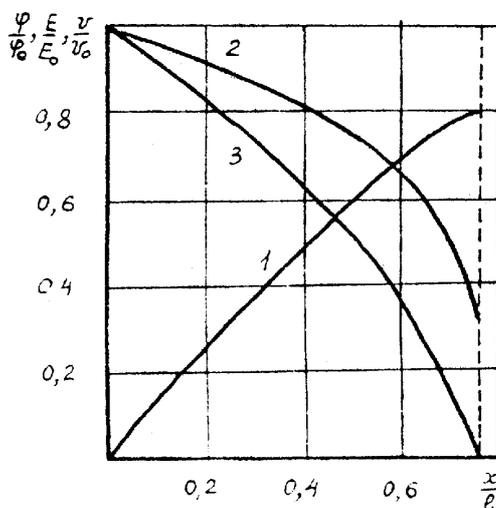


Рис. 9.1

Заряды, участвующие в создании обратного потока, начинают движение с нулевой скоростью в плоскости  $x = L$ . Двигаясь с переменным ускорением, они достигают наибольшей скорости  $v = v_0$  в плоскости  $x = 0$ . Потенциал системы принимает наибольшее значение в плоскости возврата  $\varphi_{n1} / \varphi_e = 4\beta^2$ . Напряженность самосогласованного поля системы также принимает наибольшее значение  $E_{n1} / E_0 = -P_1^{1/2}$  в этой плоскости, а концентрация зарядов системы стремится к бесконечности.

Движение прямого и обратного потоков происходит в соответствии с гамильтонианом коллективного взаимодействия (9.7): давление самосогласованного поля больше там, где больше давление зарядов системы (или больше модуль их скорости).

На рис. 9.3 представлены графики фазовых траекторий системы для различных значений параметра состояния  $\beta$ . Кривая 1 соответствует параметру состояния  $\beta=0,1$ ; кривая 2 -  $\beta=0,25$ ; кривая 3 -  $\beta=0,5$ .

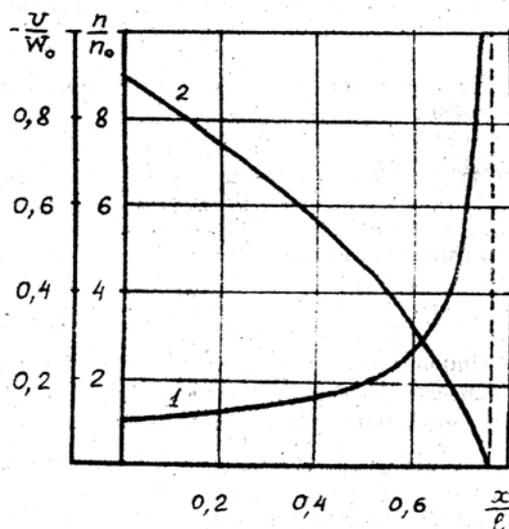


Рис. 9.2

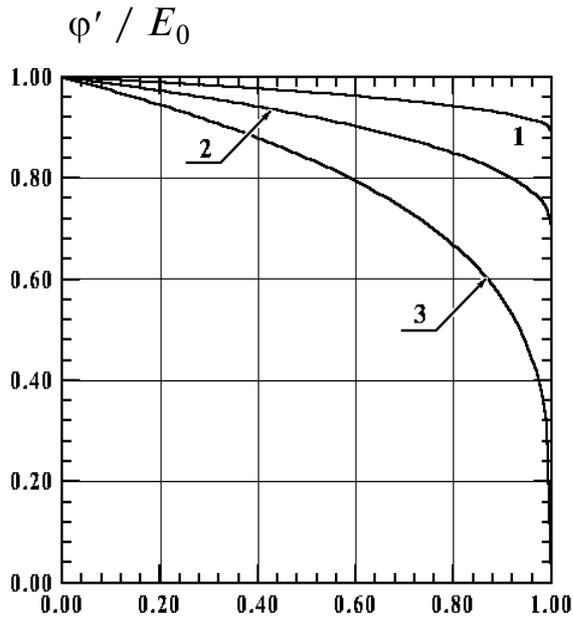


Рис. 9.3  $\varphi / \varphi_{H1}$

**Поведение зарядов вблизи плоскости возврата.** Рассмотрим поведение зарядов системы вблизи плоскости возврата. Введем для этого безразмерную координату  $t/l$ , отсчитываемую от этой плоскости против оси  $x$ :

$$\frac{t}{l} = \frac{L}{l} - \frac{x}{l}. \quad (9.63)$$

С учетом (9.63) переменная  $z_1$  примет вид

$$z_1 = \varepsilon - 2, \quad (9.64)$$

где  $\varepsilon = t / (P_1^{3/2} l)$ . Предполагая  $\varepsilon \ll 1$ , выберем решение, принадлежащее промежутку

$-2 \leq z_1 \leq -\sqrt{2}$ . Малость  $\varepsilon$  приводит к малости угла  $3\theta$ :

$$3\theta = \arccos\left(\frac{z_1^2}{2} - 1\right) \approx \arccos(1 - 2\varepsilon) \ll 1. \quad (9.65)$$

Выписывая степенной ряд для  $\cos 3\theta$  до членов второго порядка малости по  $3\theta$ , приходим к равенству

$$\theta^2 = 4\varepsilon / 9. \quad (9.66)$$

Оставляя члены второго порядка малости по  $\theta$  при разложении (9.15), получим линейную зависимость потенциала системы вблизи плоскости возврата

$$\varphi \approx \frac{Y}{q} - E_0 t \sqrt{P_1}. \quad (9.67)$$

Напряженность поля в этой области однородна, поскольку

$$E_t \approx E_0 \sqrt{P_1}. \quad (9.68)$$

Из (9.68) видно, что движение зарядов вблизи плоскости возврата – равнопеременное с модулем ускорения

$$a = qE_0 \sqrt{P_1} / m. \quad (9.69)$$

Изменение модуля скорости зарядов системы в этой области описывается соотношением

$$v = \sqrt{2at}, \quad (9.70)$$

а изменение их концентрации имеет особенность порядка  $t^{-1/2}$

$$n = \frac{2j_0}{q\sqrt{2at}}. \quad (9.71)$$

Приближение  $\beta \ll 1$  или  $P_1 \approx 1$  выполняется тогда, когда давление самосогласованного поля значительно превышает давление зарядов системы. Длина и время пролета пространства взаимодействия в этом случае малы:

$$\frac{L}{l} \approx 3\beta^2, \quad \left(\frac{\tau_1}{T_1}\right) \approx 6\beta^2, \quad (9.72)$$

а сами эти параметры имеют простой физический смысл, так как

$$L \approx \frac{mv_0^2}{2qE_0}; \quad \tau_1 \approx \frac{2mv_0}{qE_0}. \quad (9.73)$$

В (9.67) – (9.69) можно положить  $P_1 \approx 1$ , поскольку при этом приближении условие  $\varepsilon \ll 1$  не нарушается. Тогда из (9.68) видно, что случай  $\beta \ll 1$  описывает самосогласованную систему с однородной напряженностью поля во всем пространстве взаимодействия.

**Случай нулевого полного давления.** Исследуем двухпоточковые состояния системы с нулевым полным давлением  $P = 0$ , так как полученные ранее соотношения их не описывают. В этом случае в любой плоскости давление самосогласованного поля равно давлению зарядов системы. Назовем такие состояния предельными двухпоточковыми состояниями самосогласованной системы.

Интегрируя уравнение (9.7) с учетом того, что  $\varphi' \geq 0$ , получим

$$x = \Lambda - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{m}{\pi q j_0}} \left[ \frac{2}{m} (Y - q\varphi) \right]^{3/4}, \quad (9.74)$$

где постоянная интегрирования  $\Lambda$  совпадает с длиной пространства взаимодействия и связана с плазменной частотой  $\omega_0$ :

$$\Lambda = \frac{v_0}{6} \sqrt{\frac{mv_0}{\pi q j_0}} = \frac{\sqrt{2}v_0}{3\omega_0}. \quad (9.75)$$

Потенциал в системе достигает максимума  $\varphi_{H1}$  при  $x = \Lambda$  и имеет вид

$$\varphi = Y \left[ 1 - \left( 1 - x / \Lambda \right)^{4/3} \right] / q. \quad (9.76)$$

Из (9.76) видно, что и в случае  $P=0$  самосогласованное поле, создаваемое коллективом зарядов в области  $x \geq 0$ , представляет собой потенциальный барьер, ограниченный в пространстве.

Проекция напряженности самосогласованного поля обращается в нуль в плоскости возврата:

$$\frac{E_x}{E_0} = - \left( 1 - \frac{x}{\Lambda} \right)^{1/3}, \quad (9.77)$$

где

$$E_0 = \frac{4Y}{3q\Lambda} = \frac{\sqrt{2}m\nu_0\omega_0}{q} = 4\sqrt{\pi W_k}. \quad (9.78)$$

Появление в этом случае плоскости нулевого давления самосогласованного поля отличает их от исследованных ранее.

Выражая из (9.78) и подставляя в (9.75)  $\nu_0$ , получим, что величина  $\Lambda$  совпадает с длиной пространства взаимодействия (9.51) при  $\beta \rightarrow 1/2$  и так же связана с  $E_0$  и  $j_0$ , как и в (9.12). Зависимость концентрации зарядов от координаты  $x$  имеет вид

$$n = n_0 \left( 1 - x / \Lambda \right)^{-2/3}. \quad (9.79)$$

Граница системы резкая, поскольку  $x = \Lambda$  – вертикальная асимптота для функции (9.79).

Закон изменения скорости зарядов и бесстолкновительного давления по длине системы получим из (9.79) и (9.2):

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\nu}{\nu_0} = \left( 1 - x / \Lambda \right)^{2/3}, \quad (9.80)$$

где  $p_0 = n_0 m \nu_0^2$ .

Градиент давления зарядов системы, как и в случае  $P > 0$ , направлен к плоскости  $x=0$  и распределен по длине системы в соответствии с законом

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{2p_0}{3\Lambda} \left( 1 - x / \Lambda \right)^{-1/3} = - \frac{2p_0}{3\Lambda} \sqrt{\frac{p_0}{p}}. \quad (9.81)$$

Распределение давления поля по длине системы имеет вид

$$D = \frac{E_x^2}{8\pi} = \frac{E_0^2}{8\pi} \left( 1 - x / \Lambda \right)^{2/3}. \quad (9.82)$$

Сравнение (9.82) и (9.80) позволяет убедиться в том, что разность давлений поля и зарядов системы в этом случае для любой плоскости пространства взаимодействия остается постоянной и равной нулевому полному давлению системы.

Дифференцирование (9.82) по  $x$  дает результат (9.81), что говорит о сонаправленности и равенстве градиентов давления поля и частиц системы. Из этого следует, что градиент нулевого полного давления системы в любой ее плоскости обращается в нуль.

Из (9.81) видно, что объемные силы, прижимающие слой зарядов к плоскости  $x=0$ , как и в случае  $P>0$ , направлены против оси  $x$  и сонаправлены с вектором  $\mathbf{E}$  (9.77). Объемные силы, отталкивающие слой зарядов, как и в случае  $P>0$ , противоположны по направлению градиенту давления зарядов (9.81), равны ему и тем самым компенсируют его действие и удерживают систему в равновесии.

Уравнение фазовой траектории в этом состоянии находится из (9.76) и (9.77). При  $\beta=1/2$  оно совпадает с (9.52):

$$\frac{\varphi'}{E_0} = (1 - \varphi / \varphi_{н1})^{1/4}. \quad (9.83)$$

График фазовой траектории системы в координатах  $(\varphi / \varphi_{н1}, \varphi' / E_0)$  начинается в точке  $(0,1)$ , а заканчивается в точке  $(1,0)$ . На рис. 9.3 он представлен кривой 3.

Период движения зарядов в пространстве взаимодействия находим из соотношения

$$\tau = 2 \int_0^{\Lambda} \frac{dx}{v(x)} = 2 \int_0^{\Lambda} dx / \left[ v_0 (1 - x / \Lambda)^{2/3} \right] = 6\Lambda / v_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0} = 3T. \quad (9.84)$$

Обсудим полученные результаты. Как следует из соотношений (9.76) – (9.80), движение зарядов в системе с нулевым полным давлением такое же, как и в случае  $P>0$ . Заряды, участвующие в создании потока в направлении оси  $x$ , стартуют со скоростью  $v_0$  и, неравномерно замедляясь, останавливаются на вершине барьера  $\varphi = \varphi_{н1}$ . Заряды, участвующие в создании обратного потока, начинают движение с нулевой скоростью в плоскости  $x = \Lambda$ . Двигаясь с переменным ускорением, они достигают наибольшей скорости  $v_0$  в плоскости  $x=0$ . Потенциал системы принимает максимальное значение  $\varphi_{н1}$  в плоскости возврата. Проекция напряженности самосогласованного поля системы принимает наибольшее значение, равное нулю, в этой плоскости, а концентрация зарядов системы имеет особенность порядка  $(t / \Lambda)^{-2/3}$ , где  $t$  – координата (9.85).

Введение отсчитываемой от плоскости возврата координаты

$$t = \Lambda - x \quad (9.85)$$

обнаруживает неформальное сходство выражений (9.76), (9.77), (9.79) с соотношениями, описывающими распределение аналогичных величин в пространстве между электродами плоского вакуумного диода [27]. Это сходство позволяет уточнить границы применимости закона Чайлда [19], в котором скорость зарядов потока зависит от координаты  $z$ , отсчитываемой от катода плоского диода по закону (дано в СИ)

$$v = \left( \frac{9qj_0^*}{2m\epsilon_0} \right)^{1/3} z^{2/3}. \quad (9.86)$$

При выводе соотношения (9.86) предполагается, что заряды бесстолкновительного потока покидают катод с нулевой скоростью (см. (3.23) в [33]). Переходя в (9.74) к координате (9.85) и выражая скорость, получим в СИ

$$v = \left( \frac{9qj_0}{m\epsilon_0} \right)^{1/3} (t)^{2/3}. \quad (9.87)$$

Из (9.87) видно, что закон Чайлда описывает ускоренное движение в самосогласованном поле одноименных зарядов, участвующих в создании обратного потока с плотностью тока  $j_0^* = 2j_0$ , в состояниях с нулевым полным давлением.

**Случай отрицательного полного давления.** В этом случае реализуется однопотокное самосогласованное движение зарядов, не ограниченное по продольной координате  $x$ . В силу симметрии однопотокность движения требует постоянства плотности тока. Тогда уравнение непрерывности имеет вид

$$j_0 = qn(x)v(x) = qn_0v_0 = const. \quad (9.88)$$

Магнитное поле отсутствует в системе безграничного в поперечном направлении тока, а заряды системы двигаются прямолинейно без столкновений.

Статичность задачи сохраняет полную энергию (9.3). Бесстолкновительная функция распределения  $n(\varphi)$  сохраняет вид (9.5), но, как будет показано ниже, в рассматриваемых состояниях значение потенциала  $\varphi_{n1}$  не достигается. Распределение в пространстве потенциала самосогласованного поля описывается уравнением

$$\frac{\varphi''}{4\pi} = - \frac{j_0}{\sqrt{\frac{2}{m}(Y - q\varphi)}}, \quad (9.89)$$

первый интеграл которого совпадает с гамильтонианом взаимодействия системы, имеет вид

$$\frac{(\varphi')^2}{8\pi} - \frac{j_0}{q} \sqrt{2m(Y - q\varphi)} = H\left(\frac{\varphi'}{4\pi}, \varphi\right) = P = const \quad (9.90)$$

и отличается от (9.7) только множителем в выражении для эффективной потенциальной энергии.

Зададим полное давление (9.90) в плоскости  $x=0$ . Для этого, как и в случае  $P>0$ , разделим равенство (9.90) на  $W_0 = E_0^2 / 8\pi$  и, сохраняя прежним физический смысл параметра состояния  $\beta$ , введем обозначение

$$P_2 = -P / W_0 = 2\beta - 1. \quad (9.91)$$

Пролетными или однопотоковыми состояниями самосогласованной системы будем называть такие состояния, у которых в любой плоскости полное давление в системе отрицательно. Как видно из (9.90), (9.91), в таких состояниях  $P < 0$  или  $\beta > 1/2$ . В этих состояниях у системы всегда существует такое значение координаты  $x = h$ , при котором обращается в нуль градиент потенциала:  $\varphi'(h) = 0$ , а стало быть, и давление самосогласованного поля. Это приводит к тому, что в области  $0 \leq x < h$  градиент потенциала положителен:  $\varphi'(x) > 0$ , а в области  $x > h$  он отрицателен.

**Распределения физических величин.** Как следует из (9.90), в плоскости  $x = h$  потенциал системы принимает максимальное положительное значение при  $\varphi' = 0$ :

$$\varphi_m = \frac{Y}{q} - \frac{qP^2}{2mj_0^2}. \quad (9.92)$$

Тогда одному значению потенциала, заключенному в интервале  $0 \leq \varphi \leq \varphi_m$ , всегда соответствуют два значения координаты. Учитывая такую многозначность, представим интегрирование в (9.90) в виде

$$x = h - \sigma \int_{\varphi}^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{8\pi \left( \frac{j_0}{q} \sqrt{2m(Y - q\varphi)} + P \right)}}, \quad (9.93)$$

где

$$\sigma = \text{sign}(\varphi'), \quad (9.94)$$

$$h = \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{8\pi \left( \frac{j_0}{q} \sqrt{2m(Y - q\varphi)} + P \right)}} \quad (9.95)$$

– постоянная интегрирования. Интегрируя (9.93), получим

$$\sigma(h-x) = l_2 \left( \frac{j_0}{qW_0} \sqrt{2m(Y-q\varphi)} - P_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{j_0}{qW_0} \sqrt{2m(Y-q\varphi)} + 2P_2 \right), \quad (9.96)$$

где

$$l_2 = \frac{2qW_0^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{8\pi}mj_0^2} = \frac{qE_0^3}{96\pi^2mj_0^2} \quad (9.97)$$

– пространственный масштаб системы, а постоянная интегрирования имеет вид

$$h = l_2 \left( \frac{j_0\sqrt{2mY}}{qW_0} - P_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{j_0\sqrt{2mY}}{qW_0} + 2P_2 \right) = 2l_2(3\beta - 1). \quad (9.98)$$

Введя в (9.96) безразмерные переменные

$$t_2 = 1 - \frac{j_0\sqrt{2m(Y-q\varphi)}}{qP}, \quad z_2 = \sigma(h-x) / \left( l_2 P^{\frac{3}{2}} \right) \quad (9.99)$$

и выражая  $t_2 = t_2(z_2)$ , придем к иррациональному уравнению

$$(t_2 - 2)^{\frac{1}{2}}(t_2 + 1) = z_2. \quad (9.100)$$

Из (9.100) видно, что область допустимых значений параметра  $2 \leq t_2 < \infty$ , а следовательно,  $0 \leq z_2 < \infty$ . Учитывая второе соотношение в (9.99), определим (9.94) в виде

$$\sigma = \begin{cases} +1 & \text{при } 0 < x < h; \\ 0 & \text{при } x = h; \\ -1 & \text{при } x > h. \end{cases} \quad (9.101)$$

Преобразуя (9.100) в кубическое уравнение с параметром  $t_2^3 - 3t_2 - 2 - z_2^2 = 0$ , выпишем его единственное действительное решение

$$t_2 = 2ch\theta_6, \quad (9.102)$$

где  $\theta_6 = \left[ \text{Arch}\left(1 + z_2^2 / 2\right) \right] / 3$ .

Пространственное изменение потенциала в однопотоковой системе в единицах  $\varphi_2 = qW_0^2 / 2mj_0^2 = 3E_0l_2 / 4 = \varphi_{н1} / 4\beta^2$  имеет вид

$$\frac{\varphi}{\varphi_2} = 4\beta^2 - \left[ P_2(2ch\theta_6 - 1) \right]^2. \quad (9.103)$$

Распределение проекции напряженности самосогласованного поля по длине пространства взаимодействия находится из (9.103):

$$\frac{E_x}{E_0} = -2\sigma P_2^{1/2} sh(\theta_6 / 2). \quad (9.104)$$

Из соотношений (9.103) – (9.104) видно, что самосогласованное поле, создаваемое коллективом зарядов в области  $x \geq 0$  для случая  $P < 0$ , представляет собой потенциальный барьер, имеющий максимум в плоскости нулевого давления поля при  $x = h$  и не ограниченный в пространстве.

Зависимость концентрации зарядов системы от координаты  $x$  описывается соотношением

$$\frac{n}{n_0} = \frac{2\beta}{P_2(2ch\theta_6 - 1)}. \quad (9.105)$$

Из формул (9.105) и (9.88) можно получить зависимость отношения скоростей зарядов  $v / v_0$  от длины системы, которая совпадает с зависимостью отношения давлений зарядов  $p(x) / p_0$ :

$$\frac{p}{p_0} = \frac{v}{v_0} = \frac{P_2(2ch\theta_6 - 1)}{2\beta}. \quad (9.106)$$

Градиент давления зарядов системы распределен на длине системы по закону

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{2\sigma P_0 sh\theta_6 sh(3\theta_6 / 2)}{3l_2\beta\sqrt{1 - 2\beta sh(3\theta_6)}}. \quad (9.107)$$

Из (9.107) видно, что в системе с отрицательным полным давлением направление градиента давления зарядов переменное. Он имеет направление против оси  $x$  в области  $0 \leq x \leq h$  и по оси  $x$  – в области  $x > h$ .

Распределение давления поля по длине системы следует из (9.104) и имеет вид

$$D = \frac{E_x^2}{8\pi} = 4P_2W_0 sh^2(\theta_6 / 2) = -4P sh^2(\theta_6 / 2). \quad (9.108)$$

Из соотношений (9.108) и (9.106) легко убедиться, что разность давлений поля и частиц системы в любой плоскости пространства взаимодействия остается постоянной и равной отрицательному полному давлению  $P$  системы.

Дифференцирование (9.108) по  $x$  показывает, что градиент давления поля всегда сонаправлен с градиентом давления зарядов системы (9.107) и равен ему по модулю. Как следствие этого, в случае  $P < 0$  градиент полного давления системы в любой плоскости обращается в нуль.

Направления градиентов позволяют определить направления объемных сил, удерживающих рассматриваемую систему в равновесии. Си

лы, расширяющие слой зарядов, в области  $0 \leq x < h$  направлены к плоскости  $x = 0$ , а в области  $x > h$  – по оси  $x$ . В соответствии с соотношением (6.3) вектор  $\mathbf{E}$  (его проекция на ось  $x$  дается выражением (9.104)) сонаправлен градиенту давления зарядов системы (9.107). Силы, стягивающие слой, создаются градиентом давления самосогласованного поля (6.8), взятым с противоположным знаком. Они противоположны градиенту давления зарядов и также изменяют свой знак на противоположный при переходе системы через плоскость  $x = h$ .

Состояния системы в случае  $P < 0$  принципиально отличаются от рассмотренных ранее тем, что в них существует плоскость нулевого давления поля. Длина пространства взаимодействия системы не ограничена и указывает на то, что в случае, когда бесстолкновительное давление частиц системы больше давления поля, кулоновское взаимодействие преобладает над полемым взаимодействием в системе.

**Фазовые траектории.** Уравнение фазовых траекторий системы получается из соотношений (9.103) и (9.104) и имеет вид

$$\frac{\varphi'}{E_0} = \sigma \sqrt{4\beta^2 - (4\beta - 1) \frac{\varphi}{\varphi_m} - (2\beta - 1)}. \quad (9.109)$$

Графики фазовых траекторий в координатах  $\left( \frac{\varphi}{\varphi_m}, \frac{\varphi'}{E_0} \right)$  представляют собой неограниченные кривые, которые начинаются в точке  $(0,1)$  и далее проходят через две общие точки  $(1,0)$  и  $(0,-1)$ , где пересекаются.

Заряды достигают плоскости  $x = h$  за время

$$\tau_2 = 12T_2\beta P_2^{1/2} sh(\theta_0 / 2), \quad (9.110)$$

где

$$\theta_0 = \left( Arch\left(1 + z_0^2 / 2\right) \right) / 3; \quad z_0 = \frac{h}{l_2 P_2^{3/2}};$$

$$T_2 = \frac{l_2}{v_0} = \frac{E_0^3}{96\pi^2 m q n_0^2 v_0^3}$$

– временной масштаб системы.

Получим характеристическую напряженность системы с отрицательным полным давлением, выражая этот масштаб в единицах периода ленгмюровских колебаний  $T_0$ :

$$E_{*2} = 2v_0(12\pi)^{1/3} (\pi m n_0)^{1/2}. \quad (9.111)$$

Она связана с  $E_0$  соотношением

$$\frac{E_{*2}}{E_0} = (12\pi)^{1/3} \sqrt{\beta} \quad (9.112)$$

и изменяется в пределах

$$\frac{(12\pi)^{1/3}}{\sqrt{2}} < \frac{E_{*2}}{E_0} < \infty. \quad (9.113)$$

**Обсуждение результатов.** На рис. 9.4, 9.5 представлены кинематические и электродинамические характеристики системы для параметра состояния  $\beta = 0,9$ . Плоскость нулевого давления поля системы расположена на расстоянии  $h/l_2 \approx 3,4$ . На рис. 9.4 приведены зависимости потенциала  $\varphi / \varphi_2$  (кривая 1) и проекции напряженности электрического поля системы  $E_x / E_0$  (кривая 2) от координаты  $x / l_2$ . На рис. 9.5 представлены зависимости скорости  $v / v_0$  (кривая 1), концентрации  $n / n_0$  (кривая 2), эффективной потенциальной энергии  $-U / W_0$  (кривая 3) от координаты  $x / l_2$ .

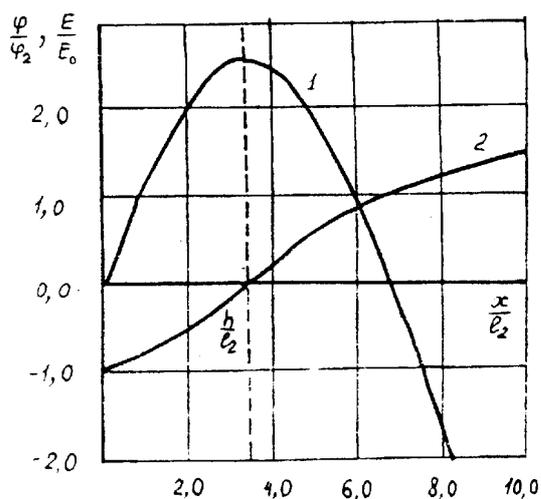


Рис. 9.4

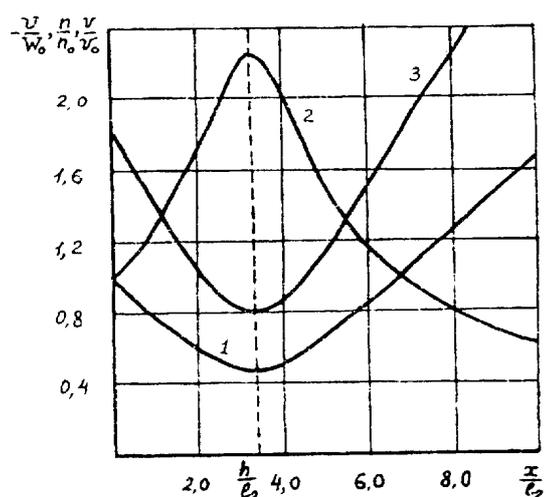


Рис. 9.5

Как видно из рис. 9.4 и 9.5 и соотношений (9.103) – (9.105), пролетное движение зарядов в самосогласованном поле разделено плоскостью  $x = h$  на два вида: замедленное и ускоренное. Заряды, движущиеся в области  $0 \leq x \leq h$ , уменьшают свою скорость от  $v_0$  до минимальной  $v_m = v_0(2\beta - 1) / 2\beta$ , поскольку в данной области самосогласованное поле представляет для них потенциальный барьер с высотой  $\varphi_m = (4\beta - 1)\varphi_2$ . На вершине барьера концентрация системы максимальна:  $n_m = 2n_0\beta(2\beta - 1)$ .

Пройдя барьер со скоростью  $v_m$ , заряды системы начинают ускоряться в полупространстве  $x > h$ . Причина ускорения объясняется тем,

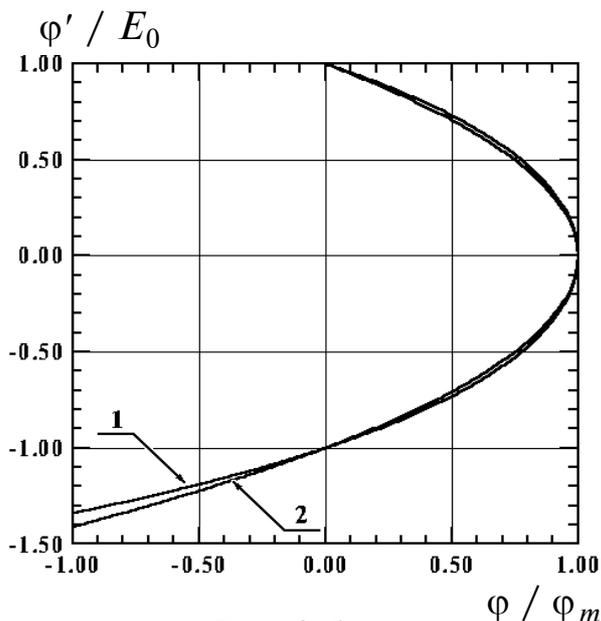


Рис. 9.6

Фазовые траектории системы для различных значений параметра  $\beta$  представлены на рис. 9.6. Кривая 1 соответствует значению  $\beta = 2$ , а кривая 2 – значению  $\beta = 50$ .

**Поведение системы в асимптотике.** Исследуем поведение самосогласованной системы с отрицательным давлением при  $x/h \rightarrow \infty$  для случая, когда выполнено неравенство

$$\theta_6 \approx \frac{2}{3} \ln \left( \frac{x}{l_2 P_2^{3/2}} \right) \gg 1.$$

В рассматриваемом приближении распределения потенциала

$$\frac{\phi}{\phi_2} \approx - \left( \frac{x}{l_2} \right)^{4/3}, \quad (9.114)$$

проекции напряженности поля

$$\frac{E_x}{E_0} \approx \left( \frac{x}{l_2} \right)^{1/3} \quad (9.115)$$

и концентрации зарядов системы

$$\frac{n}{n_0} \approx 2\beta \left( \frac{x}{l_2} \right)^{-2/3} \quad (9.116)$$

описываются степенными функциями. Как видно из (9.116), пространство взаимодействия не имеет границы, а скорость зарядов системы возрастает неограниченно по закону  $v/v_0 \approx (x/l_2)^{2/3} / 2\beta$ . Для корректного расчета дальнейшего изменения скорости нужно провести релятивистское

что направление вектора напряженности поля системы в этой области совпадает с направлением движения зарядов. Движение потока в состоянии  $P < 0$ , как и в случае  $P > 0$ , происходит в соответствии с гамильтонианом коллективного взаимодействия (9.7): давление самосогласованного поля больше там, где больше давление зарядов системы (или больше их модуль скорости).

Фазовые траектории системы для различных значений параметра  $\beta$

уточнение. Заметим, что на больших расстояниях концентрация зарядов, имеющих большие скорости, незначительна из-за (9.88).

Сравнение полученных результатов с результатами [23] указывает на их совпадение только в случае существования одного действительного решения уравнения  $y = y(B)$  [25, с.298]. Это приводит к выводу, что параметр  $M'$  [25] может изменяться только в интервале  $0 < M' < 1/4$ . Параметр  $M'$  связан с параметром  $\beta$  соотношением  $M' = 1/32\beta^3$ .

В связи с этим теоретическое объяснение токового гистерезиса, обнаруженного в экспериментах [23], образованием плоского виртуального катода с трехпоточковым состоянием некорректно, поскольку существование такого состояния, по крайней мере, в плоской симметрии невозможно; оба гамильтониана (9.7) и (9.90), дающие полный набор решений уравнения (9.4), сохраняются лишь при жестком требовании – неизменности плотности тока  $j_0$ . Любые медленные изменения плотности тока приведут к эволюции гамильтоновой системы, а введение даже малого разброса по энергиям зарядов потока принципиально меняет поставленную задачу и приводит к другим законам распределения самосогласованных полей.

Развиваемый здесь подход позволяет объяснить только физическую причину срыва тока в экспериментальной неустойчивости Бурсиана возможностью перехода самосогласованной системы из состояния с отрицательным полным давлением в состояние с положительным полным давлением.

**Оценки.** Приведем оценки, характеризующие возможные параметры рассмотренных самосогласованных систем из электронов. Для двухпоточковых состояний с  $n_0=10^{11}$  см<sup>-3</sup> и  $v_0=10^8$  см/с плотность тока одного из потоков  $j_0=0,8$  А/см<sup>2</sup>. Характеристическая напряженность  $E_{*1}=2,7$  кВ/см. Нижнее граничное  $E_0=1,4$  кВ/см и пространственный масштаб  $l = \Lambda=26$  мкм реализуются при нулевом полном давлении. Для параметра  $\beta = 0,1$  (полное давление  $P=0,36$  Па) длина пространства взаимодействия  $L=9,1$  мкм. Временной масштаб для нулевого давления  $T=53$  пс, а для  $\beta = 0,1$  составляет  $T_1=590$  пс. Период движения зарядов при нулевом давлении  $\tau=160$  пс, а при  $\beta = 0,1$  составляет  $\tau_1=37$  пс.

Для самосогласованной системы с отрицательным давлением при  $n_0=10^{11}$  см<sup>-3</sup> и  $v_0=10^8$  см/с плотность тока  $j_0=1,6$  А/см<sup>2</sup>,  $E_{*2}=3,4$  кВ/см, верхнее граничное значение напряженности  $E_0=1,4$  кВ/см. Для  $\beta = 9$  (полное давление  $P=-8,7 \cdot 10^{-2}$  Па)  $E_0=0,34$  кВ/см,  $\varphi_2=9$  мВ,

$l_2=0,35$  мкм,  $T_2=0,35$  пс. Наибольшее значение потенциала  $\varphi_m=0,3$  В приходится на расстояние  $h=18$  мкм, а  $\tau_2=19$  пс. На расстоянии  $x=1$  см  $\varphi=-7,6$  кВ,  $E_x=10$  кВ/см,  $n=2,0 \cdot 10^9$  см<sup>-3</sup>, а  $v=5,0 \cdot 10^9$  см/с. Изменение кинетической энергии  $v^2 / v_0^2=2,6 \cdot 10^3$ . Из последней оценки видно, что анализ поведения потока на больших расстояниях требует релятивистского уточнения, которое сделано ниже.

## § 10. Релятивистский газ одноименных зарядов

В данном параграфе найдены законы распределения скалярных плоских самосогласованных полей и релятивистских зарядов бесстолкновительных систем, находящихся в состояниях с положительным, нулевым и отрицательным полными давлениями. Обоснована физика удержания релятивистских зарядов самосогласованным полем, определена длина пространства взаимодействия при положительном и нулевом полных давлениях. Эффект ускорения зарядов плоским самосогласованным полем в состояниях с отрицательным полным давлением обобщен на релятивистские энергии. Получена бесстолкновительная функция распределения релятивистских зарядов системы. Приведены оценки для самосогласованных систем, состоящих из электронов, масса которых зависит от скорости их движения.

***Бесстолкновительная функция распределения релятивистских зарядов и уравнение равновесия.*** Рассмотрим двухпотокное состояние бесстолкновительной системы релятивистских положительных зарядов, ограниченное по координате  $x$ , в любом сечении которой уравнение непрерывности имеет вид

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 = 0, \quad (10.1)$$

где  $j_1$  – плотность тока, выходящего из плоскости  $x = 0$  в свободное от внешних полей и электродов полупространство в положительном направлении оси  $x$ ,  $j_2$  – плотность тока, возвращающегося в плоскость  $x = 0$ . При этом  $j_1 = j_2 = j_0$ .

В силу плоской симметрии для любого потока в (10.1)

$$j_0 = \frac{qn(x)v(x)}{2} = \frac{qn_0v_0}{2} = \text{const}. \quad (10.2)$$

Далее везде индекс “0” относится к плоскости  $x = 0$ .

Движение каждого заряда в статическом самосогласованном поле не зависит от времени явно и определяется интегралом энергии

$$Y = \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \gamma_0 mc^2 = \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + q\varphi = \quad (10.3)$$

$$= \gamma mc^2 + q\varphi = \text{const},$$

где  $Y$  – значение полной релятивистской механической энергии, одинаковое для всех зарядов;  $m$  – масса покоя элементарного заряда  $q$  системы;  $\gamma$  – релятивистский фактор;  $c$  – скорость света. В (10.3) калибровка самосогласованного поля выбрана в виде  $\varphi(0) = \varphi_0 = 0$ .

Пространственное распределение потенциала скалярного статического самосогласованного поля определяется уравнением Пуассона, в правой части которого плотность зарядов системы выражена через функцию распределения по координате:

$$\varphi'' = -4\pi qn(\varphi), \quad (10.4)$$

где штрихи означают дифференцирование по  $x$ .

Бесстолкновительная функция распределения релятивистских зарядов  $n(\varphi)$  получается из уравнения непрерывности (10.2) и закона сохранения энергии (10.3). Она имеет вид

$$\frac{n}{n_0} = \left( \frac{1 - \gamma_0^{-2}}{1 - [\gamma_0(1 - \varphi / \varphi_H) + \varphi / \varphi_H]^{-2}} \right)^{1/2}, \quad (10.5)$$

где  $\gamma_0$  – релятивистский фактор заряда в плоскости  $x = 0$ , а

$$\varphi_H = mc^2(\gamma_0 - 1) / q \quad (10.6)$$

– наибольшее значение потенциала системы, достигаемое в плоскости возврата потока при  $x = L_1$ , когда  $\gamma = 1$ .

Подставляя (10.5) в (10.4), преобразуем (10.4) к виду

$$\frac{\varphi''}{4\pi} = -\frac{2j_0}{c} \left[ 1 - \frac{m^2 c^4}{(Y - q\varphi)^2} \right]^{-1/2}. \quad (10.7)$$

Уравнение (10.7) описывает статические двухпоточковые равновесия релятивистских зарядов с самосогласованным полем.

**Гамильтонова функция системы.** Уравнение (10.7) имеет первый интеграл, играющий роль гамильтониана взаимодействия системы и соответствующий ее полному давлению

$$\frac{(\varphi')^2}{8\pi} - \frac{2j_0}{qc} \sqrt{(Y - q\varphi)^2 - m^2 c^4} = P = H\left(\frac{\varphi'}{4\pi}, \varphi\right), \quad (10.8)$$

в котором уменьшаемое представляет собой давление самосогласованного поля системы, а вычитаемое – бесстолкновительное давление зарядов в плоской системе  $p = n_0 m c^2 (\gamma^2 - 1) / \gamma$ . Закон сохранения (10.8) получен впервые в [15].

Канонически сопряженные величины в функции Гамильтона (10.8), как и ранее, есть обобщенный импульс  $\varphi' / 4\pi$  и обобщенная координата  $\varphi$ . Роль обобщенного времени играет координата  $x$ . Эффективная потенциальная энергия системы в (10.8) совпадает с давлением частиц, взятым с противоположным знаком:  $U(\varphi) = -p$ . Закон сохранения (10.8) выполняется как следствие того, что гамильтониан системы не зависит от обобщенного времени явно, то есть

$$dH / dx = \partial H / \partial x = 0.$$

Это равенство имеет место при отсутствии любых внешних статических электрических полей, рассматриваемых по отношению к самосогласованному полю системы. Гамильтониан бесстолкновительного коллективного взаимодействия релятивистских зарядов с плоским статическим самосогласованным полем формирует распределение потенциала всегда таким, чтобы в любой плоскости оставалась неизменной разность давлений самосогласованного поля и зарядов системы.

Это приводит к тому, что и в бесстолкновительной релятивистской системе выполняется закон коллективного взаимодействия (6.5), хотя его явный вид формируется только при решении задачи.

Закон сохранения (10.8), следующий из (6.5), означает также, что в любой плоскости пространства взаимодействия рассматриваемой системы градиенты давлений самосогласованного поля и релятивистских зарядов равны между собой и имеют одинаковые направления.

**Случай положительного полного давления.** Полное давление (10.8) зададим в плоскости  $x = 0$ :

$$W - \left( \frac{2j_0}{qc} \right) (Y^2 - m^2 c^4)^{\frac{1}{2}} = W_0 - 2W_1 = H \left( \frac{\varphi'_0}{4\pi}, 0 \right) = P, \quad (10.9)$$

где  $W_0 = \frac{(\varphi'_0)^2}{8\pi}$  – давление поля;  $p_0 = 2W_1 = n_0 m c^2 (\gamma_0^2 - 1) / \gamma_0$  – давление зарядов системы;  $\varphi'_0$  – градиент потенциала.

Направление  $E_0 = -\varphi'_0$  противоположно выбранному направлению оси  $x$ , поскольку все заряды системы в области  $x \geq 0$  положительны. Обе части равенства (10.9) разделим на  $W_0$  и введем обозначение

$$P_1 = \frac{P}{W_0} = 1 - \frac{2W_1}{W_0} = 1 - 2\beta, \quad (10.10)$$

где  $\beta = \frac{W_1}{W_0}$  – параметр состояния самосогласованной системы.

Система находится в двухпоточковых состояниях при выполнении условия  $0 < P_1 < 1$  или  $0 < \beta < \frac{1}{2}$ . При движении зарядов системы в этих состояниях всегда существует такое значение координаты  $x = L_1$ , при котором эффективная потенциальная энергия  $U(\varphi)$  в (10.8) обращается в нуль, а пространство взаимодействия ограничено.

**Распределения физических величин.** Вводя безразмерные величины

$$\alpha = \frac{2j_0 m c}{qP} = \frac{2\beta}{(1 - 2\beta)(\gamma_0^2 - 1)^{1/2}}, \quad (10.11)$$

$$v = \frac{\alpha(Y - q\varphi)}{m c^2} = \alpha \left( \gamma_0 - \frac{q\varphi}{m c^2} \right) = \alpha\gamma \quad (10.12)$$

для начального условия  $x = 0$ ,  $\varphi = 0$ , приведем интегрирование уравнения (10.8) к виду

$$\frac{x}{l_1} = (1 - 2\beta)^{1/2} \int_{v_1}^{v_2} \left[ 1 + (v^2 - \alpha^2)^{1/2} \right]^{-1/2} dv, \quad (10.13)$$

где  $l_1 = cE_0 / (16\pi j_0)$  – пространственный масштаб системы;  $v_2 = \alpha\gamma_0$  – фиксированное значение верхнего предела;  $v_1 = \alpha\gamma$  – текущее значение нижнего предела, изменяющееся от  $\alpha\gamma_0$  при  $x = 0$  до  $\alpha$  при  $x = L_1$ . При записи (10.13) учтено, что на всем участке интегрирования  $\varphi' > 0$ .

Вводя переменную  $Z = \gamma + (\gamma^2 - 1)^{1/2} = \exp \left[ \text{Arch} \frac{v}{\alpha} \right]$ , приведем (10.13) к комбинации эллиптических интегралов

$$\frac{x}{l_1} = (1 - 2\beta)^{1/2} \left( \frac{\left( (1 + \alpha^2)^{1/2} - 1 \right)}{(1 + \alpha^2)^{1/4}} [II(\theta_2, 1, k) - II(\theta, 1, k)] - 2(1 + \alpha^2)^{1/4} \times \right. \\ \left. \times [E(\theta_2, k) - E(\theta, k)] + \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha^2)^{1/4} \left( 1 + (1 + \alpha^2)^{1/2} \right)} [F(\theta_2, k) - F(\theta, k)] \right), \quad (10.14)$$

где  $F, E, II$  – эллиптические интегралы I, II, III родов соответственно,

$$k = \left[ \left( 1 + \sqrt{1 + \alpha^2} \right) / \left( 2\sqrt{1 + \alpha^2} \right) \right]^{1/2} \quad (10.15)$$

– параметр удержания системы в каком-либо состоянии. Для двухпоточковых состояний его квадрат изменяется в пределах

$$\frac{1}{2} \leq k^2 \leq 1,$$

верхний фиксированный предел эллиптических интегралов

$$\theta_2 = \arcsin \left[ 1 - \frac{(\sqrt{1 + \alpha^2} - 1) / \alpha}{\gamma_0^2 + \sqrt{\gamma_0^2 - 1}} \right]^{1/2}, \quad (10.16)$$

нижний переменный предел эллиптических интегралов

$$\theta = \arcsin \left[ 1 - \frac{(\sqrt{1 + \alpha^2} - 1) / \alpha}{\left( \gamma_0 - \frac{q\varphi}{mc^2} \right)^2 + \sqrt{\left( \gamma_0 - \frac{q\varphi}{mc^2} \right)^2 - 1}} \right]^{1/2}. \quad (10.17)$$

Следует отметить, что при выводе (10.14) были использованы соотношения

$$\int_a^x \frac{xdx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}} [(a-b)II(\varphi, 1, k) + bF(\varphi, k)]; \quad (10.18)$$

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)^3(x-c)}} = \frac{2\sqrt{a-c}E(\varphi, k)}{(a-b)(b-c)} - \frac{2F(\varphi, k)}{(b-c)\sqrt{a-c}}, \quad (10.19)$$

существующие при условиях  $x > a > b > c$ ,  $\varphi = \arcsin \sqrt{(x-a)/(x-b)}$ ,  
 $k = \sqrt{(b-c)/(a-c)}$ .

Длина пространства взаимодействия системы ограничена плоскостью возврата  $x = L_1$ , в которой  $\gamma = 1$ ,

$$\frac{L_1}{l_1} = (1 - 2\beta)^{1/2} \left[ \frac{(\sqrt{1 + \alpha^2} - 1)}{(1 + \alpha^2)^{1/4}} [\Pi(\theta_2, 1, k) - \Pi(\theta_1, 1, k)] - 2(1 + \alpha^2)^{1/4} \times \right. \\ \left. \times [E(\theta_2, k) - E(\theta_1, k)] + \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha^2)^{1/4} (1 + \sqrt{1 + \alpha^2})} [F(\theta_2, k) - F(\theta_1, k)] \right], \quad (10.20)$$

где

$$\theta_1 = \arcsin \left[ 1 - (\sqrt{1 + \alpha^2} - 1) / \alpha \right]^{1/2}. \quad (10.21)$$

**Фазовые траектории.** Поскольку получить обратную зависимость  $x = x(\varphi)$  в рассматриваемом случае не удастся, связь между проекцией напряженности самосогласованного поля и потенциалом можно определить из (10.8):

$$\frac{E_x}{E_0} = - \left[ (1 - 2\beta) \left\{ 1 + \alpha \sqrt{\left[ \gamma \left( 1 - \frac{\varphi}{\varphi_n} \right) + \frac{\varphi}{\varphi_n} \right]^2 - 1} \right\} \right]^{1/2}. \quad (10.22)$$

Уравнение фазовых траекторий системы следует из соотношения (10.22), взятого с противоположным знаком. Графики фазовых траекторий в координатах  $(\varphi / \varphi_n, \varphi' / E_0)$  представляют собой ограниченные кривые, которые начинаются в точке  $(0, +1)$ , а заканчиваются в точке  $(1, \sqrt{1 - 2\beta})$ .

**Обсуждение результатов.** На рис. 10.1 представлены зависимости длины пространства взаимодействия системы  $L_1 / l_1$  от релятивистского фактора  $\gamma_0$  для различных параметров состояния системы  $\beta$  (кривая 1 для

$\beta=0,25$ ; кривая 2 для  $\beta=0,35$ ; кривая 3 для  $\beta=0,45$ ), полученные из соотношения (10.20).

На рис. 10.2 для параметров  $\beta = 0,25$ ,  $\gamma_0 = 3$  приведены распределения потенциала и напряженности поля по длине системы (кривая 1 дает распределение проекции напряженности, взятое с противоположным знаком, кривая 2 – распределение потенциала). Для этих же значений параметров

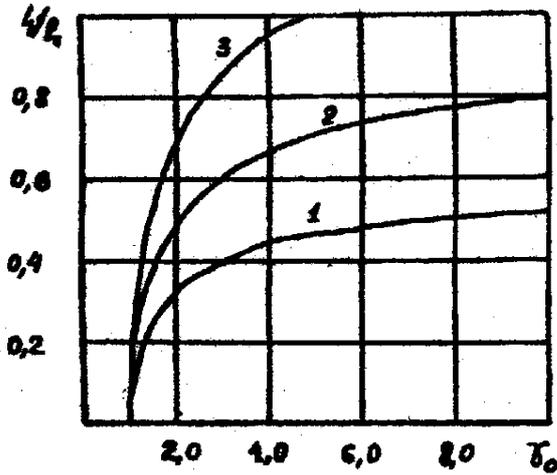


Рис. 10.1

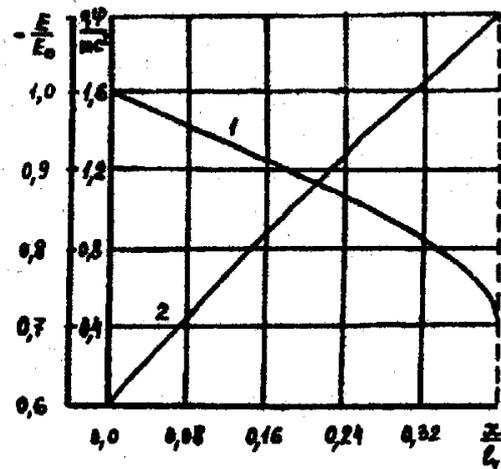


Рис. 10.2

на рис. 10.3 построены зависимости релятивистского фактора  $\gamma$  и концентрации системы  $n/n_0$  от координаты системы  $x/l_1$  (кривая 1 представляет собой зависимость релятивистского фактора, а кривая 2 – зависимость концентрации).

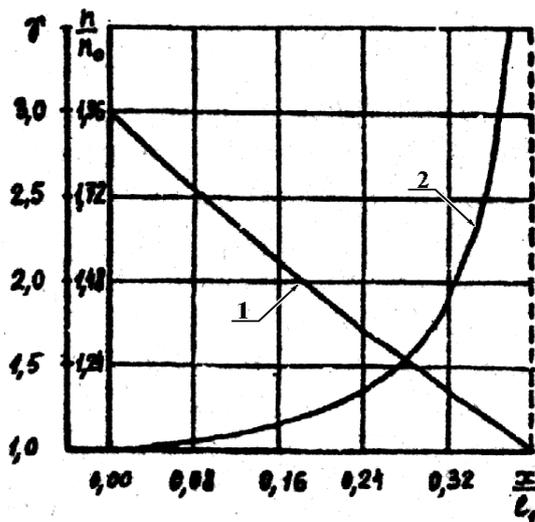


Рис. 10.3

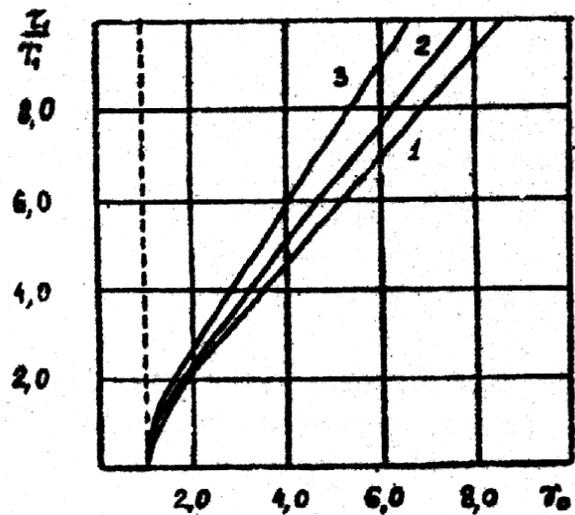


Рис. 10.4

Время пролета пространства взаимодействия зарядом вычислялось из соотношения

$$\tau_1 = 2 \int_0^{L_1} \frac{dx}{v(x)} = T_1 (\gamma_0^2 - 1)^{1/2} [1 - (1 - 2\beta)^{1/2}] / \beta, \quad (10.23)$$

где

$$T_1 = 2mc / (qE_0) \quad (10.24)$$

– временной масштаб системы. Для малых  $\beta$  время пролета определяется только релятивистским фактором. На рис. 10.4 представлены зависимости времени пролета пространства взаимодействия  $\tau_1 / T_1$  от релятивистского фактора  $\gamma_0$  (кривая 1 характеризуется параметром состояния  $\beta=0,25$ ; кривая 2 – параметром  $\beta=0,35$ ; кривая 3 – параметром  $\beta=0,45$ ).

Как видно из рис. 10.2 – 10.4, характер движения релятивистских зарядов в системе с положительным полным давлением остается таким же, как и у нерелятивистских зарядов. Заряды, участвующие в создании потока в направлении оси  $x$ , стартуют с энергией  $\gamma_0$  и неравномерно замедляются. Причина замедления связана с тем, что самосогласованное поле системы представляет для них потенциальный барьер. Все заряды потока останавливаются на вершине барьера  $\gamma = 1$  при  $\phi = \phi_n$ . Заряды, участвующие в создании обратного потока, начинают движение с нулевой скоростью в плоскости  $x = L_1$ . Двигаясь далее с переменным ускорением, они набирают наибольшую энергию  $\gamma = \gamma_0$  в плоскости  $x = 0$ . Наибольшего значения  $\phi_n$  их потенциал достигает в плоскости возврата  $x = L_1$  и зависит от релятивистского фактора  $\gamma_0$ . Проекция напряженности самосогласованного поля системы также принимает наибольшее значение  $\frac{E_n}{E_0} = -(1 - 2\beta)^{1/2}$  в этой плоскости, а концентрация зарядов системы стремится к бесконечности.

Движение релятивистского потока зарядов в состоянии с  $P > 0$  происходит в соответствии с гамильтонианом коллективного взаимодействия (10.8): давление самосогласованного поля системы больше там, где больше давление зарядов системы (или больше их модуль скорости).

Из рис. 10.2 и 10.3 видно, что, как и в случае нерелятивистского газа зарядов, направления градиентов давления зарядов системы и давления поля позволяют определить направления объемных сил, удерживающих любой элементарный объем системы в равновесии. Во всей области пространства взаимодействия силы, прижимающие слой зарядов к плоскости  $x=0$ , противоположны направлению оси  $x$  и совпадают с направлением

градиента давления зарядов (6.3). Силы, отталкивающие слой от плоскости  $x=0$ , создаются градиентом давления самосогласованного поля, взятым с противоположным знаком (6.8), и совпадают с направлением оси  $x$ .

Так же, как и в нерелятивистском случае, найдем характеристическую напряженность электрического поля системы с положительным полным давлением  $E_{*1}$  из отношения временного масштаба системы к релятивистскому периоду ленгмюровских колебаний, взятому в плоскости  $x = 0$ :

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{E_{*1}}{E_0}, \quad (10.25)$$

где

$$E_{*1} = 2 \sqrt{\frac{n_0 m c^2}{\gamma_0 \pi}}. \quad (10.26)$$

Тогда отношение  $\frac{E_{*1}}{E_0}$  оказывается связанным только с интегралами системы  $P_1, \gamma_0$ :

$$\frac{E_{*1}}{E_0} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1 - P_1}{2(\gamma_0^2 - 1)}}. \quad (10.27)$$

Отметим своеобразие предельного перехода к нерелятивистским соотношениям при  $\gamma_0 \rightarrow 1$  в (10.14). Учитывая асимптотику сомножителей, стоящих перед эллиптическими интегралами, и разложения при  $\alpha \gg 1$ :  $k \approx (1/2)^{1/2}$ ,  $\gamma_0^2 \approx 1 + u_0^2$ ,  $\gamma^2 \approx 1 + u^2$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{x}{l_1} = & (\alpha(1 - 2\beta))^{1/2} \left( [\Pi(\theta_2, 1, k) - \Pi(\theta, 1, k)] - \right. \\ & \left. - 2[E(\theta_2, k) - E(\theta, k)] + [F(\theta_2, k) - F(\theta, k)] \right), \end{aligned} \quad (10.28)$$

где  $\theta_2 \approx u_0^{1/2} \ll 1$ ,  $\theta \approx u^{1/2} \ll 1$ .

Воспользовавшись разложением в ряды эллиптических интегралов для малых значений углов

$$\begin{aligned} \Pi(\theta, 1, (1/2)^{1/2}) & \approx \theta(1 + 5\theta^2 / 12); \\ E(\theta, 1, (1/2)^{1/2}) & \approx \theta(1 - \theta^2 / 12); \\ F(\theta, 1, (1/2)^{1/2}) & \approx \theta(1 + \theta^2 / 12), \end{aligned} \quad (10.29)$$

приведем (10.28) к виду

$$x / l_1 \approx 2u_0(2\beta)^{1/2} \left[ 1 - (u / u_0)^{3/2} \right] / 3. \quad (10.30)$$

Отсюда следует, что

$$\varphi = Y \left[ 1 - (1 - x / L_n)^{4/3} \right] / q, \quad (10.31)$$

где

$$L_n = 2u(2\beta)^{1/2} l_1 / 3 = \frac{v_0}{6} \left( \frac{mv_0}{\pi q j_0} \right)^{1/2} = \Lambda. \quad (10.32)$$

Результат (10.31) совпадает с распределением потенциала по длине системы при нулевом полном давлении и размером пространства взаимодействия [соотношения (9.76), (9.75)].

**Оценки.** В заключение приведем оценки, характеризующие возможные параметры самосогласованных систем из релятивистских электронов [15]. Для двухпоточкового состояния с  $n_0=10^{11}$  см<sup>-3</sup> и  $\gamma_0 = 3$  плотность тока одного из потоков  $j_0=2,3 \cdot 10^2$  А/см<sup>2</sup>. Характеристическая напряженность системы  $E_{*1}=60$  кВ/см. Для параметра состояния  $\beta = 1/4$  (полное давление  $P=2,5 \cdot 10^4$  Па)  $E_0=10^3$  кВ/см, пространственный масштаб  $l=3$  см, длина пространства взаимодействия  $L_1=1,2$  см, наибольшее значение потенциала в плоскости возврата  $\varphi_n=10^3$  кВ, временной масштаб системы  $T_1=32,2$  пс, а период движения заряда  $\tau_1=106$  пс.

**Случай нулевого полного давления.** Далее проводится обобщение результатов, полученных в § 9, на случай релятивистского движения зарядов самосогласованной системы, находящейся в состоянии с нулевым полным давлением.

Исследуемое двухпоточковое состояние описывается гамильтонианом взаимодействия

$$\frac{(\varphi')^2}{8\pi} - \frac{2j_0}{qc} \sqrt{(Y - q\varphi)^2 - m^2 c^4} = P = H\left(\frac{\varphi'}{4\pi}, \varphi, x\right), \quad (10.33)$$

В (10.33) уменьшаемое представляет собой давление самосогласованного поля системы, а вычитаемое – релятивистское бесстолкновительное давление частиц плоской системы  $p = n m v^2 \gamma$ , где  $Y$  – полная энергия заряда,  $\gamma$  – релятивистский фактор, остальные обозначения как в § 9. Рассматриваемый случай соответствует состояниям, при которых в любой плоскости давление самосогласованного поля равно давлению частиц системы. По терминологии [16], они являются предельными двухпоточковыми состояниями самосогласованной системы.

**Распределения физических величин.** Для начальных условий  $x_0 = 0$ ,  $\varphi = 0$  решение (10.33) приведем к виду

$$\frac{x}{l} = \int_{\gamma}^{\gamma_0} \frac{d\gamma}{(\gamma^2 - 1)^{1/4}}, \quad (10.34)$$

где

$$l = \left( mc^3 / \pi q j_0 \right)^{1/2} / 4 = \left( I_A / \pi j_0 \right)^{1/2} / 4 \quad (10.35)$$

– пространственный масштаб системы;  $I_A$  – альфвеновский ток. Применяя замену переменной  $Z = \exp(\text{Arch}\gamma)$ , приведем интегрирование в (10.34) к комбинации эллиптических интегралов:

$$\begin{aligned} x / l = & \Pi(\theta_2, 1, k) - \Pi(\theta_1, 1, k) - 2[E(\theta_2, k) - E(\theta_1, k)] + \\ & + [F(\theta_2, k) - F(\theta_1, k)], \end{aligned} \quad (10.36)$$

где  $\Pi$ ,  $E$ ,  $F$ , – эллиптические интегралы I, II, III родов соответственно;  $k = (1/2)^{1/2}$  – параметр удержания системы в двухпоточковом состоянии;

$$\theta_1 = \arcsin \sqrt{1 - \left\{ \gamma_0 + \left[ \left( \gamma_0 - \frac{q\varphi}{mc^2} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right\}^{-1}}; \quad (10.37)$$

$$\theta_2 = \arcsin \sqrt{1 - \left[ \gamma_0 + (\gamma_0^2 - 1)^{1/2} \right]^{-1}}, \quad (10.38)$$

$\gamma_0$  – входное значение релятивистского фактора заряда потока, индекс 0 отмечает величины в плоскости  $x = 0$ .

Поскольку сделать обратной зависимость  $x(\varphi)$  и в этом случае не удастся, связь между проекцией напряженности самосогласованного поля  $E_x$  и потенциалом  $\varphi$  можно получить из (10.33):

$$E_x / E_0 = - \left\{ \frac{\left[ \gamma_0 - \varphi(\gamma_0 - 1) / \varphi_m \right]^2 - 1}{\gamma_0^2 - 1} \right\}^{1/4}, \quad (10.39)$$

где  $\varphi_m = mc^2(\gamma_0 - 1) / q$  – максимальное значение потенциала системы, достигаемое в плоскости возврата потока при  $x = L$ , когда выполняется условие  $\gamma = 1$ . При этом  $0 \leq \varphi / \varphi_m \leq 1$ .

Соотношение (10.39), взятое с противоположным знаком, описывает семейство фазовых траекторий системы в координатах  $\left(\frac{\varphi}{\varphi_m}, \frac{\varphi'}{E_0}\right)$ , которые начинаются в точке (0,1), заканчиваются в точке (1,0), не замкнуты и принимают ограниченные значения. На рис. 10.5 представлена фазовая траектория системы для значения  $\gamma_0 = 3$ .

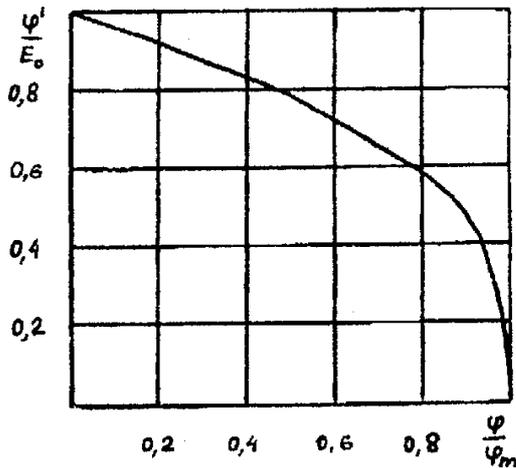


Рис. 10.5

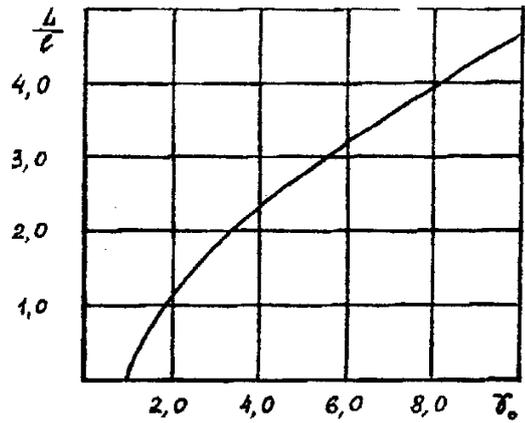


Рис. 10.6

Длина пространства взаимодействия системы ограничена плоскостью возврата  $x = L$  и находится из соотношения

$$L / l = \Pi(\theta_2, 1, k) - 2E(\theta_2, k) + F(\theta_2, k). \quad (10.40)$$

На рис. 10.6 представлена зависимость длины пространства взаимодействия системы  $L/l$  от релятивистского фактора  $\gamma_0$ , рассчитанная по соотношению (10.40). На рис. 10.7 для значения параметра  $\gamma_0 = 3$  построены кривые распределения потенциала и напряженности поля по длине системы. Кривая 1 дает распределение проекции напряженности поля

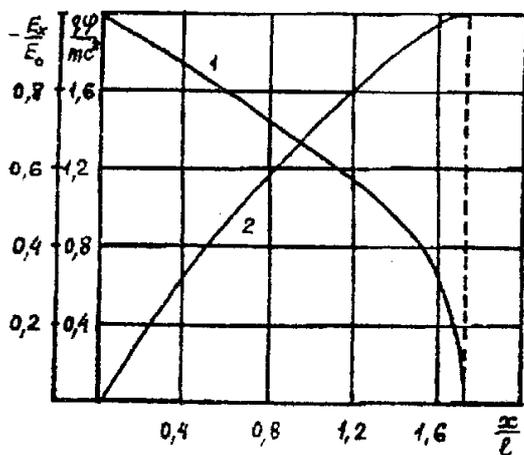


Рис. 10.7

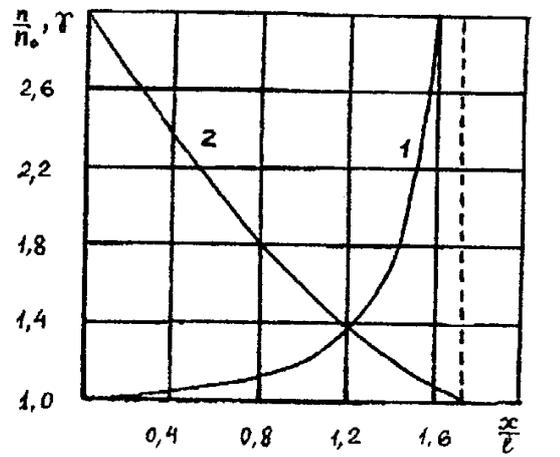


Рис. 10.8

$-E_x / E_0$ , а кривая 2 – распределение потенциала  $q\varphi / mc^2$  по длине системы  $x / l$ .

Для этих же значений параметров на рис. 10.8 представлены зависимости релятивистского фактора  $\gamma$  и концентрации системы  $n/n_0$  от координаты системы  $x / l$ . Кривая 1 отображает зависимость концентрации зарядов системы  $n / n_0$ , а кривая 2 – зависимость релятивистского фактора  $\gamma$  от координаты системы  $x / l$ .

Из приведенных зависимостей следует, что характер движения релятивистских зарядов в системе с нулевым полным давлением остается таким же, как и в случае нерелятивистских зарядов. Рисунки 10.7 и 10.8 показывают, что направления объемных сил, удерживающих любой элементарный объем системы в равновесии остается таким же, как и в случае, когда система находится в состоянии с положительным полным давлением.

Время пролета  $\tau$  пространства взаимодействия зарядом определяется соотношением

$$\tau = 2 \int_0^L dx / v(x) = \frac{2mc^2}{q} \int_1^{\gamma_0} d\gamma / [v(\gamma)\varphi'(\gamma)] = T(\gamma_0^2 - 1)^{1/4}, \quad (10.41)$$

где 
$$T = (mc / \pi q j_0)^{1/2} \quad (10.42)$$

– временной масштаб системы.

Предельный переход к нерелятивистским соотношениям при  $\gamma_0 \rightarrow 1$  в (10.36) осуществляется аналогично (10.28) и (10.29):

$$x / l \approx 2u_0^{3/2} \left[ 1 - \left( \frac{u}{u_0} \right)^{3/2} \right] / 3, \quad (10.43)$$

где  $u = v/c$  – безразмерная скорость движения заряда.

Из (10.20) легко получить выражения для потенциала и пространственного масштаба  $\Lambda = 2lu_0^{3/2} / 3$  [14, соотношения (58), (59)].

Следует заметить, что введение в (10.36) координаты

$$t = L - x,$$

отсчитываемой от плоскости возврата потока, обнаруживает неформальное сходство выражений (10.36), (10.40) с выражениями, описывающими распределение аналогичных величин в пространстве между электродами релятивистского плоского вакуумного диода и полученными в [34]. При этом потенциал  $\varphi$ , создаваемый потоком движущихся зарядов, нужно за

менить потенциалом анода. Тогда плотность тока  $j_0$  будет совпадать с удвоенным значением плотности тока, введенной в [34].

**Оценки.** В заключение приведем оценки, характеризующие параметры исследуемой самосогласованной системы, состоящей из релятивистских электронов. Для двухпоточкового состояния, характеризуемого концентрацией  $n_0=10^{11}$  см<sup>-3</sup> и начальной энергией электронов  $\gamma_0 = 3$ , плотность тока одного из потоков  $j_0=2,3 \cdot 10^2$  А/см<sup>2</sup>. Пространственный масштаб системы  $l=1,2$  см. Расстояние до плоскости возврата  $L=2,1$  см. Максимальное значение потенциала в системе  $\varphi_m=10^3$  кВ, временной масштаб системы  $T=26$  пс, время пролета пространства взаимодействия  $\tau=44$  пс. Напряженность электрического поля в плоскости  $x = 0$  рассчитывается из соотношения

$$E_0 = -\sqrt{16\pi j_0 m c (\gamma_0^2 - 1)^{1/2}} / q \quad (10.44)$$

и составляет величину  $E_0=7 \cdot 10^2$  кВ/см, что соответствует давлению поля  $P=22$  кПа.

**Случай отрицательного полного давления.** Обобщим результаты, полученные в § 9, на случай релятивистского движения зарядов в системе, находящейся в состоянии с отрицательным полным давлением.

Рассмотрим однопоточковое движение положительных зарядов в самосогласованном поле, не ограниченное по продольной координате  $x$ , с точки зрения аналитической механики. Уравнение непрерывности для однопоточкового состояния имеет вид

$$j_0 = qn(x)v(x) = qn_0v_0 = c\Gamma hst, \quad (10.45)$$

где  $j_0$  – плотность тока, выходящего из плоскости  $x = 0$  в свободное от внешних полей и электродов полупространство в положительном направлении оси  $x$ ;  $q$  – положительный заряд;  $n, v$  – концентрация зарядов системы в произвольной плоскости и соответствующий ей модуль скорости зарядов. Индексом “0” отмечены величины в плоскости  $x = 0$ . Предполагается, что заряды системы двигаются прямолинейно без столкновений и возбуждают в полупространстве  $x \geq 0$  статическое плоское самосогласованное поле.

Движение каждого заряда системы не зависит от времени явно и определяется интегралом энергии

$$Y = \frac{mc^2}{(1 - v_0^2 / c^2)^{1/2}} = \gamma_0 mc^2 = \frac{mc^2}{(1 - v^2 / c^2)^{1/2}} + q\varphi =$$

$$= \gamma mc^2 + q\varphi = \text{const}, \quad (10.46)$$

где  $Y$  – значение полной релятивистской энергии, одинаковое у всех зарядов;  $m$  – масса покоя элементарного заряда  $q$  системы;  $c$  – скорость света в вакууме;  $\gamma$  – релятивистский фактор. Калибровка самосогласованного поля выбрана в виде  $\varphi(0) = \varphi_0 = 0$ .

Пространственное распределение скалярного потенциала  $\varphi$  статического самосогласованного поля определяется уравнением Пуассона, в правой части которого плотность зарядов системы выражена через функцию распределения по координате

$$\varphi'' = -4\pi q n(\varphi). \quad (10.47)$$

Бесстолкновительная функция распределения релятивистских зарядов  $n(\varphi)$  следует из (10.46), (10.47) и имеет вид

$$\frac{n}{n_0} = \frac{v_0}{v} = \sqrt{(1 - \gamma_0^{-2}) / [1 - (\gamma_0 - q\varphi / mc^2)^{-2}]}, \quad (10.48)$$

где  $\gamma_0 = Y / mc^2$  – безразмерная релятивистская энергия заряда в плоскости  $x = 0$ . Отличие полученной функции распределения от равновесной бoльцмановской заключается в том, что в бесстолкновительном случае концентрация зарядов больше там, где выше потенциал системы.

Подставляя (10.48) в (10.47), преобразуем (10.47) к виду

$$\frac{\varphi''}{4\pi} = -\frac{j_0}{c} \left[ 1 - \frac{m^2 c^4}{(Y - q\varphi)^2} \right]^{-1/2}. \quad (10.49)$$

Уравнение (10.49) имеет первый интеграл, играющий роль гамильтониана взаимодействия системы и соответствующий ее полному давлению:

$$\frac{(\varphi')^2}{8\pi} - \frac{j_0}{qc} \sqrt{(Y - q\varphi)^2 - m^2 c^4} = P = H(\varphi' / 4\pi, \varphi, x). \quad (10.50)$$

Он отличается от гамильтониана (10.8) только множителем в выражении для эффективной потенциальной энергии. Закон сохранения (10.50) впервые был получен в работе [17].

Полное давление (10.50) зададим в плоскости  $x = 0$ :

$$W_0 - (j_0 / qc)(Y^2 - m^2 c^4)^{1/2} = W_0 - 2W_1 = H(\varphi'_0 / 4\pi, 0, 0) = P, \quad (10.51)$$

где  $W_0 = (\varphi'_0)^2 / 8\pi$  – давление поля;  $p = 2W_1 = n_0 m v_0^2 \gamma_0$  – бесстолкнувительное давление зарядов на входе системы;  $\varphi'_0$  – градиент потенциала.

Направление вектора напряженности поля системы в плоскости  $x=0$  противоположно выбранному направлению оси  $x$  из-за положительности зарядов системы в полупространстве  $x \geq 0$ . Обе части (10.51) разделим на  $W_0$  и, сохраняя физический смысл параметра состояния  $\beta$ , введем обозначения

$$P_2 = -P / W_0 = 2\beta - 1. \quad (10.52)$$

Пролетными или однопотоковыми состояниями самосогласованной системы, как и ранее, будем называть такие состояния, при которых в любой плоскости ее полное давление отрицательно. Как видно из (10.51), (10.52), в данных состояниях  $P < 0$  или  $\beta > 1/2$ . При движении зарядов в этом случае всегда существует такое значение координаты  $x = L_2$ , при котором давление самосогласованного поля обращается в нуль. Проекция напряженности поля за плоскостью  $x = L_2$  изменяет свой знак на противоположный. Потенциал системы принимает максимальное положительное значение  $\varphi_m$  в плоскости  $x = L_2$  и имеет вид

$$q\varphi_m / mc^2 = \gamma_0 - \sqrt{1 + \alpha^{-2}}, \quad (10.53)$$

где

$$\alpha = j_0 mc / qP_2 W_0 = 2\beta / \left( (2\beta - 1)\sqrt{\gamma_0^2 - 1} \right). \quad (10.54)$$

Зависимости максимального потенциала системы  $q\varphi_m / mc^2$  от начальной релятивистской энергии заряда  $\gamma_0$  для различных  $\beta$  представлены на рис. 10.9. Кривая 1 рассчитана для значения параметра  $\beta = 1$ , кривая 2 – для  $\beta = 3$ , кривая 3 – для  $\beta = 5$ .

#### **Распределения физических величин.**

Учитывая, что на одно значение потенциала в области  $0 \leq \varphi \leq \varphi_m$  всегда приходится два значения координаты  $x$ , представим интегрирование в (10.50) следующим образом:

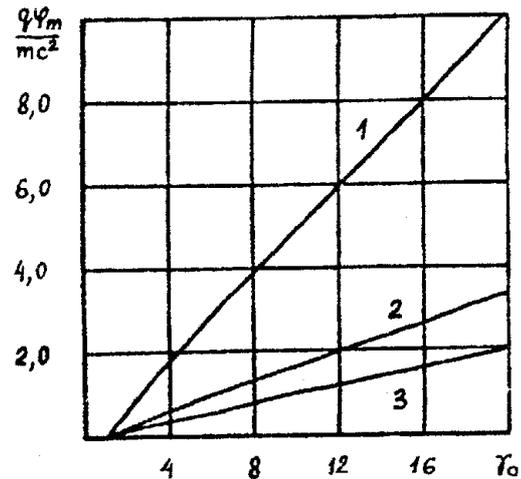


Рис. 10.9

$$x = L_2 - \sigma \int_{\varphi}^{\varphi_m} \left\{ 8\pi \left[ j_0 \left( (Y - q\varphi)^2 - m^2 c^4 \right)^{\frac{1}{2}} / qc + P \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} d\varphi, \quad (10.55)$$

где  $\sigma = \text{sign}(\varphi'),$  (10.56)

$$L_2 = \sigma \int_0^{\varphi_m} \left\{ 8\pi \left[ j_0 \left( (Y - q\varphi)^2 - m^2 c^4 \right)^{\frac{1}{2}} / qc + P \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} d\varphi. \quad (10.57)$$

Вводя безразмерную величину

$$v = \alpha(Y - q\varphi) / mc^2 = \alpha(\gamma_0 - q\varphi / mc^2) = \alpha\gamma, \quad (10.58)$$

для начального условия  $x = 0, \varphi = 0$  приведем (10.55) к виду

$$x / l_2 = L_2 / l - \sigma \sqrt{(2\beta - 1)} \int_{v_m}^v \left( (v^2 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} dv, \quad (10.59)$$

где  $l_2 = cE_0 / 8\pi j_0$  – пространственный масштаб системы;

$v_m = (1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}$  – минимальное фиксированное значение нижнего предела;

$v$  – текущее значение верхнего предела, изменяющееся от  $\alpha\gamma_0$  при  $x = 0$  до  $v_m = \alpha\gamma_m$  при  $x = L_2$  и далее до  $\infty$  при  $x \rightarrow \infty$ . Вводя переменную

$z = \gamma + (\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = \exp[\text{Arch}(v / \alpha)]$ , приведем (10.59) к комбинации эллиптических интегралов:

$$(L_2 - x) / l_2 = \sigma(2\beta - 1)^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[ 1 + (1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}} \right] \Pi(\theta, 1, k) / (1 + \alpha^2)^{\frac{1}{4}} - \right. \\ \left. - 2(1 + \alpha^2)^{\frac{1}{4}} E(\theta, k) + \alpha^2 F(\theta, k) / \left[ (1 + \alpha^2)^{\frac{1}{4}} \left( (1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \right] \right\}, \quad (10.60)$$

где  $F, E, \Pi$  – эллиптические интегралы I, II, III родов соответственно;

$$k = \left\{ \left[ 1 - 1 / (1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}} \right] / 2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (10.61)$$

– параметр удержания системы в пролетном состоянии, квадрат которого изменяется в пределах  $0 < k^2 < \frac{1}{2}$ ,

$$\theta = \arcsin \left\{ 1 - \frac{1 / \alpha + (1 + 1 / \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{(\gamma_0 - q\varphi / mc^2) + \left[ (\gamma_0 - q\varphi / mc^2)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (10.62)$$

$$L_2 / l_2 = (2\beta - 1)^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[ 1 + (1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}} \right] \Pi(\theta_0, 1, k) / (1 + \alpha^2)^{\frac{1}{4}} - \right. \\ \left. - 2(1 + \alpha^2)^{\frac{1}{4}} E(\theta_0, k) + \alpha^2 F(\theta_0, k) / \left[ (1 + \alpha^2)^{\frac{1}{4}} \left( (1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \right] \right\}, \quad (10.63)$$

где  $L_2/l_2$  – относительное расстояние до плоскости  $\varphi' = 0$ ,

$$\theta_0 = \arcsin \left\{ 1 - \frac{1/\alpha + (1 + 1/\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{\gamma_0 + (\gamma_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (10.64)$$

При получении (10.60), (10.63) были использованы соотношения (10.18), (10.19) и значение интеграла

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}} = 2F(\varphi, k) / \sqrt{a-c},$$

существующее при тех же условиях, что и (10.18), (10.19).

Поскольку правая часть выражения (10.60) положительна во всем диапазоне изменения потенциала системы, функцию (10.56) представим в виде

$$\sigma = \begin{cases} +1 & \text{при } 0 \leq x < L_2, \\ 0 & \text{при } x = L_2, \\ -1 & \text{при } x > L_2. \end{cases} \quad (10.65)$$

**Фазовые траектории.** Прямую зависимость  $\varphi = \varphi(x)$  для произвольных значений  $\gamma_0$  и  $\beta$  получить не удастся, поэтому связь между проекцией напряженности самосогласованного поля и потенциалом может быть определена из интеграла давления (10.50):

$$E_x / E_0 = \\ = -\sigma \left[ (2\beta - 1) \left\{ \alpha \left( \left[ \gamma_0 - \varphi \left( \gamma_0 - \sqrt{1 + \alpha^2} / \alpha \right) / \varphi_m \right]^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (10.66)$$

Графики фазовых траекторий системы в координатах  $\left(\frac{\varphi}{\varphi_m}, \frac{\varphi'}{E_0}\right)$

можно построить из соотношения (10.66), взятого с противоположным знаком. Они представляют собой неограниченные кривые, пучок которых начинается в точке (0,1) и далее проходит через точки (1,0), (0,-1). На рис. 10.10 построена фазовая траектория системы, рассчитанная по соотношению (10.66). Кривая построена для значений параметров  $\beta = 1, \gamma_0 = 3$ .

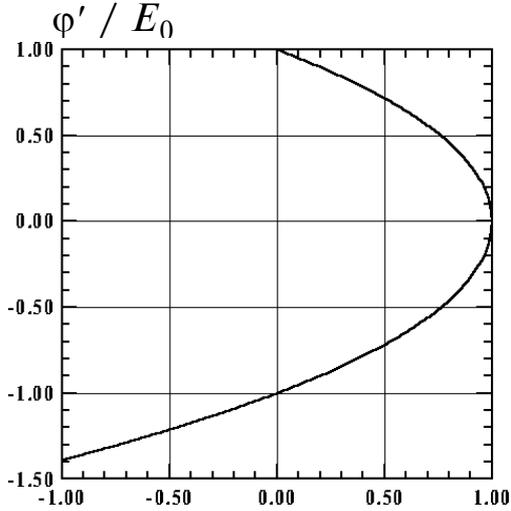


Рис. 10.10  $\varphi / \varphi_m$

**Обсуждение результатов.** На рис. 10.11 представлены распределения потенциала в единицах  $q\varphi / mc^2$  (кривая 1) и проекции напряженности поля  $E_x / E_0$  (кривая 2) по длине системы  $x / l_2$  для параметров  $\beta = 1, \gamma_0 = 3$ , при которых взаи-

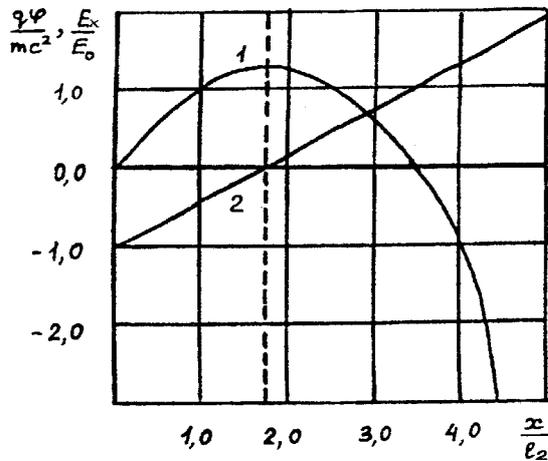


Рис. 10.11

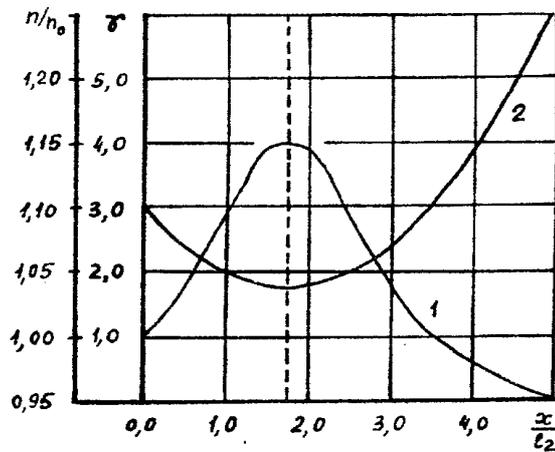


Рис. 10.12

модействие зарядов с полем протекает наиболее характерно. На рис. 10.12 для этих же значений параметров построены зависимости релятивистского фактора  $\gamma$  (кривая 2) и концентрации системы  $n / n_0$  (кривая 1) от координаты системы  $x / l_2$ . На рис. 10.13 приведена зависимость длины области торможения потока  $L_2 / l_2$  от начальной релятивистской энергии  $\gamma_0$  для параметра состояния системы  $\beta = 1$ , рассчитанная по соотношению (10.63).

Время пролета области торможения зарядом вычисляется из соотношения

$$\tau_2 = \int_0^{L_2} dx / v(x) = T_2 (\gamma_0^2 - 1)^{1/2} / \beta, \quad (10.67)$$

где

$$T_2 = mc / qE_0 \quad (10.68)$$

– временной масштаб системы.

Как видно из рис. 10.11 – 10.12 и полученных соотношений (10.60) – (10.66), характер движения релятивистских зарядов в системе с отрицательным полным давлением остается таким же, как и нерелятивистских. Заряды, движущиеся в области торможения  $0 \leq x \leq L_2$ , уменьшают свою релятивистскую энергию от  $\gamma_0$  до минимальной величины  $\gamma_m = (1 + \alpha^2)^{1/2} / \alpha$ ,

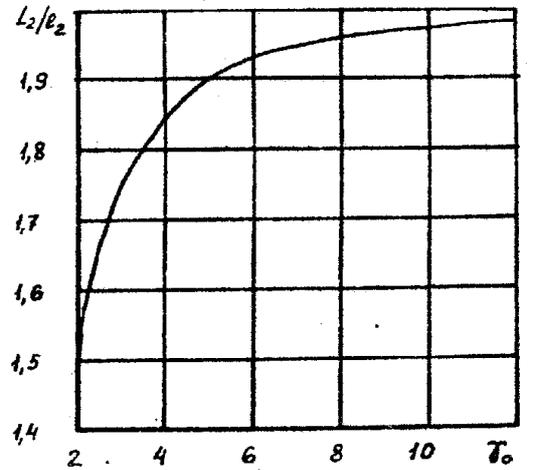


Рис. 10.13

поскольку в этой области самосогласованное поле представляет для них потенциальный барьер высотой  $\phi_m$ . На вершине барьера концентрация системы максимальна:  $n_m = n_0 \left[ (1 + \alpha^2)(1 - \gamma_0^{-2}) \right]^{1/2}$ . Это следует из функции распределения (10.48), представленной в виде

$$n / n_0 = \sqrt{1 - \gamma_0^{-2}} \left\{ 1 - \left[ \gamma_0 - \phi \left( \gamma_0 - \sqrt{1 + \alpha^2} / \alpha \right) / \phi_m \right]^{-2} \right\}^{-1/2}. \quad (10.69)$$

Пройдя барьер с энергией  $\gamma_m$ , заряды системы попадают в ускоряющую область и неограниченно ускоряются самосогласованным полем. Такое ускорение объясняется тем, что направления вектора напряженности поля системы и движения заряда в этой области везде совпадают, скорость зарядов стремится к скорости света, а их концентрация – к постоянной величине  $n_\infty = n_0 (1 - \gamma_0^{-2})^{1/2}$ . Движение релятивистского потока в состоянии с  $P < 0$ , как и в случае  $P > 0$ , происходит в соответствии с гамильтонианом коллективного взаимодействия (10.50): давление самосогласованного поля системы больше там, где больше давление зарядов системы (или больше их модуль скорости).

Из рис. 10.11 и 10.12 видно, что, как и в случае нерелятивистского газа, направления градиентов давления зарядов системы и давления поля позволяют определить направления объемных сил, удерживающих систему в равновесии. Силы, расширяющие слой зарядов, в области

$0 \leq x < L_2$  направлены к плоскости  $x=0$ , а в области  $x > L_2$  – по оси  $x$ . Во всем пространстве взаимодействия вектор  $\mathbf{E}$  сонаправлен с градиентом давления зарядов системы. Силы, стягивающие слой, как и ранее, создаются градиентом давления самосогласованного поля (6.8), взятым с противоположным знаком. В области  $0 \leq x < L_2$  они направлены по оси  $x$ , а в области  $x > L_2$  – против оси  $x$ .

Как и в нерелятивистском приближении, в этих состояниях существует плоскость нулевого давления поля. Пространство взаимодействия системы не имеет границы. Это указывает на то, что кулоновское взаимодействие в системе преобладает над полевым.

Характеристическая напряженность электрического поля системы с отрицательным полным давлением  $E_{*2}$  получается из отношения временного масштаба системы к релятивистскому периоду ленгмюровских колебаний, взятому в плоскости  $x = 0$ :

$$T_2 / T_0 = E_{*2} / E_0, \quad (10.70)$$

где 
$$E_{*2} = \sqrt{\frac{n_0 mc^2}{\gamma_0 \pi}}. \quad (10.71)$$

Тогда отношение  $E_{*2}/E_0$  можно выразить через интегралы системы  $P_2$ ,  $\gamma_0$ :

$$E_{*2} / E_0 = \left( (P_2 + 1) / \left[ 2(\gamma_0^2 - 1) \right] \right)^{\frac{1}{2}} / 2\pi. \quad (10.72)$$

**Поведение системы в асимптотике.** Исследуем поведение самосогласованной системы с отрицательным давлением в асимптотике при  $x/l_2 \rightarrow \infty$ , когда выполнено неравенство

$$\left[ 1 + (x / (2l_2))^2 (2\beta - 1)^{-1} \right] / \alpha \gg \gamma_0. \quad (10.73)$$

На этом расстоянии заряды обладают ультрарелятивистской энергией,  $\varphi' < 0$ , создаваемый ими потенциал отрицателен и достигает больших значений:  $(-q\varphi/mc^2) \gg 1$ . Поэтому при вычислении неопределенного интеграла в (10.55) можно пренебречь энергией покоя частицы. В этом приближении распределение потенциала описывается формулой

$$q\varphi / mc^2 \approx - \left[ 1 + (x / (2l_2))^2 [2\beta - 1]^{-1} \right] / \alpha, \quad (10.74)$$

проекция напряженности поля линейно нарастает с увеличением расстояния:

$$E_x = mc^2 (x / 2l_2) [ql_2 \alpha (2\beta - 1)]^{-1}, \quad (10.75)$$

а концентрация зарядов системы убывает по закону

$$\frac{n}{n_0} \approx \left[ \left(1 - \gamma_0^{-2}\right) \left\{ 1 + \alpha^2 \left[ 1 + \frac{1}{2\beta - 1} (x / 2l_2)^2 \right]^{-2} \right\} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (10.76)$$

Следует заметить, что области замедления и ускорения зарядов существуют только для таких параметров, при которых давления поля и зарядов системы соизмеримы. Если же давление зарядов системы значительно превышает давление самосогласованного поля (т.е. условие  $2\beta \gg 1$  выполнено), то возникает ситуация, возможная только в релятивистской модели. Область торможения в такой системе становится очень маленькой или совсем исчезает, поскольку в этом приближении

$$\varphi_m \rightarrow 0, n_m \rightarrow n_0, E_0 \rightarrow 0, L_2 \rightarrow 0, \varphi'_0 \leq 0.$$

Распределение отрицательного потенциала самосогласованного поля системы в этом случае описывается формулой

$$x / l_2 = (2\beta)^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[ 1 + (1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}} \right] \Pi(\theta_*, 1, k) / (1 + \alpha^2)^{\frac{1}{4}} - \right. \\ \left. - 2(1 + \alpha^2)^{\frac{1}{4}} E(\theta_*, k) + \alpha^2 F(\theta_*, k) / \left[ (1 + \alpha^2)^{\frac{1}{4}} \left( (1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \right] \right\}, \quad (10.77)$$

$$\text{где } \theta_* = \arcsin \left\{ 1 - \frac{\gamma_0 + (\gamma_0^2 - 1)^{1/2}}{(\gamma_0 - q\varphi / mc^2) + \left[ (\gamma_0 - q\varphi / mc^2)^2 - 1 \right]^{1/2}} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (10.78)$$

В этом случае изменяется и характер движения зарядов системы. Заряды, вводимые в плоскость  $x = 0$  с энергией  $\gamma_0$ , начинают сразу же ускоряться за этой плоскостью. Функция распределения (10.48) в этом случае становится монотонно убывающей, а фазовые траектории системы имеют одну общую точку (0,0) и расположены в третьей четверти. Асимптотические соотношения (10.74) – (10.76) справедливы и в этом приближении, если в них потребовать выполнения условия  $2\beta \gg 1$ .

**Оценки.** В заключение приведем оценки, характеризующие параметры исследуемой самосогласованной системы, состоящей из релятивистских электронов. Для системы с отрицательным полным давлением  $P = -35$  Па при  $n_0 = 10^{11}$  см<sup>-3</sup>,  $\gamma_0 = 3$ ,  $j_0 = 4,5 \cdot 10^2$  А/см<sup>2</sup> характеристическая напряженность  $E_{*2} = 28$  кВ/см, напряженность поля в плоскости ввода потока  $E_0 = 0,5 \cdot 10^3$  кВ/см. Максимальное значение потенциала  $\varphi_m = 6,7 \cdot 10^2$  кВ на

ходится на расстоянии  $L_2=14 \cdot 10^{-2}$  см. В этой плоскости минимальное значение энергии  $\gamma_m=1,8$ . Пространственный и временной масштабы системы равны:  $l_2=8 \cdot 10^{-2}$  см и  $T_2=610$  пс. Время пролета области торможения  $\tau_2=1,7$  нс. Концентрация системы в асимптотике  $n_0=9,4 \cdot 10^{10}$  см<sup>-3</sup>. Заряд достигает скорости  $v=0,99$  с на расстоянии  $x=0,4$  см.

## **ГЛАВА 2. ПОЛИТРОПИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ**

### **§ 11. Системы гравитирующих частиц**

На основе гамильтониана, описывающего коллективное взаимодействие гравитирующих частиц с плоским самосогласованным полем, проведена классификация возбуждаемых полей и состояний политропического равновесия в системах со столкновениями. Получены законы пространственного распределения потенциала, напряженности, давления самосогласованного поля гравитации. Для гравитирующих частиц определены функции распределения. Приведены зависимости давления и концентрации этих частиц от координаты системы. Рассчитаны размеры пространства взаимодействия. Показана его зависимость от индекса политропии и политропической температуры. Приведены оценки для самосогласованных газовых систем и систем, состоящих из нейтронов.

Как показано ниже, обнаруженный гамильтониан описывает равновесное коллективное взаимодействие гравитирующих частиц, находящихся в политропических состояниях, с плоским статическим самосогласованным полем. Оказывается, что класс функций распределения скалярного потенциала такого поля не может быть произвольным. Их полный набор определяется гамильтонианом взаимодействия, совпадающим с полным давлением системы, которое в этом случае состоит из суммы давлений самосогласованного поля и частиц системы.

**Скалярный интеграл.** Используя подход Френкеля [8], получим уравнение (5.15). Для этого в (5.1) учтем (5.2) и связь гравитационного потенциала с напряженностью (индекс 1 опускаем):

$$\rho \text{grad} \varphi + \text{grad} p = 0. \quad (11.1)$$

Учитывая уравнение политропического состояния вещества (5.10), приведем (11.1) к виду

$$\text{grad} [K(n+1)\rho^{1/n} + \varphi] = 0. \quad (11.2)$$

Из (11.2) следует, что любое политропическое равновесие гравитирующих частиц характеризуется скалярным интегралом  $K(n+1)\rho^{1/n} + \varphi = \text{const}$ . Учтем свойство однородности скалярного интеграла. Для этого зафиксируем его значение на какой-либо линии уровня в плоскости  $(\rho, \varphi)$ . Тогда для двух соседних точек этой линии имеем

$$K(n+1)\rho^{1/n} + \varphi = K(n+1)\rho_0^{1/n} + \varphi_0 = \text{const}. \quad (11.3)$$

**Функция распределения.** Из (11.3) следует функция распределения плотности и концентрации вещества

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} = \left[ 1 - \frac{\varphi - \varphi_0}{K(n+1)\rho_0^{1/n}} \right]^n. \quad (11.4)$$

Калибруя в (11.4) потенциал из условия  $\rho = \rho_0$  при  $\varphi = 0$ , получим

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} = \left( 1 - \frac{\varphi}{\varphi_n} \right)^n, \quad (11.5)$$

где  $\varphi_n = K(n+1)\rho_0^{1/n}$  – значение потенциала, при котором функция распределения обращается в нуль. Это же значение совпадает с наибольшим значением потенциала, достигаемым в системе.

Соотношение (11.5) представляет собой функцию распределения плотности и концентрации вещества, находящегося в политропическом равновесии. Из функции распределения следует, что для любых индексов политропии ( $n > 0$ ) концентрация гравитирующих частиц системы больше там, где меньше ее скалярный потенциал. Ее вид отличается от бесстолкновительной функции распределения (7.5).

**Уравнение политропического равновесия.** С помощью (11.5) можно согласовать уравнение для потенциала (5.11). Подставляя (11.5) в правую часть (5.11), получим

$$\Delta \varphi = 4\pi G \rho_0 \left( 1 - \frac{\varphi}{\varphi_n} \right)^n. \quad (11.6)$$

Уравнение (11.6) является трехмерным полевым аналогом уравнения Лэна-Эмдена (1.18) и позволяет рассчитать трехмерное статическое распределение потенциала поля гравитации в поли-тропических газовых конфигурациях, удерживаемых в равновесии самосогласованным полем системы.

Для случая плоской симметрии (11.6) преобразуется к виду

$$\varphi'' = 4\pi G\rho_0 \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_H}\right)^n. \quad (11.7)$$

**Гамильтонова функция системы.** Уравнение (11.7) имеет первый интеграл, являющийся гамильтонианом системы и соответствующий ее полному давлению  $P$  :

$$\frac{(\varphi')^2}{8\pi G} + p_0 \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_H}\right)^{n+1} = H(\varphi', \varphi) = P, \quad (11.8)$$

в котором первое слагаемое представляет собой давление самосогласованного поля системы, а второе – давление частиц системы. Как и в бесстолкновительном случае, канонически сопряженные величины в функции Гамильтона (11.8) остаются теми же. Закон сохранения (11.8), как и ранее, выполняется при отсутствии любых внешних статических полей гравитации, рассматриваемых по отношению к самосогласованному полю гравитации системы. Это приводит к тому, что и в равновесной системе со столкновениями выполняется закон коллективного взаимодействия (5.5), хотя его вид определяется только при решении конкретной задачи. Впервые закон сохранения (11.8) получен в [35].

Закон сохранения (11.8) означает также, что в любой плоскости пространства взаимодействия рассматриваемой системы градиенты давлений самосогласованного поля и частиц системы равны между собой, но имеют различные направления.

В выражении (11.8) обозначено

$$p_0 = \frac{\rho_0 \varphi_H}{n+1} \quad (11.9)$$

– максимальное давление частиц системы;  $\varphi_H$  – наибольшее значение гравитационного потенциала на границах системы. Его можно связать с политропической температурой  $\theta_E$ , введенной Эмденом в [5]:

$$\varphi_H = \frac{R\theta_E(n+1)}{\mu} \left(\frac{\rho_0}{\rho_*}\right)^{1/n}, \quad (11.10)$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $\mu$  – молярная масса исследуемого газа;  $\rho_0$  – максимальная плотность вещества системы;  $\rho_*$  – единица

плотности системы;  $n$  – индекс политропии. В (11.10) введены современные обозначения.

Как видно из (11.8), при изменении потенциала системы в промежутке  $0 \leq \frac{\varphi}{\varphi_n} \leq 1$  для любых политропических состояний ( $n > 0$ ) величина полного давления в системе всегда неотрицательна. Определим его в плоскости  $x = 0$ . Для этого предположим, что в этой плоскости  $\varphi = 0$  и она же является плоскостью нулевого давления поля  $\varphi'_0 = 0$ . Тогда полное давление совпадает со значением максимального давления частиц системы  $P = p_0$  и задает наибольшее значение градиента потенциала на границах системы

$$\varphi'_n = \sigma \sqrt{8\pi G P}, \quad (11.11)$$

где

$$\sigma = \text{sign}(\varphi'_n) = \text{sign}(\varphi'). \quad (11.12)$$

**Распределения физических величин.** Интегрирование в (11.8) представим в виде

$$\sigma x = \int_0^{\varphi} d\varphi / \sqrt{8\pi G P [1 - (1 - \varphi / \varphi_n)^{n+1}]} \quad (11.13)$$

или

$$\sigma \frac{x}{l} = \int_0^t dt / \sqrt{1 - (1 - t)^{n+1}}, \quad (11.14)$$

где  $t = \varphi / \varphi_n$ ;

$$l = \varphi_n / \sqrt{8\pi G P} \quad (11.15)$$

– пространственный масштаб системы. Результат интегрирования (11.14) различен для различных индексов политропии.

**1. Случай  $n=1$ .** Распределение потенциала по длине системы имеет вид

$$\varphi = \varphi_n (1 - \cos(x / l)). \quad (11.16)$$

Из (11.16) видно, что для  $n=1$  самосогласованное поле, создаваемое коллективом частиц, представляет собой симметричную относительно  $x=0$  потенциальную яму, ограниченную в пространстве. Пространство взаимодействия системы ограничено размерами

$$L = \pi l. \quad (11.17)$$

Распределение проекции напряженности самосогласованного поля имеет вид

$$g_x = -g_n \sin(x / l), \quad (11.18)$$

где  $g_n = \varphi_n / l$ .

Плотность и концентрация зависят от координаты системы по закону

$$\rho / \rho_0 = n / n_0 = \cos(x / l). \quad (11.19)$$

Распределение давления частиц системы имеет вид

$$p = p_0(1 - \varphi / \varphi_n)^2 = p_0 \cos^2(x / l). \quad (11.20)$$

Градиент давления частиц системы направлен к плоскости  $x=0$  и распределен по длине системы по закону

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{p_0}{l} \sin(2x / l). \quad (11.21)$$

Распределение давления поля по длине системы имеет вид

$$D = \frac{g_x^2}{8\pi G} = \frac{g_n^2}{8\pi G} \sin^2(x / l). \quad (11.22)$$

Из соотношений (11.20) и (11.22) легко убедиться, что сумма давлений частиц и поля системы в любой плоскости пространства взаимодействия остается постоянной и равной полному давлению системы:  $P = p_0$ .

Дифференцирование (11.22) показывает, что градиент давления поля в любой плоскости системы направлен противоположно градиенту давления частиц системы (11.21) и равен ему по модулю. Как следствие этого, градиент полного давления политропической системы ( $n=1$ ) в любой плоскости обращается в нуль.

Направления градиентов позволяет выяснить направления объемных сил, удерживающих рассматриваемую систему в ограниченной области пространства в равновесии. Силы, стягивающие слой вещества, направлены к плоскости  $x=0$  и сонаправлены с вектором  $\mathbf{g}$  [совпадает с (5.3)]. Силы, расширяющие слой вещества, создаются градиентом давления самосогласованного поля, который противоположен по направлению градиенту давления частиц и тем самым, компенсируя его действие, удерживает систему в равновесии [совпадает с (5.8)].

Как и следовало ожидать, наибольшее значение потенциала системы  $\varphi_n$ , а также ее пространственный размер зависят от температуры  $\theta_E$ :

$$\varphi_n = \frac{2R\theta_E\rho_0}{\mu\rho_*}; \quad L = \frac{2\pi R\theta_E\rho_0}{\mu\rho_*\sqrt{8\pi GP}}. \quad (11.23)$$

**2. Случай  $n=2$ .** Результат интегрирования в (11.14) выражается через специальную функцию

$$\sigma \frac{x}{l} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} F(\theta_2, k_2), \quad (11.24)$$

где  $F$  – эллиптический интеграл I-го рода. Значение

$$\theta_2 = \arccos\left[\left(\sqrt{3} - \varphi / \varphi_n\right) / \left(\sqrt{3} + \varphi / \varphi_n\right)\right] \quad (11.25)$$

изменяется в пределах  $0 \leq \theta_2 \leq \theta_{2n}$ , где

$$\theta_{2n} = \arccos\left[\left(\sqrt{3} - 1\right) / \left(\sqrt{3} + 1\right)\right];$$

$$k_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sin \frac{5\pi}{12}; \quad (11.26)$$

$$\sigma = \begin{cases} +1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (11.27)$$

Из (11.24) видно, что для  $n=2$  самосогласованное поле системы представляет собой симметричную относительно  $x=0$  потенциальную яму. Пространство взаимодействия системы ограничено по длине

$$L_2 = \frac{2l}{\sqrt[4]{3}} F(\theta_{2n}, k_2). \quad (11.28)$$

Из (11.24) следуют формулы, выражающие распределение плотности вещества, давления частиц и давления поля по длине системы:

$$\sigma \frac{x}{l} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} F(\theta_j, k_2) \quad \text{при} \quad 0 \leq \theta_j \leq \theta_{2n},$$

где индексом  $j=3$  отмечено распределение плотности вещества:

$$\theta_3 = \arccos\left[\left(\sqrt{3} - 1 + \sqrt{\rho / \rho_0}\right) / \left(\sqrt{3} + 1 - \sqrt{\rho / \rho_0}\right)\right];$$

индексом  $j=4$  – распределение давления частиц:

$$\theta_4 = \arccos\left[\left(\sqrt{3} - 1 + \sqrt[3]{p / p_0}\right) / \left(\sqrt{3} + 1 - \sqrt[3]{p / p_0}\right)\right];$$

индексом  $j=5$  – распределение давления поля  $D$ :

$$\theta_4 = \arccos\left[\left(\sqrt{3} - 1 + \sqrt[3]{1 - D / p_0}\right) / \left(\sqrt{3} + 1 - \sqrt[3]{1 - D / p_0}\right)\right].$$

**Фазовые траектории.** Поскольку получить прямую зависимость  $\varphi = \varphi(x)$  в рассматриваемом случае не удастся, связь между напряженностью и потенциалом системы можно определить для любого  $n$  из соотношения

$$g_x / g_n = -\sigma \sqrt{1 - (1 - \varphi / \varphi_n)^{n+1}}. \quad (11.29)$$

Уравнение фазовых траекторий политропической системы любого индекса следует из соотношения (11.29), взятого с противоположным знаком. Графики фазовых траекторий в координатах  $(\varphi / \varphi_n, \varphi' / g_n)$  представляют собой ограниченные кривые, одна ветвь которых начинается в точке  $(0,0)$ , а заканчивается в точке  $(1,1)$ . Другая ветвь получается зеркальным отображением первой ветви относительно оси  $\varphi / \varphi_n$ .

**3. Случай  $n=3$ .** Интегрирование в (11.14) приводит к эллиптическому интегралу первого рода

$$\sigma x / l = F(\theta_3, k_3) / \sqrt{2}, \quad (11.30)$$

где

$$\theta_3 = \arccos(1 - \varphi / \varphi_n) \quad (11.31)$$

изменяется в пределах  $0 \leq \theta_3 \leq \pi/2$ , а

$$k_3 = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (11.32)$$

Из (11.30) видно, что для  $n=3$  самосогласованное поле системы представляет собой симметричную относительно  $x=0$  потенциальную яму, ограниченную в пространстве. Пространство взаимодействия системы имеет размер

$$L_3 = l\sqrt{2}K(k_3), \quad (11.33)$$

где  $K(k)$  – полный эллиптический интеграл первого рода для  $k_3 = \sqrt{2} / 2$  равен  $K(\sqrt{2} / 2) \approx 1,8541$ .

Из (11.30) следуют также распределения плотности вещества, давления частиц и давления поля по длине системы:

$$\sigma \frac{x}{l} = \frac{1}{\sqrt{2}} F(\theta_j, k_3) \quad \text{при } 0 \leq \theta_j \leq \pi / 2,$$

где индексом  $j=4$  отмечено распределение плотности вещества:

$$\theta_4 = \arccos \sqrt[3]{\rho / \rho_0},$$

индексом  $j=5$  – распределение давления частиц:

$$\theta_5 = \arccos \sqrt[4]{p / p_0},$$

индексом  $j=6$  – распределение давления поля  $D$ :

$$\theta_5 = \arccos \sqrt[4]{1 - D / p_0}.$$

И в этом случае получить аналитический вид зависимости  $\varphi(x)$  не удастся. При численном моделировании (11.30) связь между напряженностью и потенциалом системы следует использовать в виде (11.29).

**4. Случай  $n=5$ .** Интегрирование в (11.14) также приводит к эллиптическому интегралу первого рода

$$\sigma \frac{x}{l} = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}} F(\theta_5, k_5), \quad (11.34)$$

где

$$\theta_5 = \arccos \left[ \frac{(\sqrt{3} + 1)(1 - \varphi / \varphi_n)^2 - 1}{(\sqrt{3} - 1)(1 - \varphi / \varphi_n)^2 + 1} \right] \quad (11.35)$$

изменяется в пределах  $0 \leq \theta_5 \leq \pi$ , а

$$k_5 = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sin \frac{\pi}{12}. \quad (11.36)$$

Из (11.34) видно, что и в случае  $n=5$  самосогласованное поле системы представляет собой симметричную относительно  $x=0$  потенциальную яму. Пространство взаимодействия системы ограничено по длине

$$L_5 = lF(\pi, k_5) / \sqrt[4]{3}. \quad (11.37)$$

Из (11.34) следуют также распределения плотности вещества, давления частиц и давления поля по длине системы

$$\sigma \frac{x}{l} = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}} F(\theta_j, k_5) \text{ при } 0 \leq \theta_j \leq \pi,$$

где индексом  $j=6$  отмечено распределение плотности вещества:

$$\theta_6 = \arccos \left[ \frac{(\sqrt{3} + 1)(\rho / \rho_0)^{2/5} - 1}{(\sqrt{3} - 1)(\rho / \rho_0)^{2/5} + 1} \right],$$

индексом  $j=7$  – распределение давления частиц:

$$\theta_7 = \arccos \left[ \frac{(\sqrt{3} + 1)(p / p_0)^{1/3} - 1}{(\sqrt{3} - 1)(p / p_0)^{1/3} + 1} \right],$$

индексом  $j=8$  – распределение давления поля  $D$ :

$$\theta_8 = \arccos \left[ \frac{(\sqrt{3} + 1)(1 - D / p_0)^{1/3} - 1}{(\sqrt{3} - 1)(1 - D / p_0)^{1/3} + 1} \right].$$

**Обсуждение результатов.** Численное моделирование соотношений (11.24), (11.30) и (11.34) показало, что характер распределения в пространстве потенциала, напряженности поля (11.29), плотности и концентрации по длине системы остается таким же, как и в случае  $n=1$ . На рис. 11.1 представлены распределения потенциала для  $n=1,2,3,5$ , а на рис. 11.2 дано распределение проекции напряженности для тех же индексов политропии. По соотношению (11.5) рассчитано распределение плотности вещества и представлено на рис. 11.3 для  $n=1,2,3,5$ . Ветви фазовых траекторий для этих же индексов построены по (11.29) при значении  $\sigma = +1$  и представлены на рис. 11.4.

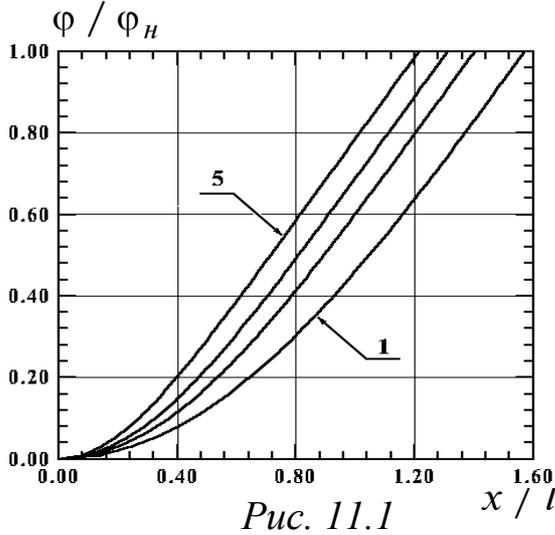


Рис. 11.1

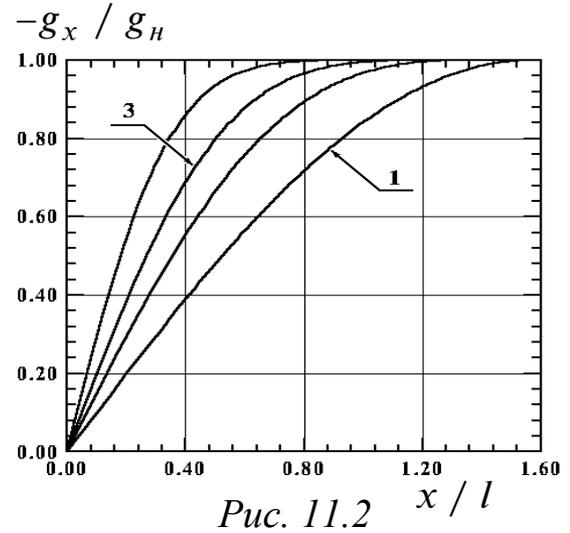


Рис. 11.2

Как видно из приводимых рисунков политропическая самосогласованная система ограничена в пространстве для любых индексов политропии и всегда неоднородна. Размер пространства взаимодействия для любого индекса политропии выражается через пространственный масштаб системы

$$l = (n + 1) \rho_0^{(1-n)/2n} \sqrt{\frac{R\theta_E}{8\pi G\mu\rho_*^{1/n}}}, \quad (11.38)$$

который при  $n=1$  не зависит от максимальной плотности. Вследствие этого случай  $n=1$  следует считать вырожденным.

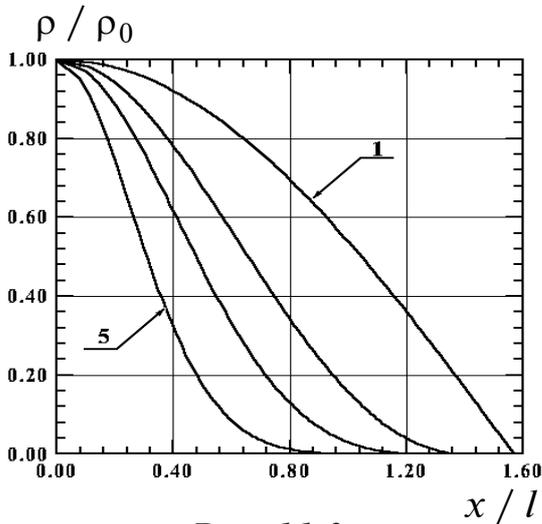


Рис. 11.3

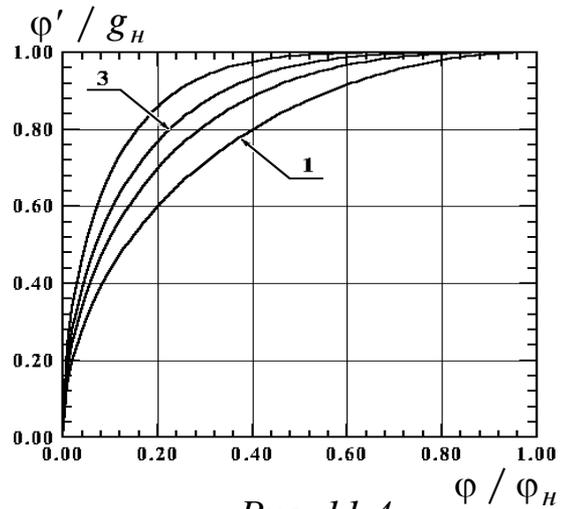


Рис. 11.4

Наибольшие значения потенциал и напряженность гравитационного поля принимают на краях системы. Распределение давления частиц по длине системы подчиняется гамильтониану коллективного взаимодействия (11.8), согласно которому давление самосогласованного поля больше там, где меньше давление частиц системы. Во всех случаях давление час

тиц на границах системы обращается в нуль, в результате чего ее граница резкая. Размер системы зависит от температуры Эмдена.

Неизменность температуры Эмдена на политропе приводит к распределению абсолютной температуры по длине системы:

$$\frac{T}{T_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/n} = 1 - \frac{\Phi}{\Phi_n}, \quad (11.39)$$

где  $T_0$  – температура системы в плоскости  $x=0$ . Она связана с  $\theta_E$  соотношением

$$T_0 = \theta_E \left( \frac{\rho_0}{\rho_*} \right)^{1/n}. \quad (11.40)$$

**Уравнение теплопроводности.** Из (11.39) видно, что функция распределения температуры в самосогласованных плоских политропических системах при любых индексах политропии – линейная функция гравитационного потенциала. Это приводит к следующим выводам.

- Абсолютная температура на краях системы у любой политропы равна нулю.
- Распределение температуры в системе удовлетворяет закону сохранения [получается из (11.8)]

$$l^2 (T' / T_0)^2 + (T / T_0)^{n+1} = 1 = const, \quad (11.41)$$

из которого следует, что градиент температуры системы изменяется от нуля до наименьшего значения, достигаемого на границах системы и равного

$$T'_n = -T_0 / l. \quad (11.42)$$

- Следующее из закона сохранения уравнение теплопроводности

$$\frac{T''}{T_0} = -\frac{n+1}{2l^2} \left( \frac{T}{T_0} \right)^n \quad (11.43)$$

указывает на то, что система обладает распределенными тепловыми источниками, объемная плотность мощности которых пропорциональна  $n$ -й степени абсолютной температуры.

- Индекс политропии  $n$  связан с молярной теплоемкостью  $c$  системы соотношением [см. (1.12),(1.9)]

$$n = \frac{c_v - c}{c_p - c_v}. \quad (11.44)$$

- Градиент температуры создает в системе стационарный тепловой поток, увеличивающийся к границам системы.

• Распределение температуры по длине системы при  $n=1$  повторяет распределение плотности:

при  $n=2$  оно имеет вид

$$\sigma x / l = F(\theta_6, k_2) / \sqrt[4]{3} \quad \text{при} \quad 0 \leq \theta_6 \leq \theta_{2H}, \quad (11.45)$$

где

$$\theta_6 = \arccos\left[\left(\sqrt{3} - 1 + T / T_0\right) / \left(\sqrt{3} + 1 - T / T_0\right)\right]; \quad (11.46)$$

при  $n=3$

$$\sigma x / l = F(\theta_7, k_3) / \sqrt{2} \quad \text{при} \quad 0 \leq \theta_7 \leq \pi / 2, \quad (11.47)$$

где

$$\theta_7 = \arccos(T / T_0); \quad (11.48)$$

при  $n=5$

$$\sigma \frac{x}{l} = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}} F(\theta_9, k_5) \quad \text{при} \quad 0 \leq \theta_9 \leq \pi, \quad (11.49)$$

где

$$\theta_9 = \arccos\left[\frac{(\sqrt{3} + 1)(T / T_0)^2 - 1}{(\sqrt{3} - 1)(T / T_0)^2 + 1}\right]. \quad (11.50)$$

Для любого индекса политропии направление объемных сил, удерживающих рассматриваемую систему в равновесии, остается неизменным: силы, стягивающие слой вещества, направлены к плоскости  $x=0$ , а силы, расширяющие слой, создаются градиентом давления самосогласованного поля, который компенсирует стягивающие силы.

**Оценки.** В заключение приведем оценки для газовых систем и систем, состоящих из нейтронов. Оценки показывают, что политропы ведут себя различно в зависимости от значения максимальной плотности  $\rho_0$ . Если она меньше единичной плотности вещества  $\rho^*$ , то для одного и того же идеального газа и одной и той же температуры  $\theta_E$  рост индекса  $n$  приводит к увеличению полного давления в системе и наибольших значений  $\varphi_n$  и  $g_n$ , а также к увеличению длины системы с ростом ее абсолютной температуры в плоскости  $x=0$ .

Если максимальная плотность  $\rho_0$  больше единичной плотности вещества  $\rho^*$ , то для одного и того же идеального газа при фиксированной температуре Эмдена  $\theta_E$  рост индекса  $n$  приводит к уменьшению полного давления в системе, наибольших значений  $\varphi_n$  и  $g_n$ , а также к уменьшению размера системы с уменьшением ее абсолютной температуры в плоскости  $x=0$ .

Так, кислород, удерживаемый самосогласованным полем, при температуре  $\theta_E=2,7 \cdot 10^5$  К и плотностью  $\rho_0=1,2$  кг/м<sup>3</sup> (в СГС  $\rho_0 < \rho_*$ ) для значения  $n=1$  имеет следующие параметры: полное давление  $P=p_0=10^5$  Па,  $g_H=1,3 \cdot 10^{-2}$  м/с<sup>2</sup>,  $\varphi_H=1,7 \cdot 10^5$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>,  $l=1,3 \cdot 10^7$  м,  $L=4,1 \cdot 10^7$  м,  $T_0=328$  К. Эти же параметры для  $n=5$  имеют следующие значения:  $P=p_0=2,2 \cdot 10^7$  Па,  $g_H=19,2 \cdot 10^{-2}$  м/с<sup>2</sup>,  $\varphi_H=1,1 \cdot 10^8$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>,  $l=5,7 \cdot 10^7$  м,  $L=1,4 \cdot 10^9$  м,  $T_0=7,1 \cdot 10^4$  К.

Оценки для нейтронов, удерживаемых самосогласованным полем, при ядерной плотности вещества  $\rho_0=1,675 \cdot 10^{17}$  кг/м<sup>3</sup> (в СГС  $\rho_0 > \rho_*$ ) и температуре  $\theta_E=2,7 \cdot 10^5$  К для значения  $n=1$  дают:  $P=p_0=6,3 \cdot 10^{40}$  Па,  $g_H=10^{16}$  м/с<sup>2</sup>,  $\varphi_H=7,5 \cdot 10^{23}$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>,  $l=7,5 \cdot 10^7$  м,  $L=2,4 \cdot 10^8$  м,  $T_0=4,6 \cdot 10^{19}$  К. Эти же параметры для  $n=5$  имеют следующие значения:  $P=p_0=2,6 \cdot 10^{29}$  Па,  $g_H=2,1 \cdot 10^{10}$  м/с<sup>2</sup>,  $\varphi_H=7,86 \cdot 10^{12}$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>,  $l=3,7 \cdot 10^2$  м,  $L=900$  м,  $T_0=1,9 \cdot 10^8$  К.

## § 12. Системы одноименных зарядов

На основе гамильтониана, описывающего коллективное взаимодействие одноименных зарядов с плоским самосогласованным полем, проводится классификация возбуждаемых полей и состояний политропического равновесия в системах со столкновениями.

**Скалярный интеграл.** Используя подход Френкеля [8], получим уравнение (6.15). Для этого в (6.1) учтем (6.2) и связь скалярного электрического потенциала с напряженностью (индекс 2 в плотности заряда опускаем):

$$\rho \text{grad} \varphi + \text{grad} p = 0. \quad (12.1)$$

Учитывая уравнение политропического состояния вещества (6.10), приведем (12.1) к виду

$$\text{grad} \left[ K_1(n+1)\rho^{1/n} + \varphi \right] = 0. \quad (12.2)$$

Из (12.2) следует, что любое политропическое равновесие системы зарядов характеризуется скалярным интегралом  $K_1(n+1)\rho^{1/n} + \varphi = \text{const}$ . Учтем свойство однородности скалярного интеграла. Для этого зафиксируем его значение на какой-либо линии уровня в плоскости  $(\rho, \varphi)$ .

Тогда для двух соседних точек этой линии имеем

$$K_1(n+1)\rho^{1/n} + \varphi = K_1(n+1)\rho_0^{1/n} + \varphi_0 = \text{const}. \quad (12.3)$$

**Функция распределения.** Из (12.3) следует функция распределения плотности и концентрации зарядов системы

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} = \left[ 1 - \frac{\varphi - \varphi_0}{K_1(n+1)\rho_0^{1/n}} \right]^n. \quad (12.4)$$

Калибруя в (12.4) потенциал из условия  $\rho = \rho_0$  при  $\varphi = 0$ , получим

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} = \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_n}\right)^n, \quad (12.5)$$

где  $\varphi_n = K_1(n+1)\rho_0^{1/n}$  – значение потенциала, при котором функция распределения обращается в нуль. Соотношение (12.5) представляет собой функцию распределения плотности и концентрации одноименных зарядов, находящихся в политропическом равновесии. Из функции распределения следует, что для любых индексов политропии ( $n > 0$ ) концентрация зарядов системы больше там, где меньше ее скалярный потенциал. Ее вид отличается от бесстолкновительной функции распределения (8.5).

**Уравнение политропического равновесия.** С помощью функции (12.5) можно согласовать уравнение для потенциала (6.11). Подставляя ее в правую часть (6.11), получим

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho_0\left(1 - \varphi / \varphi_n\right)^n. \quad (12.6)$$

Уравнение (12.6) является трехмерной модификацией уравнения (1.18) Лэна – Эмдена и позволяет рассчитать трехмерное статическое распределение потенциала в политропических конфигурациях одноименных зарядов, удерживаемых в равновесии самосогласованным полем системы.

Для плоской симметрии (12.6) преобразуется к виду

$$\varphi'' = -4\pi\rho_0\left(1 - \varphi / \varphi_n\right)^n. \quad (12.7)$$

**Гамильтонова функция системы.** Уравнение (12.7) имеет первый интеграл, являющийся гамильтонианом системы и соответствующий ее полному давлению  $P$

$$\frac{(\varphi')^2}{8\pi} - p_0\left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_n}\right)^{n+1} = H(\varphi', \varphi) = P, \quad (12.8)$$

в котором уменьшаемое представляет собой давление самосогласованного поля системы, а вычитаемое – давление зарядов системы  $p$ . Как и в бесстолкновительном случае, канонически сопряженные величины в функции Гамильтона (12.8) остаются теми же. Закон сохранения (12.8), как и ранее, выполняется при отсутствии любых внешних статических электрических полей,

рассматриваемых по отношению к самосогласованному полю системы. Это приводит к тому, что и в равновесной системе со столкновениями выполняется закон коллективного взаимодействия (6.5), хотя его вид формируется только при решении конкретной задачи. Интеграл полного давления (12.8) впервые получен в [36,37].

Закон сохранения (12.8) означает также, что в любой плоскости пространства взаимодействия рассматриваемой системы градиенты давлений самосогласованного поля и частиц системы сонаправлены друг с другом и равны между собой.

В выражении (12.8) давление зарядов системы в плоскости  $x=0$  обозначено

$$p_0 = \frac{\rho_0 \Phi_n}{n+1}. \quad (12.9)$$

Ниже будут получены законы пространственного распределения потенциала, напряженности, давления самосогласованного электрического поля в системах зарядов, находящихся в политропических состояниях с различными индексами политропии. Определены зависимости давления и концентрации зарядов от координаты системы. Рассчитана длина пространства взаимодействия. Показана ее зависимость от индекса политропии и политропической температуры. Найдены законы пространственного распределения абсолютной температуры системы. Приведены оценки для самосогласованных систем, состоящих из электронов.

**Случай положительного полного давления.** Как видно из (12.8), величина полного давления может быть положительной, нулевой и отрицательной. Исследуем случай положительного давления. Для этого полное давление (12.8) зададим в плоскости  $x=0$  и выберем в ней значение  $\varphi=0$ :

$$\frac{(\varphi'_0)^2}{8\pi} - p_0 = H(\varphi'_0 / 4\pi, 0) = P, \quad (12.10)$$

где  $\varphi'_0$  – значение градиента потенциала в этой плоскости. Направление вектора напряженности электрического поля  $E_0 = -\varphi'_0$  противоположно выбранному направлению оси  $x$ , поскольку все заряды системы в области  $x>0$  предполагаются положительными. Обе части равенства (12.10) разделим на величину давления поля  $W_0 = E_0^2 / 8\pi$ , взятого в плоскости  $x=0$  :

$$P / W_0 = 1 - \beta = P_1, \quad (12.11)$$

где  $\beta = p_0 / W_0$  – параметр состояния самосогласованной системы.

Система находится в состояниях с положительным полным давлением при условии  $P>0$  или  $0<\beta<1$ . В этом случае всегда существует такое значение координаты  $x=L$ , при котором потенциал системы достигает ве

личины  $\varphi_H$ , давление частиц системы в этой плоскости обращается в нуль, а сама система ограничена.

Интеграл в (12.8) представим в виде

$$x = \int_0^{\varphi} d\varphi / \sqrt{8\pi \left[ P + p_0(1 - \varphi / \varphi_H)^{n+1} \right]}. \quad (12.12)$$

Интегрирование (12.12) проводим с учетом того, что для  $P > 0$  в области  $0 < x < L$  градиент потенциала положителен. Его результат различен для различных индексов политропии.

**Распределения физических величин для случая  $n=1$ .** Распределение потенциала по длине системы имеет вид

$$\frac{\varphi}{\varphi_H} = 1 - \sqrt{(1 - \beta) / \beta} sh \left( Arsh \sqrt{\beta / (1 - \beta)} - \sqrt{\beta} x / l \right), \quad (12.13)$$

где

$$l = \varphi_H / E_0 \quad (12.14)$$

– пространственный масштаб системы. Из (12.13) видно, что для  $n=1$  самосогласованное поле, создаваемое коллективом зарядов, представляет собой потенциальный барьер, ограниченный по высоте и в пространстве. Длина пространства взаимодействия системы зависит от параметра состояния  $\beta$  и ограничена размерами

$$\frac{L}{l} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} Arsh \sqrt{\beta / (1 - \beta)}. \quad (12.15)$$

При  $\beta \rightarrow 0$  длина пространства взаимодействия приближается к пространственному масштабу. В случае  $\beta \rightarrow 1$  она не ограничена.

Распределение проекции напряженности самосогласованного поля следует из (12.13) и имеет вид

$$\frac{E_x}{E_0} = -\sqrt{1 - \beta} ch \left( Arsh \sqrt{\beta / (1 - \beta)} - \sqrt{\beta} x / l \right). \quad (12.16)$$

Плотность и концентрация зарядов изменяются по длине системы в соответствии с законом

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} = \sqrt{(1 - \beta) / \beta} sh \left( Arsh \sqrt{\beta / (1 - \beta)} - \sqrt{\beta} x / l \right). \quad (12.17)$$

Распределение давления зарядов системы имеет вид

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1 - \beta}{\beta} sh^2 \left( Arsh \sqrt{\beta / (1 - \beta)} - \sqrt{\beta} x / l \right). \quad (12.18)$$

Давление поля изменяется по длине системы по закону

$$D = \frac{E_x^2}{8\pi} = \frac{E_0^2}{8\pi} (1 - \beta) ch^2 \left( Arsh \sqrt{\beta / (1 - \beta)} - \sqrt{\beta} x / l \right). \quad (12.19)$$

Градиент давления зарядов системы направлен против оси  $x$  и совпадает в любой плоскости с градиентом давления поля :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dD}{dx} = -\frac{p_0}{l} \frac{(1-\beta)}{\sqrt{\beta}} sh\left[2\left( Arsh\sqrt{\beta / (1-\beta)} - \sqrt{\beta}x / l \right)\right]. \quad (12.20)$$

Из соотношений (12.19) и (12.18) легко убедиться, что разность давлений поля и частиц системы в любой плоскости пространства взаимодействия остается постоянной и равной полному давлению системы  $P$ . Из соотношения (12.20) видно, что градиент полного давления политропической системы зарядов ( $n=1$ ) в любой плоскости обращается в нуль.

Направления градиентов позволяют выяснить направления объемных сил, удерживающих систему в ограниченной области пространства в равновесии. Силы, прижимающие слой зарядов, направлены к плоскости  $x=0$  и сонаправлены с вектором  $\mathbf{E}$  [совпадает с (6.3)]. Силы, отталкивающие слой, создаются градиентом давления самосогласованного поля, взятым с противоположным знаком, который, компенсируя действие градиента давления зарядов, удерживает систему в равновесии [совпадает с (6.8)].

Когда давление самосогласованного поля значительно превышает давление зарядов системы, то выполняется приближение  $\beta \ll 1$ . В этом случае потенциал, создаваемый системой зарядов, линеен:

$$\varphi = \varphi_n x / l,$$

а электрическое поле системы однородно во всем пространстве взаимодействия:

$$E_x = -E_0.$$

Плотность и концентрация зарядов и в этом случае неоднородны и зависят от координаты системы по линейному закону

$$\rho / \rho_0 = n / n_0 = 1 - x / l.$$

Как и следовало ожидать, наибольшее значение потенциала системы, совпадающее с  $\varphi_n$ , а также ее длина зависят от температуры  $\theta_E$ :

$$\varphi_n = 2K_1 \rho_0 = \frac{2k\theta_E \rho_0}{q \rho_*}; \quad (12.21)$$

$$L = \frac{2k\theta_E \rho_0}{E_0 \sqrt{\beta} q \rho_*} Arsh\sqrt{\beta / (1-\beta)}, \quad (12.22)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана;  $q$  – элементарный заряд системы;  $\rho_0$  – наибольшая плотность зарядов системы;  $\rho_*$  – единица плотности зарядов (в СГС).

**Распределения физических величин для случая  $n=2$ .** Результат интегрирования в (12.12) выражается через специальную функцию

$$\frac{x}{l} = \frac{F(\theta_2, k_2) - F(\theta_1, k_2)}{\sqrt[4]{3} \sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)} \sqrt{1 - \beta}}, \quad (12.23)$$

где  $F$  – эллиптический интеграл I рода. Значение  $\theta$  изменяется в пределах  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , где

$$\theta_1 = \arccos \left[ \frac{\sqrt{3} - \sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)} (1 - \varphi / \varphi_H) - 1}{\sqrt{3} + \sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)} (1 - \varphi / \varphi_H) + 1} \right]; \quad (12.24)$$

$$\theta_2 = \arccos \left[ \frac{\sqrt{3} - \sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)} - 1}{\sqrt{3} + \sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)} + 1} \right]; \quad (12.25)$$

$$k_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sin \frac{5\pi}{12}. \quad (12.26)$$

Из (12.23) видно, что для  $n=2$  самосогласованное поле зарядов системы представляет собой потенциальный барьер, ограниченный по высоте и в пространстве. Длина пространства взаимодействия зависит от параметра состояния системы  $\beta$ :

$$\frac{L}{l} = \frac{F(\theta_2, k_2) - F(\theta_H, k_2)}{\sqrt[4]{3} \sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)} \sqrt{1 - \beta}}, \quad (12.27)$$

где

$$\theta_H = \arccos \left[ (\sqrt{3} - 1) / (\sqrt{3} + 1) \right].$$

Из (12.23) следуют распределения плотности зарядов, их давления и давления поля по длине системы:

$$\frac{x}{l} = \frac{F(\theta_2, k_2) - F(\theta_{1j}, k_2)}{\sqrt[4]{3} \sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)} \sqrt{1 - \beta}}, \quad (12.28)$$

где индексом  $j=3$  отмечено распределение плотности зарядов:

$$\theta_{13} = \arccos \left[ \frac{\sqrt{3} - \sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)} \sqrt{\rho / \rho_0} - 1}{\sqrt{3} + \sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)} \sqrt{\rho / \rho_0} + 1} \right]; \quad (12.29)$$

индексом  $j=4$  – распределение давления зарядов системы:

$$\theta_{14} = \arccos \left[ \frac{\sqrt{3} - \sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)} (p / p_0) - 1}{\sqrt{3} + \sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)} (p / p_0) + 1} \right]; \quad (12.30)$$

индексом  $j=5$  – распределение давления поля  $D$ :

$$\theta_{15} = \arccos \left[ \frac{\sqrt{3} - \sqrt[3]{(D / W_0 + \beta - 1) / (1 - \beta)} - 1}{\sqrt{3} + \sqrt[3]{(D / W_0 + \beta - 1) / (1 - \beta)} + 1} \right]. \quad (12.31)$$

**Фазовые траектории.** Поскольку получить из (12.23) зависимость  $\varphi = \varphi(x)$  в этом случае не удастся, связь между проекцией напряженности поля и потенциалом системы можно определить для любого  $n$  из соотношения

$$\frac{E_x}{E_0} = -\sqrt{1 + \beta \left[ \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_n}\right)^{n+1} - 1 \right]}. \quad (12.32)$$

Уравнение фазовых траекторий политропической системы зарядов любого индекса  $n$  получается из соотношения (12.32), взятого с противоположным знаком. Графики фазовых траекторий в координатах  $\left(\frac{\varphi}{\varphi_n}, \frac{\varphi'}{E_0}\right)$  начинаются в точке  $(0,1)$ , а заканчиваются в точке  $(1, \sqrt{1-\beta})$ .

**Распределения физических величин для случая  $n=3$ .** Интегрирование в (12.12) приводит к эллиптическому интегралу первого рода

$$\frac{x}{l} = \frac{F(\theta_2, k_3) - F(\theta_1, k_3)}{2\sqrt[4]{\beta / (1-\beta)} \sqrt{1-\beta}}. \quad (12.33)$$

Значение  $\theta$  в (12.33) изменяется в пределах  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , где

$$\theta_1 = \arccos \left[ \frac{1 - \sqrt{\beta / (1-\beta)} (1 - \varphi / \varphi_n)^2}{1 + \sqrt{\beta / (1-\beta)} (1 - \varphi / \varphi_n)^2} \right]; \quad (12.34)$$

$$\theta_2 = \arccos \left[ \frac{1 - \sqrt{\beta / (1-\beta)}}{1 + \sqrt{\beta / (1-\beta)}} \right]; \quad (12.35)$$

$$k_3 = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (12.36)$$

Из (12.33) видно, что для  $n=3$  самосогласованное поле зарядов системы представляет собой потенциальный барьер, ограниченный по высоте и в пространстве. Длина пространства взаимодействия системы ограничена и зависит от параметра состояния  $\beta$ :

$$\frac{L}{l} = \frac{F(\theta_2, k_3)}{2\sqrt[4]{\beta / (1-\beta)} \sqrt{1-\beta}}. \quad (12.37)$$

Из (12.33) следуют также распределения плотности зарядов, их давления и давления поля по длине системы:

$$\frac{x}{l} = \frac{F(\theta_2, k_3) - F(\theta_{1j}, k_3)}{2\sqrt[4]{\beta / (1-\beta)} \sqrt{1-\beta}}, \quad (12.38)$$

где индексом  $j=4$  отмечено распределение плотности зарядов:

$$\theta_{14} = \arccos \left[ \frac{1 - \sqrt{\beta / (1 - \beta)} (\rho / \rho_0)^{2/3}}{1 + \sqrt{\beta / (1 - \beta)} (\rho / \rho_0)^{2/3}} \right]; \quad (12.39)$$

индексом  $j=5$  – распределение давления зарядов системы:

$$\theta_{15} = \arccos \left[ \frac{1 - \sqrt{\beta / (1 - \beta)} (p / p_0)}{1 + \sqrt{\beta / (1 - \beta)} (p / p_0)} \right]; \quad (12.40)$$

индексом  $j=6$  – распределение давления поля  $D$ :

$$\theta_{16} = \arccos \left[ \frac{1 - \sqrt{(D / W_0 + \beta - 1) / (1 - \beta)}}{1 + \sqrt{(D / W_0 + \beta - 1) / (1 - \beta)}} \right]. \quad (12.41)$$

И в этом случае получить явный вид зависимости  $\varphi(x)$  не удастся. При численном моделировании (12.33) связь между напряженностью и потенциалом системы следует использовать в виде (12.32).

**Распределения физических величин для случая  $n=5$ .** Интегрирование в (12.12) также приводит к эллиптическому интегралу первого рода

$$\frac{x}{l} = \frac{F(\theta_2, k_5) - F(\theta_1, k_5)}{2\sqrt[6]{\beta / (1 - \beta)} \sqrt{1 - \beta^4/3}}, \quad (12.42)$$

где

$$\theta_1 = \arccos \left[ \frac{1 - (\sqrt{3} - 1)\sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)} (1 - \varphi / \varphi_n)^2}{1 + (\sqrt{3} + 1)\sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)} (1 - \varphi / \varphi_n)^2} \right]; \quad (12.43)$$

$$\theta_2 = \arccos \left[ \frac{1 - (\sqrt{3} - 1)\sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)}}{1 + (\sqrt{3} + 1)\sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)}} \right], \quad (12.44)$$

а

$$k_5 = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}. \quad (12.45)$$

Из (12.42) видно, что и в случае  $n=5$  самосогласованное поле зарядов системы представляет собой потенциальный барьер, ограниченный по высоте и в пространстве. Длина пространства взаимодействия ограничена и определяется параметром состояния системы  $\beta$ :

$$\frac{L}{l} = \frac{F(\theta_2, k_5)}{2\sqrt[6]{\beta / (1 - \beta)} \sqrt{1 - \beta^4/3}}. \quad (12.46)$$

Из (12.42) следуют распределения плотности зарядов, их давления и давления поля по длине системы:

$$\frac{x}{l} = \frac{F(\theta_2, k_5) - F(\theta_{1j}, k_5)}{2\sqrt[6]{\beta / (1 - \beta)} \sqrt{1 - \beta^4/3}}, \quad (12.47)$$

где индексом  $j=6$  отмечено распределение плотности зарядов:

$$\theta_{16} = \arccos \left[ \frac{1 - (\sqrt{3} - 1) \sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)} (\rho / \rho_0)^{2/5}}{1 + (\sqrt{3} + 1) \sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)} (\rho / \rho_0)^{2/5}} \right]; \quad (12.48)$$

индексом  $j=7$  – распределение давления зарядов системы:

$$\theta_{17} = \arccos \left[ \frac{1 - (\sqrt{3} - 1) \sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)} (p / p_0)}{1 + (\sqrt{3} + 1) \sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)} (p / p_0)} \right]; \quad (12.49)$$

индексом  $j=8$  – распределение давления поля  $D$ :

$$\theta_{18} = \arccos \left[ \frac{1 - (\sqrt{3} - 1) \sqrt[3]{(D / W_0 - 1 + \beta) / (1 - \beta)}}{1 + (\sqrt{3} + 1) \sqrt[3]{(D / W_0 - 1 + \beta) / (1 - \beta)}} \right]. \quad (12.50)$$

**Обсуждение результатов.** Численное моделирование соотношений (12.23), (12.33) и (12.42) показало, что характер распределения в пространстве потенциала, проекции напряженности поля (12.32), плотности и концентрации зарядов по длине системы остаются такими же, как и для случая  $n=1$ . На рис. 12.1 представлены распределения потенциала по длине системы для  $n=1,2,3,5$ , а на рис. 12.2 даны зависимости проекции напряженности самосоглазованного поля от координаты системы  $x/l$  для тех же индексов политропии. По соотношению (12.5) рассчитано распределение плотности заряда и приведено на рис. 12.3 для  $n=1,2,3,5$ . Фазовые траектории системы для этих же индексов построены по (12.32) и представлены на рис. 12.4. Все распределения и фазовые траектории построены для параметра состояния  $\beta=1/2$ .

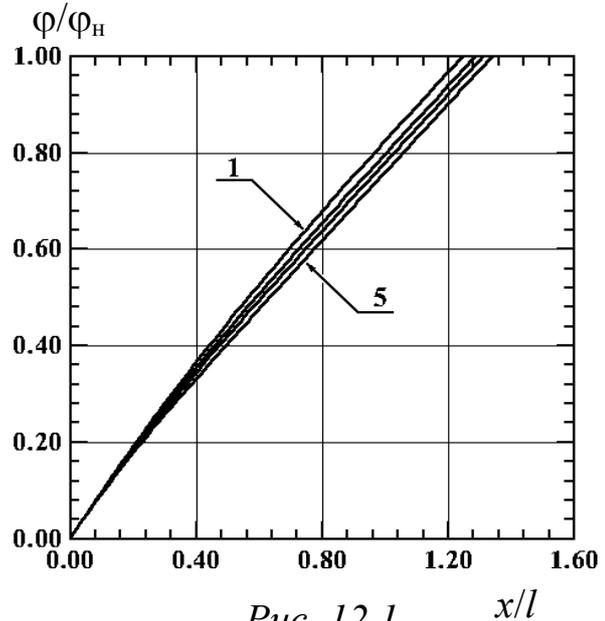


Рис. 12.1  $x/l$

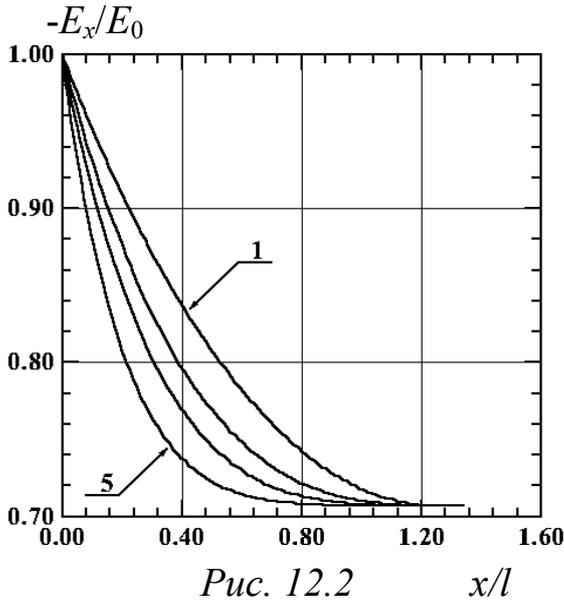


Рис. 12.2

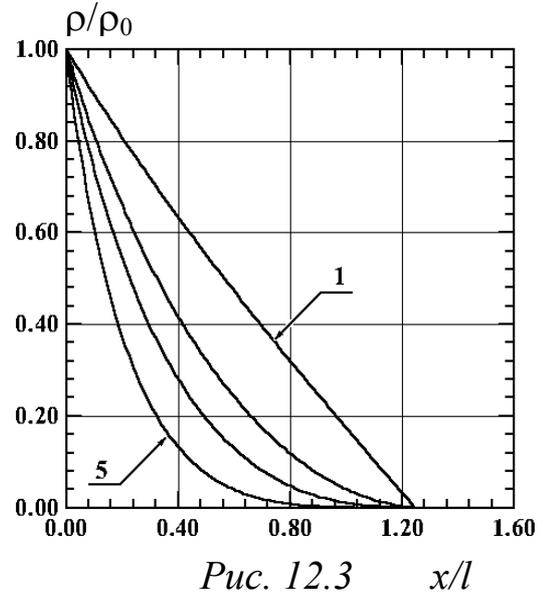


Рис. 12.3

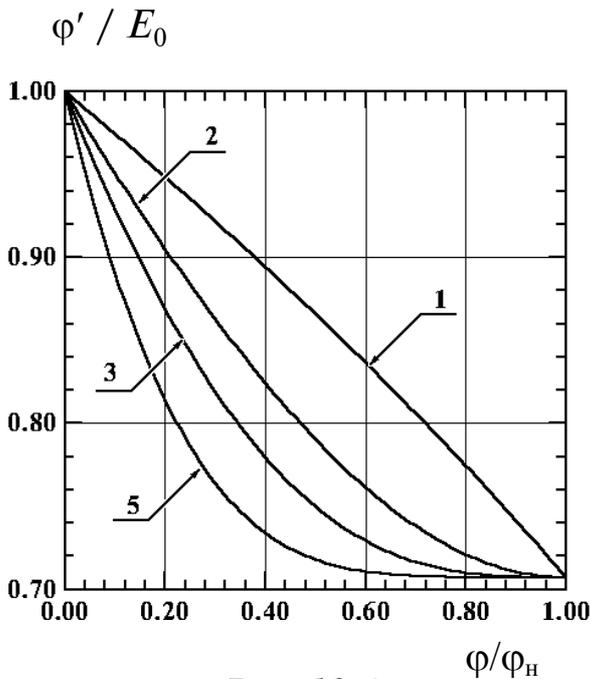


Рис. 12.4

Как видно из соотношений (12.23), (12.33), (12.42) и рис. 12.1 – 12.4 политропическая самосогласованная система зарядов ограничена в пространстве для любых индексов политропии и всегда неоднородна. Наибольших значений потенциал  $\phi_n$  и проекция напряженности электрического поля  $E_n = -\sqrt{1-\beta}E_0$  достигают на границе системы.

Распределение давления зарядов по длине системы подчиняется гамильтониану коллективного взаимодействия (12.8), согласно которому давление самосогласованного поля больше там, где больше давление зарядов системы. Во всех случаях давление зарядов на границе системы обращается в нуль, в результате чего ее граница резкая.

Длина пространства взаимодействия для любого индекса политропии выражается через пространственный масштаб системы:

$$l = \frac{k\theta_E(n+1)}{qE_0} \left( \frac{\rho_0}{\rho_*} \right)^{1/n}, \quad (12.51)$$

который зависит от температуры Эмдена  $\theta_E$ .

**Уравнение теплопроводности.** Неизменность температуры Эмдена  $\theta_E$  на политропе приводит к распределению абсолютной температуры по длине системы

$$\frac{T}{T_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/n} = 1 - \frac{\Phi}{\Phi_n}, \quad (12.52)$$

где  $T_0$  – температура системы в плоскости  $x=0$ . Она связана с  $\theta_E$  соотношением

$$T_0 = \theta_E \left( \frac{\rho_0}{\rho_*} \right)^{1/n}. \quad (12.53)$$

Из (12.52) видно, что так же, как и в гравитирующих системах, функция распределения температуры в самосогласованных плоских политропических системах зарядов при любых индексах политропии – линейная функция скалярного потенциала. Это приводит к следующим выводам.

- Абсолютная температура на границе системы у любой политропы равна нулю.
- Распределение температуры в системе зарядов удовлетворяет закону сохранения [получается из (12.8)]

$$l^2 (T' / T_0)^2 - \beta (T / T_0)^{n+1} = 1 - \beta = \text{const}, \quad (12.54)$$

из которого следует, что распределение температуры зависит от параметра состояния системы  $\beta$ , а значение градиента температуры изменяется от наименьшего значения  $T'_0 = -T_0 / l$  в плоскости  $x=0$  до наибольшего значения, достигаемого на границе системы и равного

$$T'_n = -\sqrt{1 - \beta} T_0 / l. \quad (12.55)$$

- Следующее из закона сохранения (12.54) уравнение теплопроводности

$$\frac{T''}{T_0} = \frac{\beta(n+1)}{2l^2} \left( \frac{T}{T_0} \right)^n \quad (12.56)$$

указывает на то, что исследуемая система обладает распределенными тепловыми стоками (сравним с [38]), объемная плотность мощности которых пропорциональна  $n$ -й степени абсолютной температуры, а в выражение для коэффициента пропорциональности входит не только индекс политропы, но и параметр состояния системы. Индекс политропии  $n$ , как и

ранее, связан с молярной теплоемкостью  $c$  газа одноименных зарядов соотношением (см. 1.12,1.9)

$$n = \frac{c_v - c}{c_p - c_v}.$$

- Градиент температуры создает в системе стационарный тепловой поток, уменьшающийся к границе системы.
- Распределение температуры по длине системы при  $n=1$  повторяет распределение плотности зарядов; при  $n=2$  оно имеет вид

$$\frac{x}{l} = \frac{F(\theta_2, k_2) - F(\theta_3, k_2)}{\sqrt[4]{3}\sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)} \sqrt{1 - \beta}}, \quad (12.57)$$

где

$$\theta_3 = \arccos \left[ \frac{\sqrt{3} - \sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)} (T / T_0) - 1}{\sqrt{3} + \sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)} (T / T_0) + 1} \right];$$

при  $n=3$

$$\frac{x}{l} = \frac{F(\theta_2, k_3) - F(\theta_4, k_3)}{2\sqrt[4]{\beta / (1 - \beta)} \sqrt{1 - \beta}}, \quad (12.58)$$

где

$$\theta_4 = \arccos \left[ \frac{1 - \sqrt{\beta / (1 - \beta)} (T / T_0)^2}{1 + \sqrt{\beta / (1 - \beta)} (T / T_0)^2} \right];$$

при  $n=5$

$$\frac{x}{l} = \frac{F(\theta_2, k_5) - F(\theta_5, k_5)}{2\sqrt[6]{\beta / (1 - \beta)} \sqrt{1 - \beta} \sqrt[4]{3}}, \quad (12.59)$$

где

$$\theta_5 = \arccos \left[ \frac{1 - (\sqrt{3} - 1)\sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)} (T / T_0)^2}{1 + (\sqrt{3} + 1)\sqrt[3]{\beta / (1 - \beta)} (T / T_0)^2} \right]. \quad (12.60)$$

Направления объемных сил, удерживающих систему одноименных зарядов в равновесии, остаются неизменными для любого индекса политропии: силы, прижимающие слой зарядов, направлены к плоскости  $x=0$ , а силы, отталкивающие слой, создаются градиентом давления самосогласованного поля, взятым с противоположным знаком. Они направлены по оси  $x$ .

**Оценки.** Приведем оценки для самосогласованных систем, состоящих из электронов. Предположим, что плоской поверхности, находящейся при температуре  $T_0=10^3$ К, сообщили избыточный заряд электронов. Пренебрегая термоэлектронами, оценим основные параметры возникшей "атмо

сферы". Как и в случае гравитирующих частиц, поведение электронов в политропических состояниях зависит от значения наибольшей плотности заряда  $\rho_0$ . Если она больше единичной плотности заряда  $\rho_*$ , то для фиксированного параметра состояния  $\beta$  электронного газа с той же концентрацией зарядов у поверхности рост индекса  $n$  приводит к увеличению следующих параметров: температуры Эмдена  $\theta_E$ , наибольшего значения  $\varphi_n$  и длины пространства взаимодействия  $L$ . Если наибольшая плотность  $\rho_0$  меньше единичной плотности заряда  $\rho_*$ , то при прочих равных условиях рост индекса  $n$  приводит к уменьшению температуры Эмдена  $\theta_E$ , но к увеличению значения  $\varphi_n$  и длины пространства взаимодействия  $L$ .

Так, электроны с параметром состояния  $\beta=1/2$ , удерживаемые самосогласованным полем, с концентрацией у поверхности  $n_0=10^{11}\text{ см}^{-3}$  ( $\rho_0>\rho_*$ ) для значения  $n=1$  имеют температуру  $\theta_E=20\text{ К}$ , давление  $p_0=1,4\cdot 10^{-3}\text{ Па}$ ,  $E_0=250\text{ В/см}$ ,  $\varphi_n=170\text{ мВ}$ ,  $L=9\text{ мкм}$ . Те же электроны для  $n=3$  имеют температуру  $\theta_E=275\text{ К}$ , те же давление  $p_0$  и напряженность  $E_0$ , но  $\varphi_n=350\text{ мВ}$  и длину пространства взаимодействия  $L=18\text{ мкм}$ .

При уменьшении концентрации электронов у поверхности до значения  $n_0=10^9\text{ см}^{-3}$  ( $\rho_0<\rho_*$ ) при  $\beta=1/2$  изменяется температура Эмдена в случае  $n=1$  до  $\theta_E=2000\text{ К}$ , давление – до  $p_0=1,4\cdot 10^{-5}\text{ Па}$ , напряженность – до  $E_0=25\text{ В/см}$ , потенциал – до  $\varphi_n=165\text{ мВ}$ , длина – до  $L=84\text{ мкм}$ . Те же электроны для  $n=3$  нагреты до температуры  $\theta_E=1300\text{ К}$ , имеют те же значения давления  $p_0$  и напряженности  $E_0$ , но – увеличенные значения  $\varphi_n=340\text{ мВ}$  и длины пространства взаимодействия  $L=180\text{ мкм}$ .

**Случай нулевого полного давления.** Исследуем политропические равновесия системы одноименных зарядов с нулевым полным давлением  $P=0$ , так как полученные ранее соотношения их не описывают. В этих состояниях в любой плоскости пространства взаимодействия давление самосогласованного поля равно давлению частиц системы, или  $W_0=p_0$ . Интеграл в (12.12) для этого случая можно представить в виде

$$\frac{x}{l} = \int_t^1 \frac{dt}{t^k}, \quad (12.61)$$

где  $t = 1 - \varphi / \varphi_n$ , а  $k = (n + 1) / 2$ . Интегрирование в (12.61) проводим с учетом того, что  $\varphi' > 0$  во всей области изменения  $x$ . Результат интегрирования различен для различных индексов политропии.

**Распределения физических величин для случая  $n=1$ .** Распределение потенциала по длине системы имеет вид

$$\varphi = \varphi_n [1 - \exp(-x / l)], \quad (12.62)$$

где, как и ранее,  $l = \varphi_n / E_0$ . Из (12.62) видно, что для  $n=1$  самосогласованное поле зарядов представляет собой ограниченный по высоте, но не ограниченный в пространстве потенциальный барьер.

Проекция напряженности поля по длине системы изменяется по закону

$$E_x = -E_0 \exp(-x / l) \quad (12.63)$$

и исчезает на больших расстояниях от плоскости  $x=0$ . По этому же закону изменяется температура системы

$$T = T_0 \exp(-x / l). \quad (12.64)$$

Распределения плотности и концентрации зарядов по длине системы также экспоненциальны:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} = \exp(-x / l). \quad (12.65)$$

Давления поля и зарядов зависят от координаты системы одинаково:

$$\frac{D}{D_0} = \frac{p}{p_0} = \exp(-2x / l). \quad (12.66)$$

Как и ранее, градиент давления зарядов системы направлен против оси  $x$  и совпадает в любой плоскости пространства взаимодействия с градиентом давления поля.

**Распределения физических величин для  $n>1$ .** Распределение потенциала по длине системы имеет вид

$$\frac{\varphi}{\varphi_n} = 1 - \left[ 1 + \frac{(n-1)x}{2l} \right]^{-2/(n-1)}. \quad (12.67)$$

Из (12.67) видно, что и для  $n>1$  самосогласованное поле зарядов в состояниях с нулевым давлением представляет собой ограниченный по высоте, но не ограниченный в пространстве потенциальный барьер. Напряженность поля по длине системы изменяется по закону

$$\frac{E_x}{E_0} = - \left[ 1 + \frac{(n-1)x}{2l} \right]^{-\frac{n+1}{n-1}} \quad (12.68)$$

и исчезает на больших расстояниях от плоскости  $x=0$ . Абсолютная температура системы распределена по закону

$$\frac{T}{T_0} = \left[ 1 + \frac{(n-1)x}{2l} \right]^{-2/(n-1)}. \quad (12.69)$$

Плотность и концентрация зарядов системы неоднородны:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} = \left[ 1 + \frac{(n-1)x}{2l} \right]^{-2n/(n-1)}. \quad (12.70)$$

Давления поля и зарядов зависят от координаты системы одинаково:

$$D = p = p_0 \left[ 1 + \frac{(n-1)x}{2l} \right]^{-2(n+1)/(n-1)}. \quad (12.71)$$

Градиент давления частиц системы направлен против оси  $x$  и совпадает в любой плоскости пространства взаимодействия с градиентом давления поля.

**Фазовые траектории и уравнение теплопроводности.** Фазовые траектории системы следуют из (12.32) при  $\beta=1$ :

$$\frac{\varphi'}{E_0} = (1 - \varphi / \varphi_H)^{(n+1)/2}. \quad (12.72)$$

Графики фазовых траекторий системы в координатах  $\left( \frac{\varphi}{\varphi_H}, \frac{\varphi'}{E_0} \right)$  начинаются в точке  $(0,1)$ , заканчиваются в точке  $(1,0)$  и помещаются в первой четверти.

Распределение температуры в системах одноименных зарядов с нулевым давлением удовлетворяет закону сохранения (см. (12.54) при  $\beta=1$ ):

$$l^2 \left( \frac{T'}{T_0} \right)^2 - \left( \frac{T}{T_0} \right)^{n+1} = 0 = const, \quad (12.73)$$

из которого следует, что градиент температуры в этом случае изменяется от наименьшего значения  $T'_0 = -T_0 / l$  в плоскости  $x=0$  до наибольшего  $T'_H = 0$ , достигаемого на больших расстояниях от плоскости  $x=0$ .

Уравнение теплопроводности совпадает с (12.56) при  $\beta=1$ . Оно указывает на то, что и в случае  $P=0$  система обладает распределенными тепловыми стоками, объемная плотность мощности которых пропорциональна  $n$ -й степени абсолютной температуры. Градиент температуры создает в системе стационарный тепловой поток, практически исчезающий на больших расстояниях от плоскости  $x=0$ .

**Случай отрицательного полного давления.** Рассмотрим случай отрицательного полного давления. В этих состояниях в любой плоскости пространства взаимодействия давление поля меньше давления зарядов системы. Представим (12.8) в плоскости  $x=0$  в виде

$$\frac{(\varphi'_0)^2}{8\pi} - p_0 = H(\varphi'_0 / 4\pi, 0) = P = -P_2, \quad (12.74)$$

где

$$P_2 = W_0(\beta - 1), \quad (12.75)$$

а  $\beta$  – параметр состояния системы, принимающий значения  $\beta > 1$ . В этих состояниях у системы всегда существует такое значение координаты  $x=h$ , при котором обращается в нуль градиент потенциала  $\varphi'(h) = 0$ , а стало быть, и давление самосогласованного поля. Это приводит к тому, что в плоскости  $x=h$  потенциал системы принимает максимальное положительное значение

$$\varphi_m = \varphi_h \left[ 1 - \left( \frac{\beta - 1}{\beta} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right]. \quad (12.76)$$

Тогда одному значению потенциала, заключенному в интервале  $0 \leq \varphi \leq \varphi_m$ , всегда соответствуют два значения координаты. Учитывая такую многозначность, приведем интеграл в (12.8) к виду

$$x = h - \sigma \int_{\varphi}^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{8\pi P_2 \left[ \frac{\beta}{\beta - 1} \left( 1 - \frac{\varphi}{\varphi_h} \right)^{n+1} - 1 \right]}}, \quad (12.77)$$

где

$$h = \sigma \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{8\pi P_2 \left[ \frac{\beta}{\beta - 1} \left( 1 - \frac{\varphi}{\varphi_h} \right)^{n+1} - 1 \right]}}, \quad (12.78)$$

а знак  $\sigma$  определяется следующим образом:

$$\sigma = \begin{cases} +1 & \text{при } 0 \leq x < h, \\ 0 & \text{при } x = h, \\ -1 & \text{при } x > h. \end{cases}$$

Результаты интегрирования (12.77) и (12.78) различны для различных индексов политропии  $n$ .

**Распределения физических величин для случая  $n=1$ .** Распределение потенциала по длине системы имеет вид

$$\frac{\varphi}{\varphi_h} = 1 - \sqrt{\frac{\beta - 1}{\beta}} ch \left[ \frac{\sqrt{\beta}(h - x)}{l} \right], \quad (12.79)$$

где

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{\beta}{\beta-1}}, \quad (12.80)$$

а значение  $l$  определено в (12.14). Из (12.79) видно, что для  $n=l$  самосогласованное поле, создаваемое зарядами, представляет собой потенциальный барьер, имеющий максимум в плоскости нулевого давления поля при  $x = h$  и не ограниченный в пространстве.

Распределение проекции напряженности самосогласованного поля системы следует из (12.79) и имеет вид

$$\frac{E_x}{E_0} = -\sqrt{\beta-1} \operatorname{sh} \left[ \frac{\sqrt{\beta}(h-x)}{l} \right]. \quad (12.81)$$

Плотность и концентрация зарядов, а также температура изменяются по длине системы в соответствии с законом

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} = \frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{\beta-1}{\beta}} \operatorname{ch} \left[ \frac{\sqrt{\beta}(h-x)}{l} \right]. \quad (12.82)$$

Распределение давления зарядов системы имеет вид

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\beta-1}{\beta} \operatorname{ch}^2 \left[ \frac{\sqrt{\beta}(h-x)}{l} \right]. \quad (12.83)$$

Давление поля изменяется по длине системы согласно закону

$$D = \frac{E_0^2}{8\pi} (\beta-1) \operatorname{sh}^2 \left[ \frac{\sqrt{\beta}(h-x)}{l} \right]. \quad (12.84)$$

Градиент давления частиц системы изменяет свое направление в пространстве на противоположное при переходе через плоскость  $x=h$  и совпадает в любой плоскости с градиентом давления поля

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dD}{dx} = -\frac{p_0}{l} \frac{(\beta-1)}{\sqrt{\beta}} \operatorname{sh} \left[ \frac{2\sqrt{\beta}(h-x)}{l} \right]. \quad (12.85)$$

Направления градиентов позволяют выяснить физический механизм удержания зарядов полем и в этом случае. Силы, прижимающие слой зарядов к плоскости нулевого давления поля, противоположны вектору  $\mathbf{E}$ . Силы, расширяющие слой, сонаправлены с вектором  $\mathbf{E}$ .

**Распределения физических величин для случая  $n=2$ .** Интеграл в (12.77) выражается через специальную функцию

$$\frac{\sigma(h-x)}{l} = \frac{F(\theta_2, k_2)}{\sqrt[4]{3\sqrt{\beta} / (\beta-1)\sqrt{\beta-1}}}, \quad (12.86)$$

где  $F(x, k)$  - эллиптический интеграл 1 рода;

$$\theta_2 = \arccos \frac{\sqrt{3} - \left[ (1 - \varphi / \varphi_n) \sqrt[3]{\beta / (\beta - 1)} - 1 \right]}{\sqrt{3} + \left[ (1 - \varphi / \varphi_n) \sqrt[3]{\beta / (\beta - 1)} - 1 \right]}; \quad (12.87)$$

$$k_2 = \sqrt{2 - \sqrt{3}} / 2. \quad (12.88)$$

Значение  $\theta_2$  изменяется в пределах  $0 \leq \theta_2 < \pi$ , а расстояние до плоскости нулевого давления  $h$  зависит от параметра состояния системы  $\beta$  и находится из соотношения

$$\frac{h}{l} = \frac{F(\theta_1, k_2)}{\sqrt[4]{3} \sqrt[3]{\beta / (\beta - 1)} \sqrt{\beta - 1}}, \quad (12.89)$$

где

$$\theta_1 = \arccos \frac{\sqrt{3} - \left[ \sqrt[3]{\beta / (\beta - 1)} - 1 \right]}{\sqrt{3} + \left[ \sqrt[3]{\beta / (\beta - 1)} - 1 \right]}. \quad (12.90)$$

Из соотношений (12.86)-(12.90) легко получить обратные зависимости, описывающие распределение физических величин системы для политропы  $n=2$ .

Поскольку обратить зависимость  $x = x(\varphi)$  в этом случае не удастся, связь между проекцией напряженности поля и потенциалом системы можно определить для любого  $n$  из соотношения

$$\frac{E_x}{E_0} = -\sigma \sqrt{\beta \left\{ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{\beta - 1}{\beta} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right] \frac{\varphi}{\varphi_m} \right\}^{n+1} + 1 - \beta}. \quad (12.91)$$

Уравнение фазовых траекторий политропической системы зарядов в состояниях с отрицательным полным давлением для любого индекса  $n$  следует из соотношения (12.91), взятого с противоположным знаком. Графики фазовых траекторий в координатах  $\left( \frac{\varphi}{\varphi_m}, \frac{\varphi'}{E_0} \right)$  всегда имеют три точки

пересечения для любого значения параметра  $\beta$ : (0,1), (1,0), (0,-1). Все они незамкнуты, не ограничены и расположены в I, III и IV четвертях.

**Распределения физических величин для случая  $n=3$ .** Результат интегрирования в (12.77) выражается через эллиптический интеграл первого рода:

$$\frac{\sigma(h - x)}{l} = \frac{F(\theta_3, k_3)}{\sqrt{2(\beta - 1)} \sqrt[4]{\beta / (\beta - 1)}}, \quad (12.92)$$

где

$$\theta_3 = \arccos \left[ \sqrt[4]{\beta / (\beta - 1)} (1 - \varphi / \varphi_n) \right]^{-1}; \quad (12.93)$$

$$k_3 = \sin(\pi / 4) = \sqrt{2} / 2; \quad (12.94)$$

$$\frac{h}{l} = \frac{F(\theta_4, k_3)}{\sqrt{2(\beta - 1)\sqrt[4]{\beta / (\beta - 1)}}}; \quad (12.95)$$

$$\theta_4 = \arccos \sqrt[4]{(\beta - 1) / \beta}, \quad (12.96)$$

а значение  $\theta_3$  изменяется в пределах  $0 \leq \theta_3 < \pi / 2$ .

Из соотношений (12.92) – (12.96) легко получить обратные зависимости, описывающие распределение физических величин для случая  $n=3$ .

**Распределения физических величин для случая  $n=5$ .** Интегрирование в (12.77) также приводит к эллиптическому интегралу первого рода

$$\frac{\sigma(h - x)}{l} = \frac{F(\theta_5, k_5)}{2\sqrt[4]{3}\sqrt{\beta - 1}\sqrt[6]{\beta / (\beta - 1)}}, \quad (12.97)$$

где

$$\theta_5 = \arccos \frac{(\sqrt{3} - 1) \left[ \sqrt[3]{\beta / (\beta - 1)} (1 - \varphi / \varphi_n)^2 + 1 \right]}{(\sqrt{3} + 1) \left[ \sqrt[3]{\beta / (\beta - 1)} (1 - \varphi / \varphi_n)^2 - 1 \right]}; \quad (12.98)$$

$$k_5 = \sqrt{2 + \sqrt{3}} / 2; \quad (12.99)$$

$$\frac{h}{l} = \frac{F(\theta_6, k_5)}{2\sqrt[4]{3}\sqrt{\beta - 1}\sqrt[6]{\beta / (\beta - 1)}}; \quad (12.100)$$

$$\theta_6 = \arccos \frac{(\sqrt{3} - 1) \left[ \sqrt[3]{\beta / (\beta - 1)} + 1 \right]}{(\sqrt{3} + 1) \left[ \sqrt[3]{\beta / (\beta - 1)} - 1 \right]}, \quad (12.101)$$

а значение  $\theta_5$  изменяется в пределах  $0 \leq \theta_5 < \theta_7$ , где  $\theta_7 = \arccos \left[ (\sqrt{3} - 1) / (\sqrt{3} + 1) \right]$ .

Из соотношений (12.97) – (12.101) легко получить обратные зависимости, описывающие распределение физических величин для случая  $n=5$ .

**Обсуждение результатов.** Как видно из соотношений (12.79) – (12.101), характер распределения в пространстве потенциала, напряженности поля, плотности и концентрации зарядов по длине системы остается таким же, как и в случае  $n = 1$ . Для любых  $n$  самосогласованное поле, создаваемое зарядами, представляет собой потенциальный барьер, имеющий максимум в плоскости нулевого давления поля при  $x = h$  и не ограниченный в пространстве.

Направление сил, удерживающих систему в равновесии, одинаково для любых  $n$ . Силы, стягивающие слой зарядов к плоскости нулевого давления поля, направлены противоположно вектору  $\mathbf{E}$ . Силы, расширяющие слой, сонаправлены с  $\mathbf{E}$ .

Распределение давления зарядов по длине системы подчиняется гамильтониану коллективного взаимодействия (12.8), согласно которому давление самосогласованного поля больше там, где больше давление ее зарядов. Политропические состояния системы с отрицательным полным давлением отличаются от рассмотренных ранее. Неограниченный размер пространства, занятого зарядами, указывает на то, что кулоновское взаимодействие в системе преобладает над полевым.

### ГЛАВА 3. ИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

#### § 13. Системы гравитирующих частиц

На основе гамильтониана, описывающего коллективное взаимодействие гравитирующих частиц с плоским самосогласованным полем, проведена классификация возбуждаемых полей и состояний изотермического равновесия в системах со столкновениями. Получены законы пространственного распределения потенциала, напряженности, давления поля и частиц системы.

**Скалярный интеграл.** Используя подход Френкеля [8], получим уравнение (5.14). Для этого в (5.1) с учетом (5.2) привлечем связь гравитационного потенциала с напряженностью (индекс 1 опускаем):

$$\rho \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} p = 0. \quad (13.1)$$

Учитывая уравнение изотермического состояния вещества (5.13), приведем (13.1) к виду

$$\operatorname{grad} \left( \frac{m\varphi}{kT} + \ln \rho \right) = 0. \quad (13.2)$$

Из (13.2) следует, что любое изотермическое равновесие гравитирующих частиц характеризуется скалярным интегралом  $m\varphi / (kT) + \ln \rho = \text{const}$ . Учтем свойство однородности скалярного интеграла. Для этого зафиксируем его значение на какой-либо линии уровня в плоскости  $(\varphi, \rho)$ . Тогда для двух соседних точек этой линии уровня системы имеем

$$\frac{m\varphi}{kT} + \ln \rho = \frac{m\varphi_0}{kT} + \ln \rho_0 = \text{const}. \quad (13.3)$$

**Функция распределения.** Из (13.3) следует функция распределения плотности и концентрации вещества Больцмана в изотермической системе:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} = \exp\left[-\frac{m(\varphi - \varphi_0)}{kT}\right]. \quad (13.4)$$

Калибруя потенциал в (13.4) в соответствии с условием  $\rho = \rho_0$  при  $\varphi = 0$ , получим

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} = \exp\left(-\frac{m\varphi}{kT}\right). \quad (13.5)$$

Из (13.5) следует, что концентрация гравитирующих частиц системы больше там, где меньше ее скалярный потенциал. Ее вид отличается от функций распределения бесстолкновительного случая (7.5) и случая политропических состояний (9.5).

**Уравнение изотермического равновесия.** Функция (13.5) позволяет согласовать уравнение для потенциала (5.11). Подставляя (13.5) в правую часть (5.11), получим уравнение (5.14):

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho_0 \exp(-m\varphi / kT), \quad (13.6)$$

которое позволяет рассчитать трехмерное распределение потенциала в изотермической газовой конфигурации, удерживаемой в равновесии самосогласованным полем.

**Гамильтонова функция системы.** Уравнение (13.6) для плоской симметрии преобразуем к виду

$$\varphi'' = 4\pi G\rho_0 \exp(-m\varphi / kT). \quad (13.7)$$

Оно имеет первый интеграл, являющийся гамильтонианом системы и соответствующий ее полному давлению [13]:

$$\frac{(\varphi')^2}{8\pi G} + p_0 \exp(-m\varphi / kT) = P = H(\varphi' / 4\pi, \varphi) = \text{const}, \quad (13.8)$$

где  $p_0 = n_0 kT$ .

Как видно из (13.8), величина полного давления частиц в изотермической системе положительна. Определим его в плоскости  $x=0$ , предполагая, что в ней  $\varphi_0 = 0$ ,  $\varphi'_0 = 0$ . Тогда полное давление совпадает со значением  $p_0$  и ограничивает наибольшее значение градиента потенциала системы:

$$\varphi'_n = \sigma \sqrt{8\pi G P_0} = -g_n, \quad (13.9)$$

где  $\sigma = \text{sign}(\varphi')$ .

**Распределения физических величин.** Интеграл из уравнения (13.8) представим в виде

$$\sigma x = \int_0^{\varphi} \left[ 8\pi G (P - n_0 kT \exp(-m\varphi / kT)) \right]^{-1/2} d\varphi. \quad (13.10)$$

Интегрируя (13.10), получим

$$\sigma x / l = \text{Arth} \sqrt{1 - \exp(-m\varphi / kT)}, \quad (13.11)$$

где

$$l = kT / (m\sqrt{2\pi G p_0}) = \frac{1}{m} \sqrt{kT / (2\pi G n_0)} \quad (13.12)$$

– пространственный масштаб системы, а знаковый множитель  $\sigma$  определен в виде

$$\sigma = \begin{cases} +1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Из (13.11) следуют законы распределения потенциала по длине системы:

$$\varphi = \frac{kT}{m} \ln \left[ ch^2 \left( \frac{\sigma x}{l} \right) \right] \quad (13.13)$$

и проекции напряженности самосогласованного поля гравитации:

$$g_x = -\varphi' = -\frac{2\sigma kT}{ml} th(\sigma x / l). \quad (13.14)$$

Как видно из (13.14), наибольшего значения модуль напряженности достигает при  $\sigma x / l \rightarrow \infty$ :

$$g_H = 2kT / ml. \quad (13.15)$$

Система в пространстве не ограничена, поскольку концентрация и давление частиц имеют солитонное распределение

$$\frac{n}{n_0} = \frac{P}{p_0} = ch^{-2}(\sigma x / l). \quad (13.16)$$

Распределение давления поля по длине системы следует из (13.14):

$$D = (\varphi')^2 / 8\pi G = g_H^2 th^2(\sigma x / l) / 8\pi G. \quad (13.17)$$

Из соотношений (13.16) и (13.17) видно, что сумма давлений частиц и поля системы в любой плоскости пространства взаимодействия остается постоянной и равной полному давлению системы  $P=p_0$ . Результат дифференцирования (13.17) показывает, что градиент давления поля в любой плоскости системы противоположен градиенту давления частиц, следующему из (13.16), и равен ему по модулю:

$$dD / dx = -dp / dx = 2\sigma g_n^2 th(\sigma x / l) / [8\pi Glch^2(\sigma x / l)]. \quad (13.18)$$

Направления градиентов позволяют выяснить направления объемных сил, удерживающих рассматриваемую систему в равновесии. Силы, стягивающие систему частиц, направлены к плоскости  $x=0$  и, в соответствии с (5.3), совпадают с направлением вектора  $\mathbf{g}$ . Силы, расширяющие систему, создаются градиентом давления самосогласованного поля (5.8), который компенсирует действие градиента давления частиц.

**Фазовая траектория.** Уравнение фазовой траектории системы получается из (13.13), (13.14) и имеет вид

$$\varphi' / g_n = \sigma \sqrt{1 - \exp(-m\varphi / kT)}. \quad (13.19)$$

Полученные пространственные распределения поля и частиц удовлетворяют гамильтониану коллективного взаимодействия (13.8), совпадающему с (5.7), из которого следует, что давление поля больше там, где меньше газокINETическое давление частиц системы.

**Оценки.** Приведем оценки, характеризующие параметры самосогласованных систем, состоящих из нейтронов. Для системы с температурой  $T=300$  К при концентрации нейтронов  $n_0=10^{20}$  м<sup>-3</sup> получим полное давление  $P=0,41$  Па. Наибольшее значение напряженности  $g_n=2,6 \cdot 10^{-5}$  м·с<sup>-2</sup>. Пространственный масштаб  $l=1,9 \cdot 10^{11}$  м. Характерная «длина» системы  $L=6l=1,1 \cdot 10^{12}$  м ограничена плоскостями с концентрацией нейтронов  $n=10^{-2}n_0$ .

Характерные масштабы величин существенно изменяются для ядерной плотности вещества. Так, для концентрации нейтронов  $n_0=10^{44}$  м<sup>-3</sup> и температуры  $T=10^6$  К полное давление в системе  $P=1,4 \cdot 10^{27}$  Па обеспечивает наибольшее значение напряженности  $g_n=1,5 \cdot 10^9$  м·с<sup>-2</sup>. «Длина» системы  $L=60$  м. Изменение температуры до  $T=1$  К уменьшает ее до 6 см.

Получившиеся размеры исследуемых систем сильно отличаются друг от друга. Это можно объяснить специфическими особенностями рассмотренного взаимодействия. Результаты параграфа опубликованы в [13].

## § 14. Системы одноименных зарядов

Ниже на основе гамильтониана, описывающего коллективное взаимодействие одноименных зарядов с плоским самосогласованным полем, проведена классификация возбуждаемых полей и состояний изотермического равновесия в системах со столкновениями. Получены законы пространственного распределения полей и зарядов, находящихся в состояниях с положительным, нулевым и отрицательным полными давлениями.

**Скалярный интеграл.** Используя подход Френкеля [8], получим уравнение (6.14). Для этого в (6.1) с учетом (6.2) привлечем связь электрического потенциала с напряженностью (индекс 2 опускаем):

$$\rho \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} \rho = 0. \quad (14.1)$$

Учитывая уравнение изотермического состояния зарядов (6.13), приведем (14.1) к виду

$$\operatorname{grad} \left( \frac{q\varphi}{kT} + \ln \rho \right) = 0. \quad (14.2)$$

Из (14.2) следует, что любое изотермическое равновесие одноименных зарядов характеризуется скалярным интегралом  $q\varphi / (kT) + \ln \rho = \text{const}$ . Учтем свойство однородности скалярного интеграла. Для этого зафиксируем его значение на какой-либо линии уровня в плоскости  $(\varphi, \rho)$ .

Тогда для двух соседних точек этой линии уровня имеем

$$\frac{q\varphi}{kT} + \ln \rho = \frac{q\varphi_0}{kT} + \ln \rho_0 = \text{const}. \quad (14.3)$$

**Функция распределения.** Из (14.3) следует функция распределения плотности и концентрации зарядов Больцмана в изотермической системе

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} = \exp \left[ - \frac{q(\varphi - \varphi_0)}{kT} \right]. \quad (14.4)$$

Калибруя потенциал в (14.4) в соответствии с условием  $\rho = \rho_0$  при  $\varphi = 0$ , получим

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} = \exp \left( - \frac{q\varphi}{kT} \right). \quad (14.5)$$

Из функции распределения (14.5) следует, что концентрация зарядов системы больше там, где меньше ее скалярный потенциал. Ее вид отличается от функций распределения в бесстолкновительном случае (8.5) и в случае политропических состояний (10.5).

**Уравнение изотермического равновесия.** Функция (14.5) позволяет согласовать уравнение для потенциала (6.11). Подставляя (14.5) в правую часть (6.11), получим уравнение (6.14) (сравним с (2.3))

$$\Delta \varphi = -4\pi \rho_0 \exp(-q\varphi / kT), \quad (14.6)$$

которое позволяет рассчитать трехмерное распределение потенциала в изотермической конфигурации одноименных зарядов, удерживаемых в равновесии самосогласованным полем.

**Гамильтонова функция системы.** Уравнение (14.6), записанное в плоской симметрии, имеет первый интеграл, являющийся гамильтонианом коллективного взаимодействия в системе и совпадающий с ее полным давлением  $P$  [18]:

$$\frac{(\varphi')^2}{8\pi} - p_0 \exp(-q\varphi / kT) = P = H(\varphi' / 4\pi, \varphi) = const, \quad (14.7)$$

где  $p_0 = n_0 kT$ . Калибровка потенциала выбрана в виде  $\varphi(0) = 0$ . В (14.7) уменьшаемое представляет собой давление самосогласованного поля системы, а вычитаемое – газокинетическое давление зарядов системы. Полученный гамильтониан является частным случаем закона сохранения (6.7).

Канонически сопряженные величины в функции Гамильтона (14.7) остаются теми же. Роль обобщенного времени также играет координата  $x$ . Эффективная потенциальная энергия системы в (14.7) совпадает с газокинетическим давлением, взятым с противоположным знаком  $U(\varphi) = -p$ .

Требование (14.7), как и ранее, выполняется при отсутствии любых внешних статических электрических полей, рассматриваемых по отношению к самосогласованному полю системы. При этом класс функций установившегося распределения потенциала и его производной всегда такой, что в любой плоскости остается неизменной разность давлений самосогласованного поля и зарядов системы.

**Случай положительного полного давления.** Полное давление (14.7) зададим в плоскости  $x=0$ :

$$\frac{(\varphi'_0)^2}{8\pi} - p_0 = H(\varphi'_0 / 4\pi, 0) = P, \quad (14.8)$$

где  $\varphi'_0$  – градиент потенциала. Везде индекс «0» соответствует плоскости  $x=0$ . Направление вектора  $\mathbf{E}_0 = -\varphi'_0$  противоположно направлению оси  $x$ , поскольку все заряды системы в области  $x \geq 0$  предполагаются положительными. Обе части (14.8) разделим на давление поля  $W_0 = E_0^2 / 8\pi$ :

$$\frac{P}{W_0} = 1 - \beta = P_1, \quad (14.9)$$

где  $\beta = \frac{P_0}{W_0} = \frac{T}{T^*}$  – параметр состояния самосогласованной системы,

$T^* = E_0^2 / (8\pi k n_0)$  – характеристическая температура системы.

Система находится в состоянии с положительным полным давлением, когда температура системы меньше характеристической, что возможно при выполнении неравенства  $0 < P_1 < 1$  или  $0 < \beta < 1$ . В этом состоянии  $\varphi' > 0$  в любой плоскости системы. Интегрируя (14.7) для этого случая, получим

$$\frac{x}{l} \sqrt{1 - \beta} = \text{Arsh} \left( \sqrt{\frac{1}{\beta} - 1} \cdot \exp(q\varphi / 2kT) \right) - \text{Arsh} \sqrt{\frac{1}{\beta} - 1}, \quad (14.10)$$

где

$$l = 2kT / qE_0 \quad (14.11)$$

– пространственный масштаб системы.

**Распределения физических величин.** Распределение потенциала самосогласованного поля по длине системы следует из (14.10) и имеет вид

$$\frac{\varphi}{\varphi_e} = \ln \left[ \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}} sh \left( Arsh \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}} - 1 + \frac{x}{l} \sqrt{1-\beta} \right) \right], \quad (14.12)$$

где  $\varphi_e = 2kT / q$  – масштаб потенциала системы.

Зависимость проекции напряженности самосогласованного поля системы от координаты  $x$  находится дифференцированием (14.12):

$$\frac{E_x}{E_0} = -\sqrt{1-\beta} \operatorname{cth} \left( Arsh \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}} + \frac{x}{l} \sqrt{1-\beta} \right). \quad (14.13)$$

Изменение концентрации зарядов по длине системы получится из (14.5) с учетом (14.12):

$$\frac{n}{n_0} = \left( \frac{1-\beta}{\beta} \right) sh^{-2} \left( Arsh \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}} + \frac{x}{l} \sqrt{1-\beta} \right). \quad (14.14)$$

Распределение давления зарядов системы имеет вид

$$\frac{p}{p_0} = \left[ \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}} sh \left( Arsh \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}} - 1 + \frac{x}{l} \sqrt{1-\beta} \right) \right]^{-2}. \quad (14.15)$$

Давление поля изменяется по длине системы по закону

$$D = \frac{E_x^2}{8\pi} = \frac{E_0^2}{8\pi} (1-\beta) \operatorname{cth}^2 \left( Arsh \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}} + \frac{x}{l} \sqrt{1-\beta} \right). \quad (14.16)$$

Градиент давления зарядов системы направлен против оси  $x$  и совпадает в любой плоскости с градиентом давления поля:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dD}{dx} = -\frac{2p_0(1-\beta)^{3/2} \operatorname{cth}(t)}{\beta l sh^2 t}, \quad (14.17)$$

где  $t = Arsh \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}} + \frac{x}{l} \sqrt{1-\beta}$ .

Из соотношений (14.16) и (14.17) следует, что разность давлений поля и зарядов системы в любой плоскости пространства взаимодействия остается постоянной и равной полному давлению системы  $P$ . Из соотношения (14.17) видно, что градиент полного давления изотермической системы зарядов в любой плоскости обращается в нуль.

Направления градиентов позволяют выяснить направления объемных сил, удерживающих систему в равновесии. Силы, прижимающие за

ряды к плоскости  $x=0$ , сонаправлены с вектором  $E$  [совпадает с (6.3)]. Силы отталкивания создаются градиентом давления самосогласованного поля, взятым с противоположным знаком. Эти силы компенсируют действие градиента давления зарядов и удерживают систему в равновесии [см. (6.8)].

Когда давление самосогласованного поля значительно превышает давление зарядов системы, то выполняется приближение  $\beta \ll 1$ . В этом случае потенциал, создаваемый зарядами, линеен:

$$\varphi = \varphi_e x / l,$$

а электрическое поле системы однородно во всем пространстве взаимодействия:

$$E_x = -E_0.$$

Плотность и концентрация зарядов и в этом случае неоднородны и изменяются по длине системы в соответствии с экспоненциальным законом

$$\rho / \rho_0 = n / n_0 = \exp(-qE_0 x / kT).$$

**Фазовые траектории.** Уравнение фазовых траекторий системы с положительным давлением имеет вид

$$\frac{\varphi'}{E_0} = \sqrt{1 + \beta(\exp(-q\varphi / kT) - 1)}. \quad (14.18)$$

Графики фазовых траекторий системы в координатах  $(q\varphi / kT, \varphi' / E_0)$  начинаются в точке  $(0,1)$ , не ограничены по оси  $\varphi$  и заключены в полосе  $\sqrt{1 - \beta} < \frac{\varphi'}{E_0} \leq 1$ .

**Обсуждение результатов.** На рис. 14.1 представлены распределения электродинамических и газокинетических параметров по длине системы, рассчитанные по соотношениям (14.12) – (14.14). Кривая 1 дает распределение проекции напряженности электрического поля системы  $(-E_x / E_0)$ , кривая 2 характеризует распределение концентрации зарядов  $n / n_0$ , а кривая 3 – распределение потенциала  $\varphi / \varphi_e$  по длине системы  $x / l$ . Зависимости 1, 2, 3 вычислялись для параметра состояния  $\beta = 0,9$ , а зависимости 1', 2', 3' являются предельными для малых значений параметра состояния  $\beta$  ( $\beta \ll 1$ ).

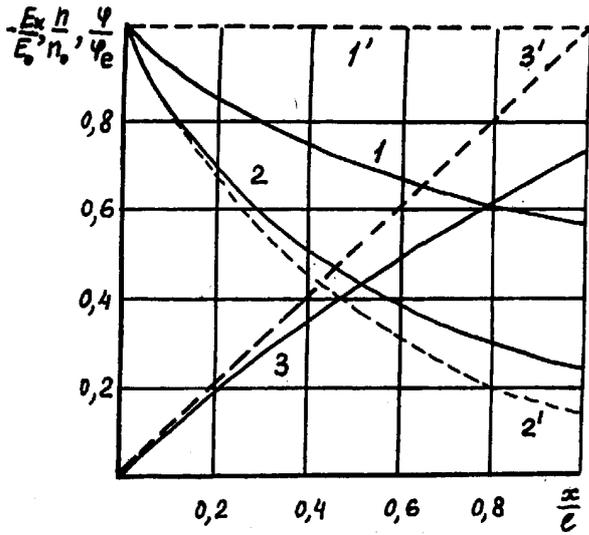


Рис. 14.1

Как видно из рис. 14.1 и соотношений (14.12)–(14.14), пространство взаимодействия системы не ограничено по оси  $x$ . В соответствии с гамильтонианом взаимодействия (14.7) давление одноименных зарядов больше там, где больше давление самоогласованного поля, поэтому основная часть зарядов системы удерживается давлением поля в ограниченной области пространства. Потенциал самоогласованного поля представляет собой

барьер для положительных зарядов в полупространстве  $x \geq 0$ , а проекция вектора напряженности, изменяющаяся от  $-E_0$  до  $-\sqrt{1-\beta}E_0$ , направлена против оси  $x$ .

**Поведение в асимптотике.** Исследуем поведение самоогласованной системы в асимптотике при  $t \rightarrow \infty$ , когда выполнено неравенство

$$\frac{x}{l} \sqrt{1-\beta} \gg \text{Arsh} \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}} + \ln \sqrt{\frac{\beta}{4(1-\beta)}}. \quad (14.19)$$

В этом приближении распределение потенциала линейно:

$$\frac{\varphi}{\varphi_l} \approx \frac{x}{l} \sqrt{1-\beta}. \quad (14.20)$$

Проекция напряженности поля достигает наибольшего значения  $E_n$  в этой области:

$$E_n / E_0 \approx -\sqrt{1-\beta}, \quad (14.21)$$

а концентрация зарядов системы изменяется по закону

$$n / n_0 \approx \exp(-2x\sqrt{1-\beta} / l). \quad (14.22)$$

Полученные результаты уместно сравнить с результатами, приведенными в § 2 для случая  $A > 0$ .

**Случай нулевого полного давления.** Исследуем состояния с нулевым полным давлением  $P=0$  ( $\beta=1$ ), так как рассмотренные выше соотношения его не описывают. В данном случае давление самосогласованного поля равно газокинетическому давлению частиц в любой плоскости системы (температура системы равна характеристической). Получаемые ниже соотношения частично совпадают с представленными в [8,27].

Интегрируя (14.7) с учетом  $\varphi' > 0$ , получим

$$\frac{x}{l} = \exp(q\varphi / 2kT) - 1. \quad (14.23)$$

Распределение потенциала по длине системы следует из (14.23):

$$\frac{\varphi}{\varphi_e} = \ln\left(1 + \frac{x}{l}\right). \quad (14.24)$$

Зависимость проекции напряженности самосогласованного поля от координаты  $x$  имеет вид

$$\frac{E_x}{E_0} = -\left(1 + \frac{x}{l}\right)^{-1}. \quad (14.25)$$

Плотность, концентрация и давление зарядов распределены по длине системы в соответствии с законом

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} = \frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{x}{l}\right)^{-2}. \quad (14.26)$$

Давление поля изменяется по длине системы по такому же закону.

Градиент давления зарядов системы направлен против оси  $x$  и совпадает в любой плоскости с градиентом давления поля

$$dp / dx = dD / dx = -2p_0(1 + x / l)^{-3} / l.$$

Направления объемных сил, удерживающих систему в равновесии, остаются такими же, как и в случае положительного давления. Пространство взаимодействия системы не ограничено по оси  $x$ . Аналогично состояниям с положительным давлением основная часть зарядов системы удерживается давлением поля в ограниченной области пространства.

Потенциал самосогласованного поля системы положительных зарядов тоже представляет собой барьер, хотя и другой формы. Отличительной особенностью рассматриваемого состояния является исчезновение напряженности электрического поля на больших расстояниях от плоскости нулевого потенциала. Фазовая траектория системы следует из (14.18) при  $\beta = 1$ . Часть полученных формул совпадает с соотношениями, приведенными в § 2 при  $A=0$ , а также с соотношениями, полученными в работе [9].

**Случай отрицательного полного давления.** Состояния самосогласованного поля с отрицательным полным давлением будут такие, при которых в любой плоскости газокINETическое давление частиц системы больше давления самосогласованного поля. Это условие эквивалентно тому, что температура системы больше характеристической.

Как видно из (14.7), в таких состояниях  $P < 0$  или  $\beta > 1$ , а у самосогласованной системы всегда существует такое значение координаты  $x=L$ , при котором обращается в нуль давление самосогласованного поля. Напряженность поля за данной плоскостью изменяет свой знак на противоположный, а потенциал системы при  $\varphi' = 0$  принимает максимальное значение, получаемое из (14.7):

$$\varphi_m = \frac{kT}{q} \ln\left(-\frac{P_0}{P}\right). \quad (14.27)$$

Учитывая это, введем в (14.9) обозначение

$$\frac{P}{W_0} = 1 - \beta = -P_2. \quad (14.28)$$

Поскольку в этом случае на одно значение потенциала в области  $0 \leq \varphi \leq \varphi_m$  всегда приходится два значения координаты  $x$ , запишем интеграл уравнения (14.7) в виде

$$x = L - \sigma \int_{\varphi}^{\varphi_m} d\varphi / (8\pi p_0 \exp(-q\varphi / kT) + 8\pi P)^{1/2}, \quad (14.29)$$

где

$$L = \int_0^{\varphi_m} d\varphi / (8\pi p_0 \exp(-q\varphi / kT) + 8\pi P)^{1/2}; \quad (14.30)$$

$$\sigma = \text{sign}(\varphi') = \begin{cases} +1 & \text{при } 0 \leq x < L, \\ 0 & \text{при } x = L, \\ -1 & \text{при } x > L. \end{cases} \quad (14.31)$$

Интегрируя (14.29), получим

$$\frac{x}{l} = \frac{L}{l} - \frac{\sigma}{\sqrt{\beta - 1}} \arccos \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \exp(q\varphi / kT)}, \quad (14.32)$$

где  $l$  определено в (14.11), а

$$\frac{L}{l} = \frac{1}{\sqrt{\beta - 1}} \arccos \sqrt{(\beta - 1) / \beta} \quad (14.33)$$

– расстояние до плоскости нулевого давления поля в единицах  $l$ .

Зависимость расстояния до плоскости нулевого давления поля от параметра состояния системы приведена на рис. 14.2 (кривая 1).

Распределение потенциала по длине системы следует из (14.32):

$$\frac{\varphi}{\varphi_e} = \ln \left[ \frac{\beta}{\sqrt{\beta - 1}} \cos(z) \right], \quad (14.34)$$

где

$$z = \sigma \sqrt{\beta - 1} \left( \frac{L}{l} - \frac{x}{l} \right).$$

Зависимость проекции напряженности самосогласованного поля от координаты  $x$  находится из (14.34):

$$\frac{E_x}{E_0} = -\sqrt{\beta - 1} \operatorname{tg} z. \quad (14.35)$$

Изменение плотности и концентрации зарядов по длине системы получается из (14.5) с учетом (14.34):

$$\frac{n}{n_0} = \frac{\beta - 1}{\beta \cos^2 z}. \quad (14.36)$$

Распределение давления зарядов имеет вид

$$\frac{p}{p_0} = \left[ \frac{\beta}{\sqrt{\beta - 1}} \cos(z) \right]^{-2}. \quad (14.37)$$

Давление поля изменяется по длине системы в соответствии с законом

$$D = \frac{E_0^2}{8\pi} (\beta - 1) \operatorname{tg}^2 z. \quad (14.38)$$

Градиент давления частиц системы меняет свое направление в пространстве на противоположное при переходе через плоскость  $x=L$  и совпадает в любой плоскости с градиентом давления поля:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dD}{dx} = -\frac{2p_0}{l} \frac{(\beta - 1)^{3/2}}{\beta} \frac{\operatorname{tg} z}{\cos^2 z}. \quad (14.39)$$

Из соотношений (14.34) – (14.39) видно, что плоскость нулевого давления поля делит все пространство взаимодействия на две области. В первой области направление вектора напряженности противоположно направлению внешней нормали, совпадающей с осью  $x$ . В ней с ростом  $x$  потенциал растет, а плотность и давление зарядов системы убывают. Атмосферу зарядов с такой ориентацией вектора  $\mathbf{E}$  назовем внутренней. Во второй области вектор напряженности направлен по внешней нормали. В ней с ростом  $x$  потенциал убывает, а давление и плотность зарядов возрастают, стремясь к бесконечности на границе системы. Атмосферу зарядов с такой ориентацией вектора  $\mathbf{E}$  назовем внешней. Потенциал вблизи границы представляет собой яму бесконечной глубины, вследствие чего основная часть зарядов удерживается полем возле ее правой границы. Это

указывает на то, что в системе кулоновское взаимодействие преобладает над полевым.

Направления градиентов позволяют выяснить физический механизм удержания зарядов полем и в этом случае. Во внутрен-

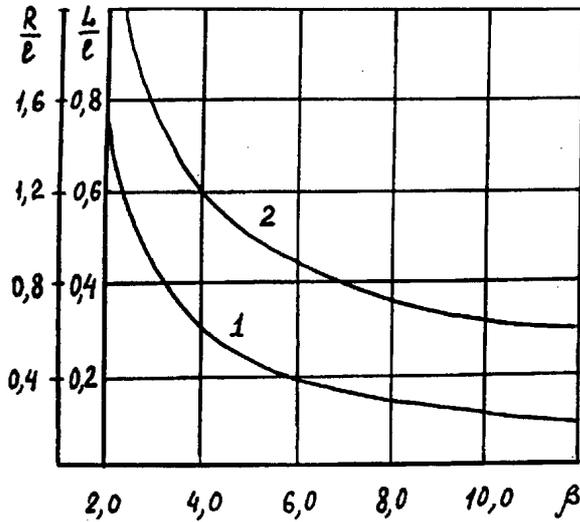


Рис. 14.2

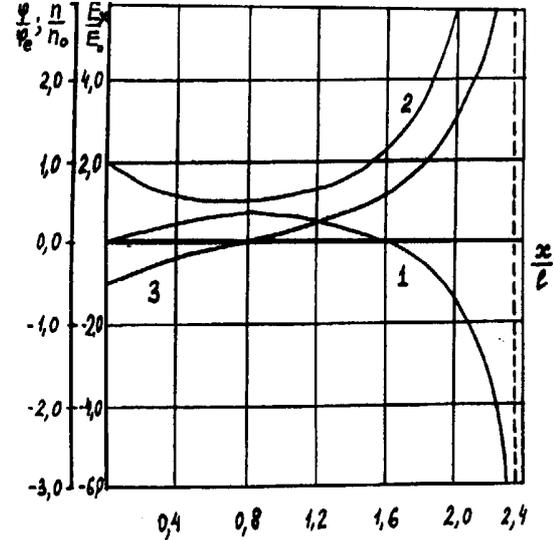


Рис. 14.3

ней и внешней атмосферах силы, расширяющие слой, сонаправлены с вектором  $E$ , а силы, создаваемые градиентом давления поля, взятым с противоположным знаком, направлены против  $E$  и компенсируют расширяющие силы.

**Фазовые траектории.** Уравнение фазовых траекторий системы с отрицательным полным давлением находится из (14.34), (14.35) с учетом (14.27) и имеет вид

$$\varphi' / E_0 = \sigma \sqrt{1 + \beta \left[ \left( 1 - 1 / \beta \right)^{\varphi / \varphi_m} - 1 \right]}. \quad (14.40)$$

Графики фазовых траекторий системы в координатах  $(\varphi / \varphi_m, \varphi' / E_0)$  имеют три точки пересечения осей координат  $(0,1)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,-1)$  для произвольного значения параметра состояния  $\beta$ .

**Обсуждение результатов.** На рис. 14.3 представлены пространственные распределения электродинамических и газокинетических параметров системы, рассчитанных по соотношениям (14.34) – (14.36). Кривая 1 характеризует распределение потенциала  $\varphi / \varphi_e$ , кривая 2 – распределение концентрации  $n / n_0$ , кривая 3 – распределение проекции напряженности  $E_x / E_0$  по длине системы  $x / l$ . Зависимости вычислялись для параметра состояния  $\beta=2$ . Как видно из рис. 14.3 и соотношений (14.30) – (14.32),

граница пространства взаимодействия системы резкая и лежит в пределах  $0 \leq x \leq R$ , где

$$R = L + \frac{\pi l}{2\sqrt{\beta - 1}}. \quad (14.41)$$

Зависимость отношения длины пространства взаимодействия  $R$  к  $l$  от параметра состояния системы  $\beta$  приведена на рис. 14.2 (кривая 2). Граница системы резкая, поскольку  $x = R$  является вертикальной асимптотой для функции (14.36).

**Поведение системы вблизи границы.** Исследуем поведение самосогласованной системы вблизи правой границы, введя направленную против оси  $x$  координату  $t$  с началом на правой границе:

$$\frac{t}{l} = \frac{R}{l} - \frac{x}{l}. \quad (14.42)$$

Предполагая выполнение неравенства

$$\frac{t}{l} \sqrt{\beta - 1} \ll 1 \quad (14.43)$$

при  $t/l \rightarrow 0$ , получим в данном приближении распределение потенциала, обладающее логарифмической особенностью (см. § 2):

$$\frac{\varphi}{\varphi_e} \approx \ln \left( \sqrt{\beta} \frac{t}{l} \right), \quad (14.44)$$

проекции напряженности по длине системы:

$$\frac{E_x}{E_0} \approx - \left( \frac{t}{l} \right)^{-1} \quad (14.45)$$

и концентрации зарядов по длине системы

$$\frac{n}{n_0} \approx \frac{1}{\beta} \left( \frac{t}{l} \right)^{-2}, \quad (14.46)$$

обладающие степенными особенностями.

Если газокINETическое давление частиц системы значительно превышает давление поля, то  $\beta \gg 1$ , что эквивалентно высокотемпературному состоянию системы. Исследуем ее характеристики при выполнении этого условия. В этом приближении  $\varphi_m / \varphi_e \rightarrow 0$ ,  $L / l \rightarrow 0$ , а длина пространства взаимодействия заключена в пределах  $0 \leq x \leq R_0$ , где

$$R_0 = \pi l / (2\sqrt{\beta}). \quad (14.47)$$

Выражая (14.47) через температуру системы, получим

$$R_0 = \sqrt{\frac{\pi k T}{8 q^2 n_0}}. \quad (14.48)$$

Потенциал системы во всем пространстве взаимодействия неполюжен:

$$\frac{\varphi}{\varphi_e} \approx \ln \cos(x / l_0), \quad (14.49)$$

где  $l_0 = 2R_0 / \pi$  – новый пространственный масштаб системы, совпадающий с дебаевским радиусом экранирования в плазме. Проекция напряженности поля в высокотемпературных состояниях не изменяет своего направления в пространстве:

$$E_x \approx \sqrt{8\pi p_0} \operatorname{tg}(x / l_0), \quad (14.50)$$

а концентрация в системе монотонно возрастает с увеличением расстояния по закону

$$n \approx n_0 \cos^{-2}(x / l_0). \quad (14.51)$$

Полученные распределения не имеют аналогий с состояниями, исследованными ранее. Похожие результаты обсуждались для термоэлектронов в [11].

**Оценки.** Приведем оценки, характеризующие возможные параметры равновесных самосогласованных систем, состоящих из электронов.

Случай положительного полного давления. Для концентрации электронов  $n_0 = 10^{22} \text{ м}^{-3}$  при температуре газа  $T = 10^3 \text{ К}$  и параметре состояния  $\beta = 0,9$  напряженность поля в плоскости  $x=0$   $E_0 = -60 \text{ кВ/см}$ . Пространственный масштаб системы  $l = 30 \text{ нм}$ . Единица потенциала  $\varphi_e = 0,17 \text{ В}$ . Наибольшее значение напряженности  $E_n = -19 \text{ кВ/см}$ . Давление поля и давление электронов у поверхности соответственно равны 153 и 138 Па. Полное давление  $P = 15 \text{ Па}$ . На расстоянии  $x = 150 \text{ нм}$  концентрация электронов убывает в 100 раз. Потенциал и напряженность в этой плоскости  $\varphi = 0,4 \text{ В}$ ,  $E_x = -19,84 \text{ кВ/см}$ . При  $\beta \ll 1$  концентрация спадает в 100 раз уже на расстояниях  $x = 68 \text{ нм}$ .

Заметим, что получившиеся оценки для характерных размеров изотермических систем оказываются на 2-3 порядка меньше по сравнению с политропическими.

Случай нулевого полного давления для той же концентрации и температуры дает  $E_0 = -56 \text{ кВ/см}$ ,  $l = 29,3 \text{ нм}$ ,  $\varphi_e = 0,17 \text{ В}$ . Концентрация электронов уменьшается в 100 раз на расстоянии 264 нм. Напряженность системы на этом расстоянии составляет 5,6 кВ/см.

Случай с отрицательным полным давлением для  $\beta = 10$  или  $P = -124 \text{ Па}$  при тех же значениях концентрации и температуры дает:  $E_0 = -17,6 \text{ кВ/см}$ , давление поля  $W_0 = 13,8 \text{ Па}$ , давление зарядов  $p_0 = 138 \text{ Па}$ .

Пространственный масштаб  $l=97,6$  нм, единица потенциала  $0,17$  В. Расстояние до плоскости нулевого давления  $L=10$  нм. Максимальное значение потенциала в этой плоскости  $\varphi_m=8,9$  мВ, а минимальное значение концентрации  $n_m=0,9 \cdot 10^{22}$  м<sup>-3</sup>. Длина пространства взаимодействия  $R=61$  нм.

Характерные масштабы величин существенно изменяются для концентраций, близких к ядерным. Так, для концентраций электронов  $n_0=10^{36}$  м<sup>-3</sup> с теми же параметрами системы при положительном давлении получаем:  $E_0=-6 \cdot 10^{11}$  В/см,  $l=2,9 \cdot 10^{-13}$  см,  $\varphi_e=0,17$  В,  $E_n=-1,9 \cdot 10^{11}$  В/см. Давление поля  $W_0=1,5 \cdot 10^{16}$  Па. Давление электронов  $p_0=1,4 \cdot 10^{16}$  Па. На расстоянии  $15 \cdot 10^{-13}$  см концентрация зарядов убывает в 100 раз. При отрицательном давлении для  $\beta = 10$ :  $E_0=-1,8 \cdot 10^{11}$  В/см,  $W_0=1,4 \cdot 10^{15}$  Па,  $l=9,8 \cdot 10^{-13}$  см,  $\varphi_e=0,17$  В,  $\varphi_m=8,9$  мВ,  $n_m=0,9 \cdot 10^{36}$  м<sup>-3</sup>,  $L=0,98 \cdot 10^{-13}$  см,  $R=6 \cdot 10^{-13}$  см. Изложенные результаты опубликованы в [18].

## **ГЛАВА 4. СИСТЕМЫ С ТЕРМОДИФФУЗИЕЙ**

### **§ 15. Системы гравитирующих частиц**

Анализ политропических равновесий самосогласованных систем гравитирующих частиц, проведенный в § 11, показал, что в упомянутых системах всегда существует градиент температуры, обусловленный распределенными тепловыми источниками, объемная плотность мощности которых зависит от политропного индекса и абсолютной температуры (11.43).

Наличие градиента температуры должно приводить к появлению в системе напряженности гравитационного поля, обусловленной термодиффузией:

$$\mathbf{g}_T = \frac{k}{m} \text{grad} T. \quad (15.1)$$

**Уравнения равновесия.** Учет влияния термодиффузионной напря-

женности изменяет систему уравнений (5.1),(5.4),(5.13), которую в этом случае удастся представить в более общем виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = -4\pi Gmn; \quad (15.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{g}_T = -4\pi\delta Gmn; \quad (15.3)$$

$$\operatorname{grad} p = mn \mathbf{g}; \quad (15.4)$$

$$p = nkT, \quad (15.5)$$

где  $m$  – масса гравитирующей частицы, а  $n$  – концентрация системы в произвольной точке.

В уравнении (15.3) предполагается, что дивергенция термодиффузионной напряженности гравитационного поля пропорциональна объемной плотности гравитирующих частиц, но с коэффициентом эффективности объемных истоков  $\delta$ , отличающимся от единицы ( $\delta < 1$ ). Это предположение эквивалентно тому, что передачу тепловой энергии из области, занятой нагретым веществом, можно отождествить с существованием объемных тепловых истоков, мощность которых пропорциональна концентрации гравитирующих частиц (см. выводы на с.127).

Предлагаемый подход позволяет рассчитать пространственные статические равновесия вещества, удерживаемого самосогласованным полем, в системах с конечной теплопроводностью. Универсальность подхода позволяет применить его в таких же системах для расчета статических равновесий одноименных зарядов, удерживаемых самосогласованным полем.

**Интегралы системы.** Выпишем интегралы, определяющие важнейшие свойства исследуемой системы. Первый скалярный интеграл получим, умножив (15.2) на (15.4). Он представляет собой полное давление системы [см. (5.6)]:

$$\frac{\mathbf{g}^2}{8\pi G} + p = \text{const}. \quad (15.6)$$

Второй векторный интеграл следует из (15.2) и (15.3):

$$\mathbf{g}_p = \mathbf{g}_T / \delta - \mathbf{g} = \text{const}. \quad (15.7)$$

Он представляет собой вектор полной напряженности гравитационного поля системы, состоящей из разности эффективной напряженности гравитационного поля  $\mathbf{g}_T / \delta$ , возникающего из-за термодиффузии, и напряженности самосогласованного поля системы. Его происхождение связано с тем, что при наличии градиента температуры в газе гравитирующих частиц всегда устанавливаются такие распределения эффективной напряженности гравитационного поля термодиффузии и напряженности самосогласованного поля системы, при которых их дивергенции одинако

вы в любой точке пространства взаимодействия, а следовательно,  $\text{div } \mathbf{g}_p = 0$ .

**Система с плоской симметрией.** Исследуем свойства плоской самосогласованной системы. Для этого учтем однородность вектора  $\mathbf{g}_p$  и предположим, что все векторы, входящие в соотношение (15.7), лежат на одной прямой, ориентированной параллельно оси  $x$ . В этом случае система (15.2) – (15.5) упрощается и имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi Gmn; \quad (15.8)$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\chi n; \quad (15.9)$$

$$\frac{dp}{dx} = -mn \frac{d\varphi}{dx}; \quad (15.10)$$

$$p = nkT, \quad (15.11)$$

где

$$\chi = 4\pi Gm^2\delta / k \quad (15.12)$$

– отношение мощности тепловых истоков к коэффициенту теплопроводности. Оно определяет соотношение между излученной и поглощенной тепловыми энергиями в каждом слое гравитирующих частиц.

**Гамильтонова функция системы.** Интеграл (15.6) для плоской симметрии становится гамильтоновой функцией системы:

$$\frac{(\varphi')^2}{8\pi G} + p(\varphi) = H(\varphi' / 4\pi G, \varphi) = \text{const}, \quad (15.13)$$

а интеграл (15.7) соответствует сохраняющейся проекции полной напряженности поля гравитации:

$$g_p = g_T / \delta - g_x = \text{const}. \quad (15.14)$$

**Барометрическое соотношение.** Из (15.10) с учетом (15.11) следует уравнение

$$\frac{dp}{p} = -\frac{md\varphi}{kT}, \quad (15.15)$$

которое позволяет получить барометрическое соотношение для распределения давления вещества в гамильтоновых системах с термодиффузией:

$$p(\varphi) = p_0 \exp\left(-\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{md\varphi}{kT(\varphi)}\right), \quad (15.16)$$

где  $p(\varphi)=p_0$  при  $\varphi=\varphi_0$ . Из (15.16) видно, что разнообразие барометрических соотношений системы определяется видом температурно-потенциальной зависимости  $T=T(\varphi)$ .

Линейная зависимость  $T=T(\varphi)$  следует из (15.14) только при условии, что  $g_p=0$  или  $g_T/\delta=g_x$ . Это условие позволяет определить установившееся распределение вещества в системах, в которых проекции эффективной напряженности термодиффузионного поля и напряженности самосогласованного поля равны друг другу в любой плоскости пространства взаимодействия.

Покажем, что этот случай совпадает со случаем политропических состояний, исследованных ранее в § 11. Интегрируя (15.14) при условии, что  $T(0)=0$ , получим линейную связь температуры системы с потенциалом:

$$T = -\frac{\delta m \varphi}{k}. \quad (15.17)$$

Из (15.17) следует, что во всей области, занятой системой, потенциал самосогласованного поля неположителен. Представим (15.17) в виде

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\varphi}{\varphi_0}, \quad (15.18)$$

где

$$\varphi_0 = -kT_0 / (\delta m) = -\Phi_0 \quad (15.19)$$

– минимальное значение потенциала в системе, а  $T_0$  – температура системы в этой же плоскости.

Подставляя  $T(\varphi)$  из (15.18) в (15.16) и интегрируя, получим явный вид барометрического соотношения:

$$p(\varphi) = p_0 \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^{1/\delta} = p_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1/\delta}. \quad (15.20)$$

Из (15.20) следуют функции распределения плотности и концентрации вещества в системе:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1/\delta-1} = \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^{1/\delta-1}. \quad (15.21)$$

Сравнение (15.21) с политропами (11.39) дает связь коэффициента эффективности  $\delta$  с политропным индексом  $\delta = 1 / (n + 1)$ , что позволяет определить  $\chi$ :

$$\chi = \frac{4\pi Gm^2}{k(n+1)}. \quad (15.22)$$

Подставляя (15.20) в (15.13), получаем явный вид гамильтоновой функции системы:

$$\frac{(\varphi')^2}{8\pi G} + p_0 \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^{n+1} = H(\varphi' / 4\pi G, \varphi) = P = const. \quad (15.23)$$

Определяя положительное полное давление в плоскости  $x = 0$  при условиях  $\varphi' = 0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ , получим, что  $P = p_0$ . Наибольшие значения потенциала системы  $\varphi = 0$  и градиента потенциала  $\varphi'_n = g_n = \sqrt{8\pi G p_0}$  достигаются на границах системы.

**Распределения физических величин для случая  $n=1$ .** Интеграл уравнения в (15.23) приведем к виду

$$\int_t^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^{n+1}}} = \sigma \frac{x}{l}, \quad (15.24)$$

где

$$\sigma = \text{sign}(\varphi') = \begin{cases} +1 & \text{для } x > 0, \\ 0 & \text{для } x = 0, \\ -1 & \text{для } x < 0, \end{cases} \quad (15.25)$$

а

$$l = \frac{\Phi_0}{g_n} = \frac{kT_0}{\delta m g_n} = \frac{RT_0}{\delta \mu g_n} = l_0 / \delta \quad (15.26)$$

– пространственный масштаб системы. Для политропы индекса  $n=1$  результат интегрирования в (15.24) дает распределение потенциала по длине системы

$$\varphi = \varphi_0 \cos(x / l). \quad (15.27)$$

Длина системы определяется нулями косинуса:

$$L = \pi l = \frac{\pi k T_0}{\delta m g_n} = \frac{\pi \Phi_0}{g_n}. \quad (15.28)$$

Распределение проекции напряженности самосогласованного поля имеет вид

$$g_x = -g_n \sin(x / l), \quad (15.29)$$

где  $g_n = \Phi_0 / l$ .

Температура, плотность и концентрация частиц изменяются по длине системы по одинаковому закону:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} = \cos(x / l). \quad (15.30)$$

Распределение давления частиц системы имеет вид

$$p = p_0 \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^2 = p_0 \cos^2(x / l). \quad (15.31)$$

Градиент давления частиц системы направлен к плоскости  $x=0$  и распределен по длине системы в соответствии с законом:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{p_0}{l} \sin(2x / l). \quad (15.32)$$

Распределение давления самосогласованного поля по длине системы имеет вид

$$D = \frac{g_x^2}{8\pi G} = \frac{g_n^2}{8\pi G} \sin^2(x / l). \quad (15.33)$$

Проекция напряженности термодиффузионного поля гравитации распределена по длине системы в соответствии с законом

$$g_T = \frac{k}{m} \frac{dT}{dx} = -\frac{k}{m} \frac{T_0}{l} \sin(x / l) = -\delta g_n \sin(x / l). \quad (15.34)$$

Легко увидеть, что полученные распределения удовлетворяют требованиям неизменности интегралов (15.13) и (15.14).

Дифференцирование (15.33) показывает, что градиент давления поля в любой плоскости системы направлен противоположно градиенту давления частиц системы (15.32) и равен ему по модулю. Как следствие этого, градиент полного давления политропической системы ( $n=1$ ) в любой плоскости обращается в нуль.

Направления градиентов позволяют выяснить физический механизм удержания рассматриваемой системы в равновесии в ограниченной области пространства. Силы, стягивающие слой вещества, направлены к плоскости  $x=0$  и сонаправлены вектору  $\mathbf{g}$  [совпадает с (5.3)]. Силы, расширяющие слой, создаются градиентом давления самосогласованного поля, который противоположен по направлению градиенту давления частиц и тем самым, компенсируя его действие, удерживает систему в равновесии [совпадает с (5.8)].

Сравнение приведенных результатов с соотношениями, полученными для политропических состояний в § 11, указывает на их идентичность при замене  $\varphi / \varphi_0$  на  $1 - \varphi / \varphi_n$  с выбором нового пространственного масштаба (11.15). Оценки, сделанные по соотношениям (15.27) – (15.33) для параметров газа, указанных на с.128 – 129, дают те же результаты. Достоинство предлагаемого подхода заключается в том, что он позволяет ввести эффективность тепловых истоков и связать молярные теплоемкости рассматриваемых систем с коэффициентом теплопроводности.

**Политропические состояния с термодиффузией.** Термодиффузия в политропических состояниях гамильтоновой системы наиболее явно проявляет себя при условии  $g_p \neq 0$ . Получить в этом случае явный вид барометрического соотношения, а следовательно, проинтегрировать (15.13) в явном виде не удастся. Используя интегралы (15.13) и (15.14), понизим порядок дифференциальных уравнений (15.8) и (15.9). Запишем уравнения системы (15.8) – (15.11) в виде

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma\delta \sqrt{1-yz}; \quad (15.35)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} + \alpha\delta = \alpha\delta - \sigma\delta \sqrt{1-yz}; \quad (15.36)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{z}{y} \left( \frac{1}{\delta} \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) = -\frac{z\delta}{y} \left[ \sigma(1/\delta - 1)\sqrt{1-yz} + \alpha \right], \quad (15.37)$$

где приняты обозначения  $t = x/l_0$ ,  $x = \varphi/\varphi_0$ ,  $y = T/T_0$ ,  $z = n/n_0$ ,  $\alpha = g_p/g_n$ . Знаковый множитель  $\sigma$  удовлетворяет соотношениям (15.25), в которых  $x$  следует заменить на  $t$ . Легко видеть, что для  $\delta=1/2$  и  $\alpha=0$  система имеет решения  $x = y = z = \cos(\sigma t/2)$ , соответствующие политропическому состоянию с индексом  $n=1$ . При  $\alpha \neq 0$  аналитические решения системы с граничными условиями  $t=0$ ,  $x=y=z=1$ , представляющие физический интерес, по-видимому, не существуют.

Заметим, что однородные распределения вещества в гамильтоновой системе не реализуются. Следуя требованию однородности концентрации  $z' = 0$ ,  $z = 1$  получим из (15.37) равенство

$$x' = \delta y', \quad (15.38)$$

которому удовлетворяют только постоянные значения  $y$  и  $x$ . Неизменность же  $x=\varphi/\varphi_0$  приводит к исчезновению напряженности самосопряженного поля в системе (а вместе с ней и сил, удерживающих систему в равновесии).

**Обсуждение результатов.** Результаты решения системы уравнений (15.35) – (15.37) представлены на рис. 15.1 – 15.8. При решении системы использован метод Рунге–Кутты четвертого порядка для граничных условий  $t=0$ ,  $x=y=z=1$  при различных значениях параметров  $n = 1/\delta - 1$  и полной напряженности системы  $\alpha$  с проверкой законов сохранения на каждом шагу интегрирования. Рис. 15.1 – 15.5 построены при следующих значениях параметров: политропный индекс системы  $n=2$ , а значения параметра  $\alpha$  задавались в пределах:  $\alpha_1=0,25$  (кривая 1),  $\alpha_2=0,5$  (кривая 2),  $\alpha_3=0,75$  (кривая 3),  $\alpha_4=1,0$  (кривая 4).

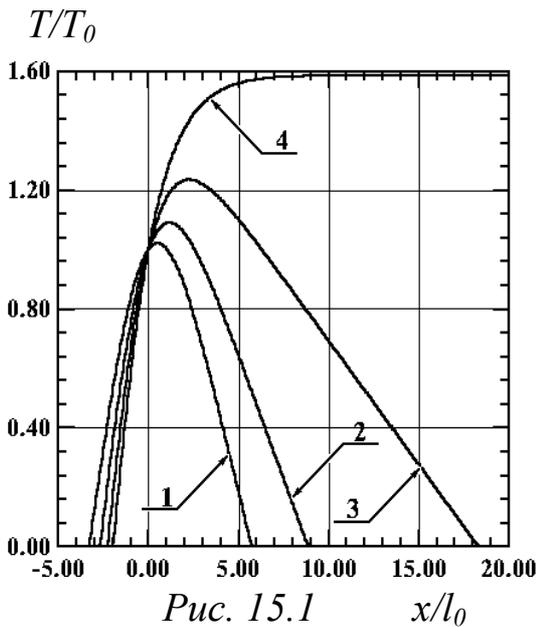


Рис. 15.1  $x/l_0$

имеет максимум, положение которого зависит от  $\alpha$ . На границах системы температура обращается в нуль. В системе существуют два тепловых потока противоположного направления. Случай  $\alpha=1$  оказывается пограничным. В пограничном случае система излучает в одном направлении. Размеры системы определены нулями температуры и увеличиваются с ростом  $\alpha$ .

На рис. 15.2 представлено распределение концентрации частиц. Для значений  $0 < \alpha < 1$  оно носит качественно иной характер, чем при  $\alpha=0$ .

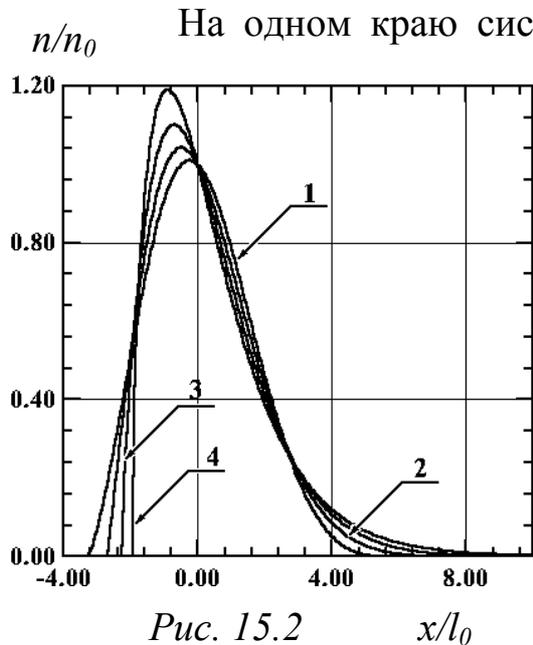


Рис. 15.2  $x/l_0$

Графики зависимостей для отрицательных значений  $\alpha$  получаются зеркальным отображением относительно плоскости  $t = x/l_0 = 0$  графиков, приводимых на рисунках.

На рис. 15.1 приведено распределение температуры  $T$ . Для значений  $0 < \alpha < 1$  оно сохраняет свойства политропической системы при  $\alpha=0$ , хотя и перестает быть симметричным относительно плоскости нулевого давления поля  $t=0$ . Распределение

имеет максимум, положение которого зависит от  $\alpha$ . На границах системы температура обращается в нуль. В системе существуют два тепловых потока противоположного направления. Случай  $\alpha=1$  оказывается пограничным. В пограничном случае система излучает в одном направлении. Размеры системы определены нулями температуры и увеличиваются с ростом  $\alpha$ .

На одном краю системы концентрация изменяется плавно, а другой ее край имеет резкую границу. Концентрация на резкой границе всегда обращается в нуль в той точке, где обращается в нуль температура системы. При  $\alpha=0,75$  нуль концентрации расположен в окрестности точки  $t_3=-2,265$ , а при  $\alpha=1,0$  – в окрестности точки  $t_4=-1,950$ .

На рис. 15.3 дана зависимость давления от координаты системы  $x/l_0$ . Она также имеет качественно другой характер, чем при  $\alpha=0$ . Как и ранее, максимум давления лежит в плоскости  $t=0$ . Распределение давления на одном краю системы изменяется плавно, а на другом краю – резко.

изменяется плавно, а на другом краю – резко.

На рис. 15.4 для тех же значений параметров приведено распределение проекции термодиффузионной напряженности гравитационного поля, возникающей в системе. Знак проекции изменяется при переходе через плоскость максимальной температуры для значения параметра  $0 < \alpha < 1$  и не изменяется для значения  $\alpha = 1$ .

На рис. 15.5 представлены фазовые траектории системы для перечисленных параметров, построенные в ограниченном диапазоне изменения потенциала.

Рис. 15.6 – 15.8 выполнены при следующих значениях параметров: политропный индекс системы  $n=2$ , а значения параметра  $\alpha$  задавались в пределах  $\alpha_1=1,25$  (кривая 1),  $\alpha_2=1,5$  (кривая 2),  $\alpha_3=1,75$  (кривая 3) и  $\alpha_4=2,0$  (кривая 4). Эти случаи следует отнести к большим значениям температурного градиента, поскольку температура на границе системы может отличаться от ее значения в плоскости  $t=0$  почти на порядок.

На рис. 15.6 приведено распределение температуры. Оно не имеет максимума и несимметрично относительно плоскости  $t=0$ . Температура системы обращается в нуль только на одной из границ. Это говорит о том, что и в этом случае система излучает в одном направлении.

На рис. 15.7 представлено распределение концентрации частиц. Его вид сохраняется таким же, как и при  $0 < \alpha < 1$ . При этом на резкой границе системы значения концентрации равны нулю и расположены: для  $\alpha=1,25$  в окрестности точки  $t_1=-1,709$ ; для  $\alpha=1,5$  в окрестности точки  $t_2=-1,518$ ; для  $\alpha=1,75$  в окрестности точки  $t_3=-1,364$ . Отметим, что при значении  $\alpha=2,0$  температурный градиент становится таким большим, что в распределении исчезает максимум, а концентрация на краю системы стремится к бесконечности возле вертикальной асимптоты,

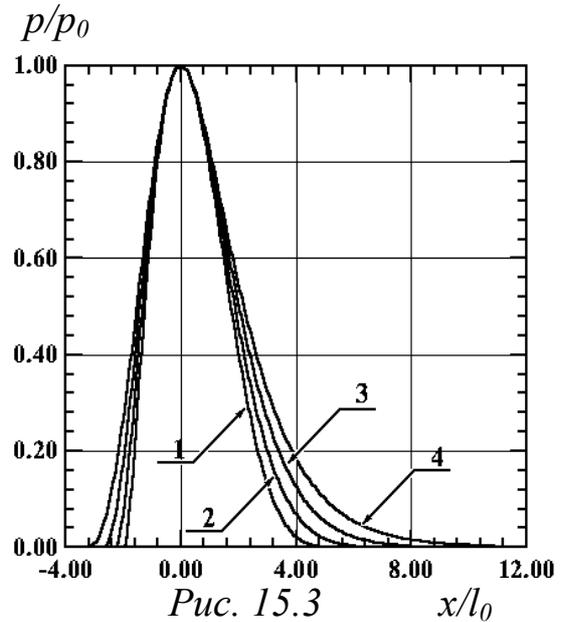


Рис. 15.3

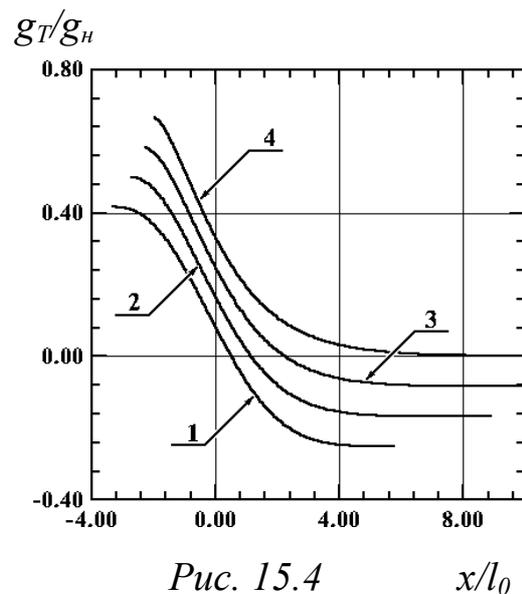


Рис. 15.4

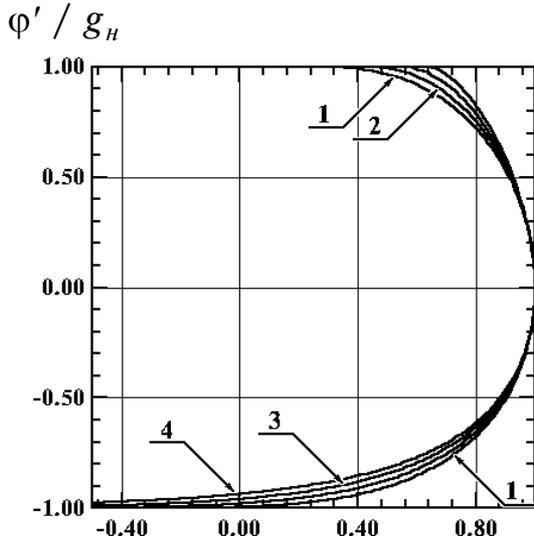


Рис. 15.5  $\varphi / \varphi_0$

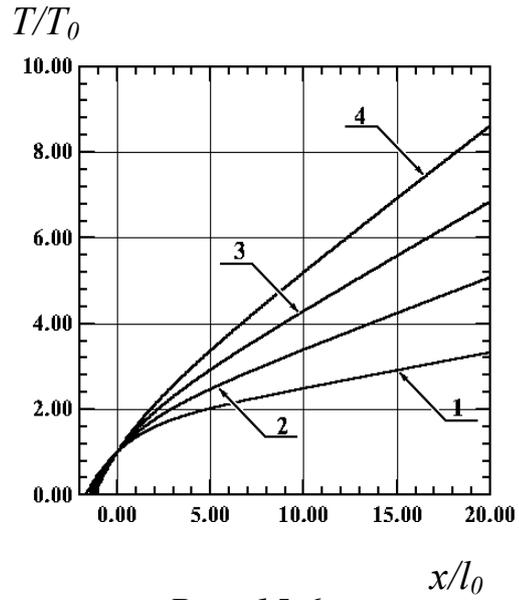


Рис. 15.6  $x/l_0$

лежащей в окрестности точки  $t_4 = -1,237$ , вследствие чего этот случай также следует считать пограничным.

На рис. 15.8 дано распределение давления по длине системы. Его характер остается таким же, как и для случая  $0 < \alpha < 1$ , но протяженность области, в которой давление плавно изменяется, значительно увеличивается.

Направления сил полевого происхождения, удерживающих рассматриваемую систему в равновесии, остаются такими же, как и в случае

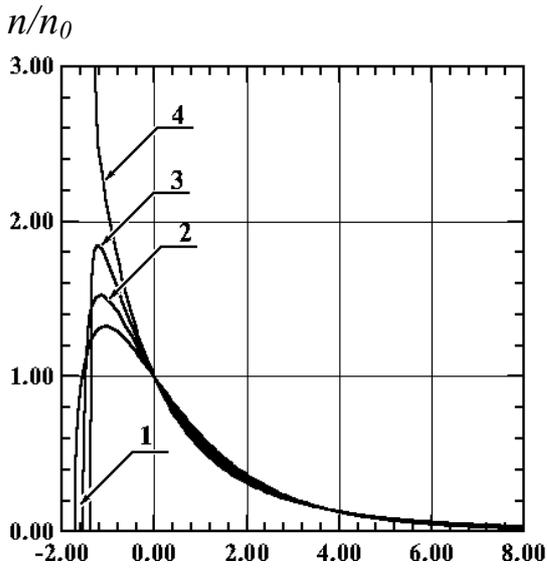


Рис. 15.7  $x/l_0$

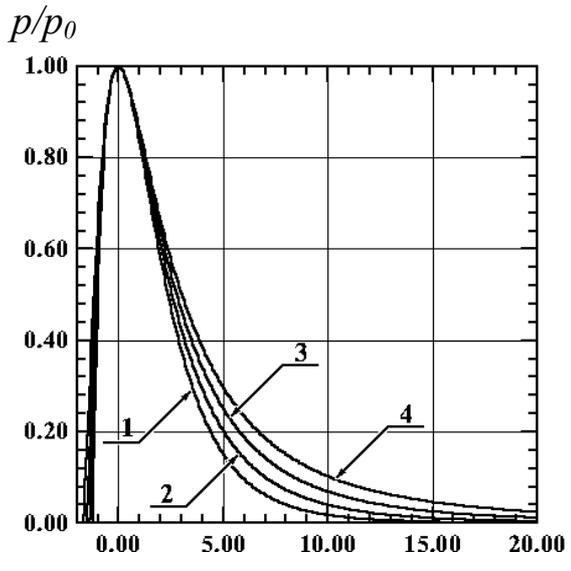


Рис. 15.8  $x/l_0$

политропических состояний. Силы, стягивающие слой вещества, направлены к плоскости  $t=0$  и сонаправлены с вектором  $\mathbf{g}$  [совпадает с (5.3)]. Силы, расширяющие слой вещества, создаются градиентом давления самосогласованного поля, который компенсирует разрывающие силы [совпадает с (5.8)].

**Оценки.** Приведем оценки, учитывающие влияние термодиффузионного поля в газовых системах. Так, кислород, удерживаемый самосогласованным полем, для значений  $n=1$  и  $\alpha=0,25$  имеет следующие параметры: в плоскости  $t=0$  давление  $P=p_0=10^5$  Па,  $T_0=328$  К. Тогда  $g_H=1,3 \cdot 10^{-2}$  м/с<sup>2</sup>;  $l_0=6,6 \cdot 10^6$  м; длина системы  $L=4,5 \cdot 10^7$  м превышает аналогичную длину системы при  $\alpha=0$  на  $0,4 \cdot 10^7$  м. Эффективность объемных тепловых источников  $\delta=0,5$ , значение  $\chi=8,5 \cdot 10^{-38}$  м·К. Наибольшее значение термодиффузионной напряженности на “резком” краю системы  $g_T=8,3 \cdot 10^{-3}$  м/с<sup>2</sup>. Увеличение  $\alpha$  до значения  $\alpha=1$  дает следующие параметры:  $L=8 \cdot 10^8$  м,  $g_T=1,25 \cdot 10^{-2}$  м/с<sup>2</sup>.

Для политропного индекса  $n=2$  и  $\alpha=0,25$  при тех же исходных значениях давления и температуры изменяются длина системы  $L$  и значение  $\chi$ :  $L=5,8 \cdot 10^7$  м,  $\chi=5,7 \cdot 10^{-38}$  м·К. Эффективность объемных тепловых источников  $\delta=1/3$ , а термодиффузионная напряженность  $g_T=5,2 \cdot 10^{-3}$  м/с<sup>2</sup>.

Увеличение  $\alpha$  до единицы дает следующие значения:  $L=1,6 \cdot 10^8$  м,  $g_T=5,2 \cdot 10^{-3}$  м/с<sup>2</sup>. Из сделанных оценок видно, что при прочих равных условиях размеры гравитирующих систем, в которых проявляется действие термодиффузии, больше размеров систем, в которых она не проявляется.

## § 16. Системы одноименных зарядов

Анализ политропических равновесий самосогласованных систем одноименных зарядов, проведенный в § 12, показал, что в упомянутых системах всегда существует градиент температуры, обусловленный распределенными тепловыми стоками, объемная плотность мощности которых зависит от политропного индекса и абсолютной температуры (12.56).

Наличие градиента температуры должно приводить к появлению в системе напряженности электрического поля, обусловленной термодиффузией:

$$\mathbf{E}_T = \frac{k}{q} \text{grad}T. \quad (16.1)$$

**Уравнения равновесия.** Учет влияния термодиффузионной напряженности изменяет систему уравнений (6.1),(6.4),(6.13), которую в этом случае удастся представить в более общем виде:

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi qn; \quad (16.2)$$

$$\text{div } \mathbf{E}_T = 4\pi\delta qn; \quad (16.3)$$

$$\text{grad}p = qn \mathbf{E}; \quad (16.4)$$

$$p = nkT, \quad (16.5)$$

где  $q$  – элементарный заряд, а  $n$  – концентрация системы в произвольной точке.

В уравнении (16.3) предполагается, что дивергенция термодиффузионной напряженности электрического поля пропорциональна объемной плотности зарядов, но имеет коэффициент эффективности объемных тепловых стоков  $\delta$ , отличающийся от единицы ( $\delta < 1$ ). Это предположение эквивалентно тому, что излучение энергии из области, занятой зарядами, можно отождествить с существованием объемных тепловых стоков, мощность которых пропорциональна концентрации зарядов (см. выводы на с.139 – 140).

Предлагаемый подход позволяет рассчитать пространственные статические равновесия вещества, состоящего из одноименных зарядов и удерживаемого самосогласованным полем, в системах с конечной теплопроводностью.

**Интегралы системы.** Выпишем интегралы, определяющие важнейшие свойства исследуемой системы. Первый скалярный интеграл получим, умножив (16.2) на (16.4). Он представляет собой полное давление системы [см. (6.6)]

$$\frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} - p = \text{const}. \quad (16.6)$$

Второй векторный интеграл следует из (16.2) и (16.3):

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_T / \delta - \mathbf{E} = \text{const}. \quad (16.7)$$

Он представляет собой вектор полной напряженности электрического поля системы, состоящей из разности эффективной напряженности электрического поля  $\mathbf{E}_T / \delta$ , возникающего из-за термодиффузии, и напряженности самосогласованного поля системы. Его происхождение связано с тем, что при наличии градиента температуры в газе одноименных зарядов всегда устанавливаются такие распределения эффективной напряженности электрического поля термодиффузии и самосогласованного

поля системы, при которых их дивергенции одинаковы в любой точке пространства взаимодействия, а следовательно,  $\operatorname{div} \mathbf{E}_p = 0$ .

**Система с плоской симметрией.** Исследуем свойства плоской самосогласованной системы. Для этого учтем однородность вектора  $\mathbf{E}_p$  и предположим, что все векторы, входящие в соотношение (16.7), лежат на одной прямой, ориентированной параллельно оси  $x$ . В этом случае система (16.2) – (16.5) упрощается и имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi qn; \quad (16.8)$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \chi n; \quad (16.9)$$

$$\frac{dp}{dx} = -qn \frac{d\varphi}{dx}; \quad (16.10)$$

$$p = nkT, \quad (16.11)$$

где

$$\chi = 4\pi q^2 \delta / k \quad (16.12)$$

– отношение мощности тепловых стоков к коэффициенту теплопроводности. Оно определяет соотношение между излученной и поглощенной тепловыми энергиями в каждом слое одноименных зарядов.

**Гамильтонова функция системы.** Интеграл (16.6) в плоской симметрии становится гамильтоновой функцией системы

$$\frac{(\varphi')^2}{8\pi} - p(\varphi) = H(\varphi' / 4\pi, \varphi) = \text{const}, \quad (16.13)$$

а интеграл (16.7) соответствует сохраняющейся проекции полной напряженности электрического поля системы

$$E_p = E_T / \delta - E_x = \text{const}. \quad (16.14)$$

**Барометрическое соотношение.** Из (16.10) с учетом (16.11) следует уравнение

$$\frac{dp}{p} = -\frac{qd\varphi}{kT}, \quad (16.15)$$

которое позволяет получить барометрическое соотношение для распределения давления зарядов в гамильтоновых системах с термодиффузией:

$$p(\varphi) = p_0 \exp\left(-\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{qd\varphi}{kT(\varphi)}\right), \quad (16.16)$$

где  $p(\varphi)=p_0$  в плоскости, в которой  $\varphi=\varphi_0$ . Из (16.16) видно, что разнообразие барометрических соотношений системы определяется видом температурно-потенциальной зависимости  $T=T(\varphi)$ .

Линейная зависимость  $T=T(\varphi)$  следует из (16.14) только при условии, что  $E_p=0$  или  $E_T/\delta=E_x$ . Это условие позволяет определить установившееся распределение зарядов в системах, в которых проекции эффективной напряженности термодиффузионного поля и напряженности самосогласованного поля равны друг другу в любой плоскости пространства взаимодействия.

Покажем, что этот случай совпадает со случаем политропических состояний, исследованных ранее в § 12. Интегрируя (16.14) при условии, что  $T(0)=0$ , получим линейную связь температуры системы с потенциалом:

$$T = -\frac{\delta q \varphi}{k}. \quad (16.17)$$

Из (16.17) следует, что во всей области, занятой зарядами, потенциал самосогласованного поля неположителен. Представим (16.17) в виде

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\varphi}{\varphi_0}, \quad (16.18)$$

где

$$\varphi_0 = -kT_0 / (\delta q) = -\Phi_0 \quad (16.19)$$

– наименьшее значение потенциала в системе, а  $T_0$  – температура системы в этой же плоскости.

Подставляя  $T(\varphi)$  из (16.18) в (16.16) и интегрируя последнее, получим барометрическое соотношение в виде:

$$p(\varphi) = p_0 \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^{1/\delta} = p_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1/\delta}. \quad (16.20)$$

Из (16.20) следует функция распределения плотности и концентрации зарядов в системе:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1/\delta-1} = \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^{1/\delta-1}. \quad (16.21)$$

Сравнение (16.21) с политропами (12.52) дает связь коэффициента эффективности  $\delta$  с политропным индексом. Она оказывается такой же, как и в случае гравитирующих частиц  $\delta = 1 / (n + 1)$ , что позволяет определить отношение мощности тепловых стоков к коэффициенту теплопроводности  $\chi$  в газе зарядов:

$$\chi = \frac{4\pi q^2}{k(n+1)}. \quad (16.22)$$

Подставляя (16.20) в (16.13), получаем гамильтонову функцию системы в явном виде

$$\frac{(\varphi')^2}{8\pi} - p_0 \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^{n+1} = H(\varphi' / 4\pi, \varphi) = P = \text{const} \Phi \quad (16.23)$$

В (16.23) уменьшаемое представляет собой давление само-согласованного поля системы, а вычитаемое – газокINETическое давление зарядов системы (16.5). Как и в политропических случаях, канонически сопряженные величины в функции (16.23) остаются теми же. Закон сохранения (16.23), как и ранее, выполняется при отсутствии любых внешних статических электрических полей, рассматриваемых по отношению к самосогласованному полю системы.

Как видно из (16.23), величина полного давления может быть положительной, нулевой или отрицательной. Исследуем случай положительного давления. Для этого полное давление (16.23) зададим в плоскости  $x=0$  с калибровкой  $\varphi=\varphi_0$ :

$$\frac{(\varphi'_0)^2}{8\pi} - p_0 = H(\varphi'_0 / 4\pi, \varphi_0) = P, \quad (16.24)$$

где  $\varphi'_0$  – значение градиента потенциала в этой плоскости. Направление вектора напряженности электрического поля  $\mathbf{E}_0 = -\varphi'_0$  противоположно выбранному направлению оси  $x$ , поскольку все заряды системы в области  $x>0$  предполагаются положительными. Обе части равенства (16.24) разделим на величину давления поля  $W_0 = E_0^2 / 8\pi$ , взятого в плоскости  $x=0$ :

$$P / W_0 = 1 - \beta, \quad (16.25)$$

где  $\beta = p_0 / W_0$  – параметр состояния самосогласованной системы.

Система находится в состоянии с положительным полным давлением при условии  $P>0$  или  $0<\beta<1$ . В этом случае всегда существует такое значение координаты  $x=L$ , при котором потенциал, давление частиц и температура системы обращаются в нуль, а сама система ограничена.

Учитывая знак градиента потенциала, интеграл уравнения в (16.23) приведем к виду

$$\int_t^1 \frac{dt}{\sqrt{1 + \beta t^{n+1} / (1 - \beta)}} = \sqrt{1 - \beta} \frac{x}{l}, \quad (16.26)$$

где  $t = \varphi / \varphi_0$ ;

$$l = \frac{\Phi_0}{E_0} = \frac{kT_0}{\delta q E_0} = l_0 / \delta \quad (16.27)$$

– пространственный масштаб системы.

**Распределения физических величин для случая  $n=1$ .** Результат интегрирования различен для различных индексов политропии. Интегрируя (16.26) для  $n=1$ , получим распределение потенциала по длине системы:

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = \sqrt{(1-\beta) / \beta} sh\left( Arsh\sqrt{\beta / (1-\beta)} - \sqrt{\beta}x / l \right). \quad (16.28)$$

Из (16.28) видно, что для  $n=1$  самосогласованное поле, создаваемое коллективом зарядов, представляет собой потенциальный барьер, ограниченный по высоте и в пространстве. Пространство взаимодействия зарядов системы зависит от параметра ее состояния  $\beta$  и ограничено размерами

$$\frac{L}{l} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} Arsh\sqrt{\beta / (1-\beta)}. \quad (16.29)$$

При  $\beta \rightarrow 0$  длина пространства взаимодействия приближается к пространственному масштабу. В случае  $\beta \rightarrow 1$  пространство взаимодействия не имеет границ.

Распределение проекции напряженности самосогласованного поля следует из (16.28) и имеет вид

$$\frac{E_x}{E_0} = -\sqrt{1-\beta} ch\left( Arsh\sqrt{\beta / (1-\beta)} - \sqrt{\beta}x / l \right), \quad (16.30)$$

где  $E_0 = \Phi_0 / l$ .

Температура, плотность и концентрация зарядов изменяются по длине системы по тому же закону, что и потенциал (16.28):

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} = \frac{\Phi}{\Phi_0}. \quad (16.31)$$

Распределение давления зарядов системы имеет вид

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1-\beta}{\beta} sh^2\left( Arsh\sqrt{\beta / (1-\beta)} - \sqrt{\beta}x / l \right). \quad (16.32)$$

Давление поля изменяется по длине системы по закону

$$D = \frac{E_x^2}{8\pi} = \frac{E_0^2}{8\pi} (1-\beta) ch^2\left( Arsh\sqrt{\beta / (1-\beta)} - \sqrt{\beta}x / l \right). \quad (16.33)$$

Градиент давления зарядов системы направлен против оси  $x$  и совпадает в любой плоскости с градиентом давления поля:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dD}{dx} = -\frac{p_0}{l} \frac{(1-\beta)}{\sqrt{\beta}} sh\left[ 2\left( Arsh\sqrt{\beta / (1-\beta)} - \sqrt{\beta}x / l \right) \right]. \quad (16.34)$$

Проекция напряженности термодиффузионного электрического поля распределена по длине системы в соответствии с законом

$$E_T = \frac{k}{q} \frac{dT}{dx} = -\frac{k}{q} \frac{T_0}{l} \sqrt{1-\beta} ch\left( Arsh\sqrt{\beta / (1-\beta)} - x\sqrt{\beta} / l \right). \quad (16.35)$$

Легко увидеть, что полученные распределения удовлетворяют требованию неизменности интегралов (16.13) и (16.14). Так, из соотношений (16.32) – (16.34) легко убедиться, что разность давлений поля и зарядов системы в любой плоскости пространства взаимодействия остается постоянной и равной полному давлению системы  $P$ , а градиент полного давления политропической системы зарядов в любой плоскости обращается в нуль.

Направления градиентов позволяют выяснить направления объемных сил, удерживающих систему в равновесии в ограниченной области пространства. Силы, прижимающие слой зарядов, направлены к плоскости  $x=0$  и сонаправлены с вектором  $\mathbf{E}$  [совпадает с (6.3)]. Силы, отталкивающие слой зарядов, создаются градиентом давления самосогласованного поля, взятым с противоположным знаком, который, компенсируя действие градиента давления зарядов, удерживает систему в равновесии [совпадает с (6.8)].

Когда давление самосогласованного поля значительно превышает давление зарядов системы, выполняется приближение  $\beta \ll 1$ . В этом случае потенциал, создаваемый зарядами, линеен:  $\varphi = \varphi_0(1 - x/l)$ , электрическое поле системы однородно во всем пространстве взаимодействия  $E_x = -E_0$ , а длина пространства взаимодействия совпадает с пространственным масштабом системы  $L=l$ . Плотность и концентрация зарядов, а также температура системы и в этом случае неоднородны и изменяются на длине системы по линейному закону

$$T / T_0 = \rho / \rho_0 = n / n_0 = 1 - x / l.$$

Сравнение приведенных результатов с соотношениями, полученными для политропических состояний зарядов с положительным полным давлением в § 12, указывает на их идентичность при замене  $\varphi / \varphi_0$  на  $1 - \varphi / \varphi_n$  с выбором нового пространственного масштаба (12.14). Сделанные по соотношениям (16.28) – (16.33) оценки параметров электронного газа, указанных на с.141, дают те же результаты. Из (16.23) легко получить соотношения, описывающие политропические состояния зарядов для случаев нулевого и отрицательного полных давлений системы. Соотношения для случая нулевого полного давления совпадают с соотношениями, получаемыми для распределения потенциала, концентрации и температуры в теории плотного приповерхностного электронного слоя [38].

**Политропические состояния с термодиффузией.** Действие термодиффузии на распределение зарядов в гамильтоновой системе проявляет себя

при условии, если  $E_p \neq 0$ . Получить в этом случае в явном виде барометрическое соотношение, а следовательно, проинтегрировать (16.13) не удастся. Используя интегралы (16.13) и (16.14), понизим порядок дифференциальных уравнений (16.8) и (16.9). Запишем уравнения системы (16.8) – (16.11) для состояний неотрицательного полного давления в виде:

$$x' = -\delta\sqrt{1 + \beta(yz - 1)}; \quad (16.36)$$

$$y' = x' + \alpha\delta = \alpha\delta - \delta\sqrt{1 + \beta(yz - 1)}; \quad (16.37)$$

$$z' = z(x' / \delta - y') / y = -\delta z \left[ (1 / \delta - 1)\sqrt{1 + \beta(yz - 1)} + \alpha \right] / y, \quad (16.38)$$

где штрихи означают дифференцирование по  $t$  и приняты обозначения  $t = x / l_0$ ,  $x = \varphi / \varphi_0$ ,  $y = T / T_0$ ,  $z = n / n_0$ ,  $\alpha = E_p / E_0$ . Легко видеть, что для  $\delta=1/2$  и  $\alpha=0$  система имеет решения

$$x = y = z = \sqrt{(1 - \beta) / \beta} \operatorname{sh} \left( \operatorname{Arsh} \sqrt{\beta} / (1 - \beta) - \sqrt{\beta} t / 2 \right),$$

соответствующие политропическому состоянию с индексом  $n=1$ . При  $\alpha \neq 0$  аналитические решения системы с начальными условиями  $t = 0, x = y = z = 1$ , представляющие физический интерес, по-видимому, не существуют.

Заметим, что однородные распределения зарядов в гамильтоновой системе не реализуются. В соответствии с требованием однородности концентрации  $z' = 0, z = 1$  получим из (16.38) равенство

$$x' = \delta y', \quad (16.39)$$

которому удовлетворяют только постоянные значения  $y$  и  $x$ . Неизменность же  $x = \varphi / \varphi_0$  приводит к исчезновению напряженности самосопряженного поля в системе (а вместе с ней и сил, удерживающих систему в равновесии).

**Обсуждение результатов.** Результаты решения системы уравнений (16.36) – (16.38) представлены на рис. 16.1 – 16.12. При решении системы использован метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности для граничных условий  $t = 0, x = y = z = 1$  при различных значениях параметров  $n = 1 / \delta - 1$  и полной напряженности системы  $\alpha = E_p / E_0$  с проверкой законов сохранения на каждом шагу интегрирования.

Рис. 16.1 – 16.4 построены при следующих значениях параметров: политропный индекс системы  $n=1$  (коэффициент эффективности объемных тепловых стоков  $\delta=1/2$ ), параметр состояния системы  $\beta=1/2$ , а значения параметра  $\alpha$  задавались в пределах:  $\alpha_1=-0,25$  (кривая 1),  $\alpha_2=-0,5$  (кривая 2),  $\alpha_3=-0,75$  (кривая 3),  $\alpha_4=-1,0$  (кривая 4).

На рис. 16.1 приведены распределения температуры. Для интервала значений  $-1 \leq \alpha < 0$  они сохраняют те же свойства, что и при значении  $\alpha=0$ . Температура системы убывает с ростом  $x/l_0$  и скорость ее убывания зависит от параметра  $\alpha$  (чем меньше  $\alpha$ , тем больше скорость убывания). На границе системы температура обращается в нуль. Система излучает в направлении оси  $x$ . Чем меньше отрицательное значение  $\alpha$ , тем больше величина среднего теплового потока, создаваемого системой. Уменьшение полной напряженности системы  $\alpha$  приводит к уменьшению длины пространства взаимодействия зарядов, которое ограничено началом координат и точкой, в которой температура обращается в нуль.

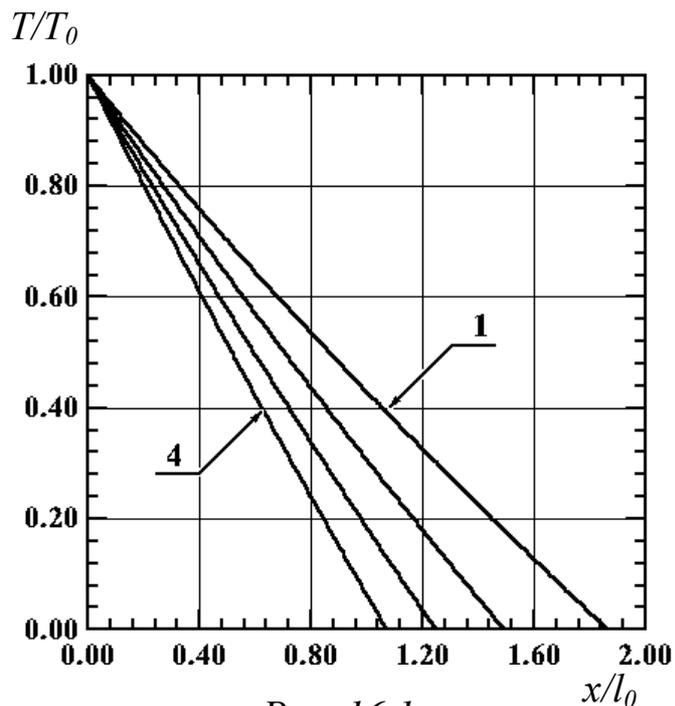


Рис. 16.1

На первый взгляд этот факт может вызвать недоумение, поскольку противоречит результатам, полученным в § 15. Там размеры гравитирующих систем с термодиффузией получались больше обычных. Здесь необходимо сделать уточнение. Все дело в том, что системы гравитирующих частиц следует отнести к двухслойным системам, в то время как системы зарядов – однослойны. В двухслойных системах плоскость нулевого давления самосогласованного поля делит все пространство взаимодействия на две части: “внутреннюю”, в которой вектор  $\mathbf{g}$  со-

направлен с осью  $x$  (отрицательные значения  $x / l_0$ ), и “внешнюю”, в которой вектор  $\mathbf{g}$  имеет направление, противоположное направлению оси  $x$  (положительные значения  $x / l_0$ ).

Поэтому сравнение свойств термодиффузионных систем следует проводить на отдельно взятом слое. Наиболее удобно это сделать на примере гравитирующей системы с однонаправленным излучением, представленной на рис. 15.6 и 15.7. Из этих рисунков видно, что длина пространства взаимодействия “внутреннего” слоя, которую следует отсчитывать от  $x / l_0 = 0$  до точки нуля температуры, уменьшается с ростом полной напряженности системы  $\alpha$ . Длина же пространства взаимодействия “внешнего” слоя увеличивается с ростом  $\alpha$ .

Столь различные свойства в обоих случаях можно объяснить с точки зрения механики. Температурный градиент системы зарядов в плоскости  $x / l_0 = 0$  определяется двумя параметрами:  $\frac{dy}{dt}(0) = \delta(\alpha - 1)$ . Как видно из этого соотношения, температурный градиент всегда отрицателен для значений  $-1 \leq \alpha < 0$ . Уменьшение отрицательного значения  $\alpha$  приводит к увеличению модуля среднего градиента температуры в слое. Направление градиента температуры в слое неизменно и обуславливает направление термодиффузионной напряженности, которое в свою очередь совпадает с направлением напряженности самосогласованного поля (оба они противоположны оси  $x / l_0$ ).

Тогда объемных сил, прижимающих каждый слой зарядов к плоскости  $x / l_0 = 0$ , становится две, а их действие компенсирует только одна объемная сила, связанная с градиентом давления самосогласованного поля. Это приводит к проявлению эффекта “сжимающейся пружины”, в результате которого длина пространства взаимодействия уменьшается.

При  $\alpha > 1$  в системе будут возникать положительные температурные градиенты, и тогда направление термодиффузионной напряженности изменится на противоположное, объемная сила  $\mathbf{E}$ , прижимающая каждый слой зарядов к плоскости  $x / l_0 = 0$ , будет одна, а ее действие будут компенсировать две объемные силы: одна, возникающая из-за термодиффузии, а другая, связанная с градиентом давления поля. Это приведет к проявлению эффекта “растягивающейся пружины”, в результате которого длина пространства взаимодействия, а стало быть, и толщина слоя увеличиваются.

Эффекты упругой деформации, чувствительные к изменению градиента температуры, проявляют себя по отдельности как в слоях гравитирующих частиц, так и в слоях одноименных зарядов. Это указывает на их

универсальность и позволяет обнаружить упругие механические свойства в системах, не имеющих кристаллической решетки.

Эффекты деформации толщины слоя будут возникать и тогда, когда на систему наложено внешнее соответствующее поле определенного направления. Смена направления и изменение величины напряженности этого поля будут влиять на величину деформации, возникающую в слое. Следует отметить, что в системах одноименных зарядов проявление упругих механических свойств более выражено, чем в гравитационных, поскольку в гравитационных системах всегда существует “внешний” слой, который и дает основной вклад в увеличение длины системы с термодиффузией.

На рис. 16.2 представлено распределение концентрации зарядов.

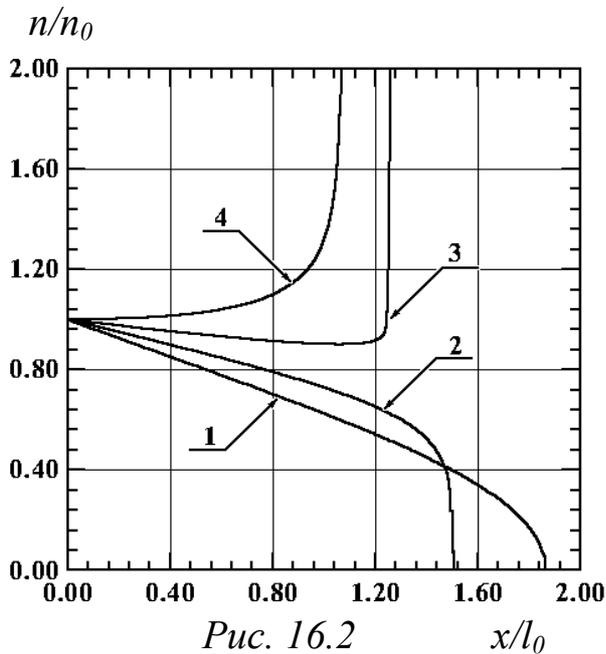


Рис. 16.2

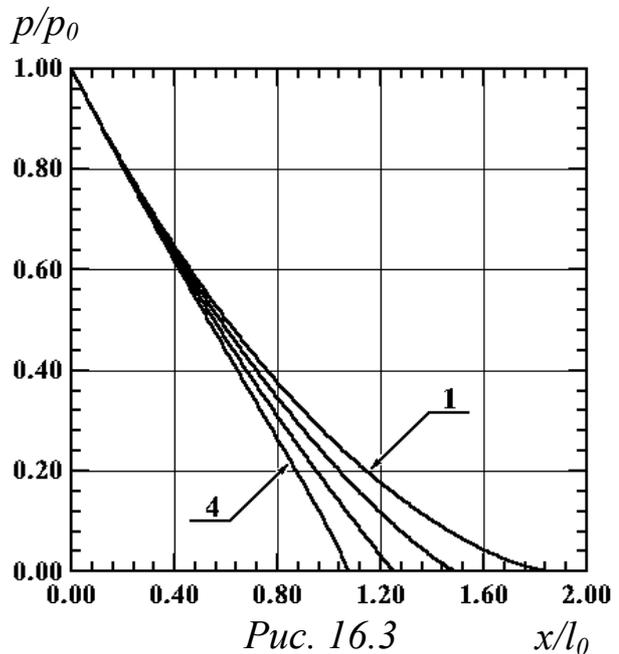


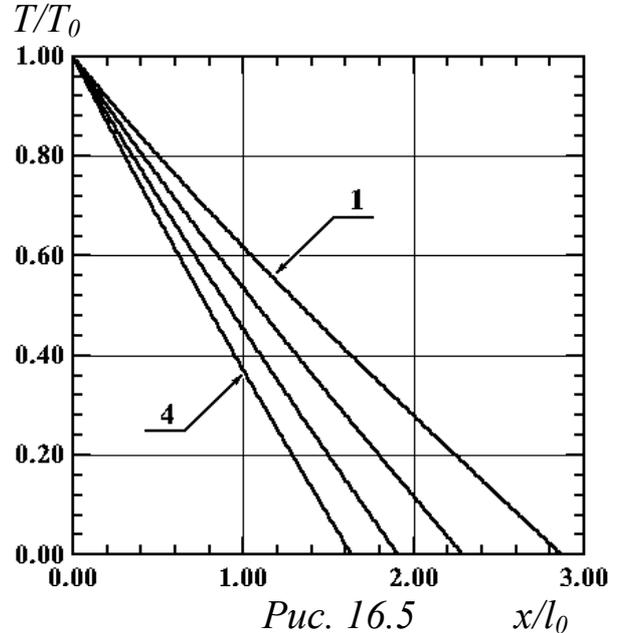
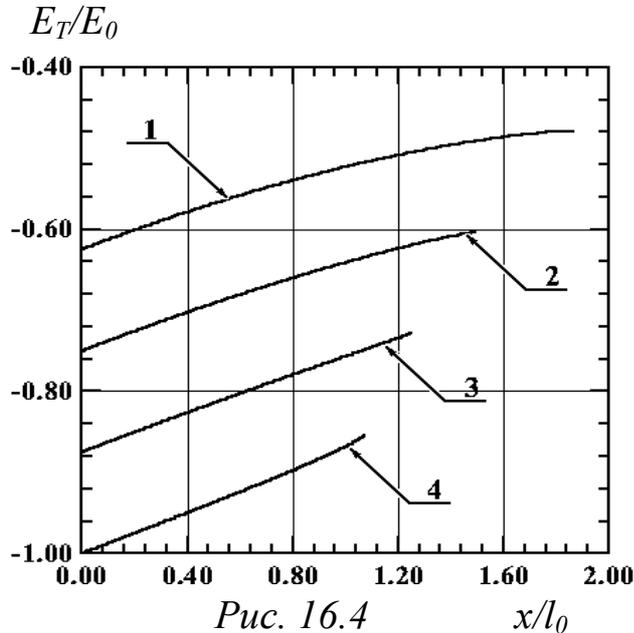
Рис. 16.3

В диапазоне изменения  $-1 \leq \alpha < 0$  оно всегда имеет резкую границу. Характер распределения зависит от значения  $\alpha$ . При  $\alpha_1 = -0,25$  нуль концентрации лежит в окрестности точки  $t_1 = 1,865$ , а при  $\alpha_2 = -0,5$  – в окрестности точки  $t_2 = 1,494$ . Увеличивающийся модуль градиента температуры перемещает еще больше зарядов на внешнюю границу системы, что приводит к смене закона распределения их концентрации и ее неограниченному росту. Асимптоты, к которым приближаются распределения, расположены при  $\alpha_3 = -0,75$  в окрестности точки  $t_3 = 1,249$ , а при  $\alpha_4 = -1,0$  – в окрестности точки  $t_4 = 1,074$ .

На рис. 16.3 представлены зависимости давления зарядов  $p / p_0$  от координаты системы  $x / l_0$ . Для интервала значений  $-1 \leq \alpha < 0$  они отражают те же свойства системы, как и при значении  $\alpha = 0$ . Давление

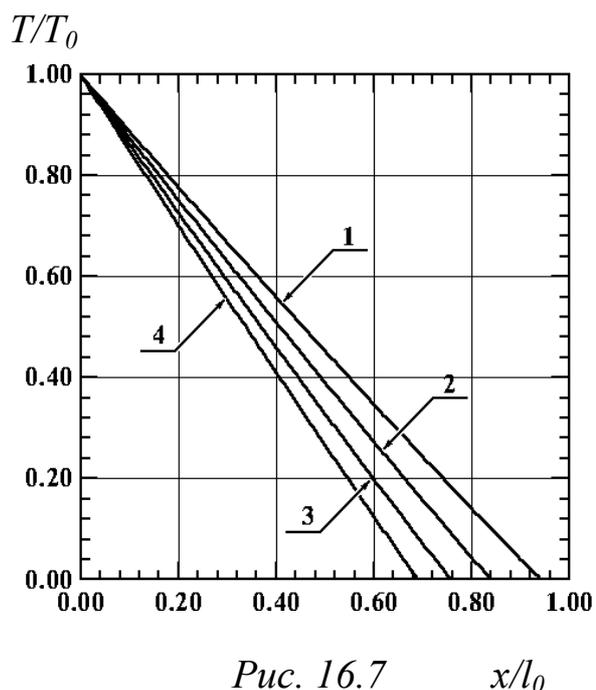
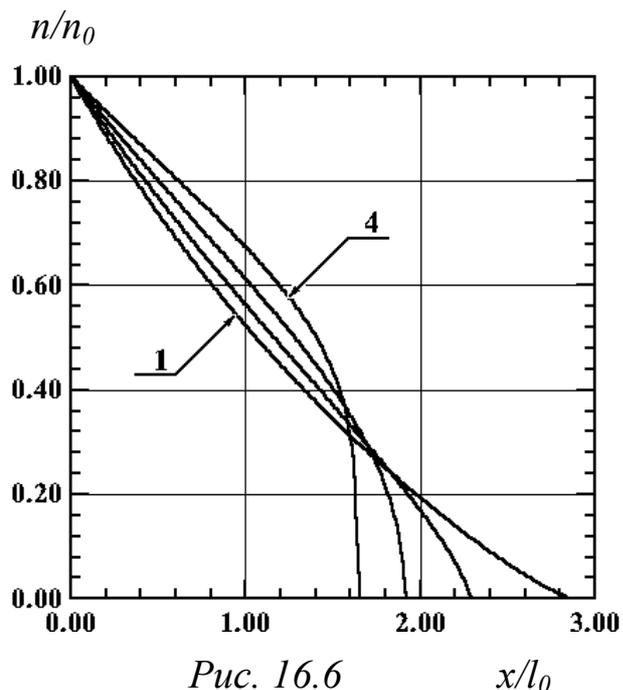
убывает с ростом  $x / l_0$ , и скорость его убывания зависит от параметра  $\alpha$  (чем меньше  $\alpha$ , тем больше скорость убывания давления). На границе системы давление обращается в нуль.

На рис. 16.4 приведены распределения проекции термодиффузион-

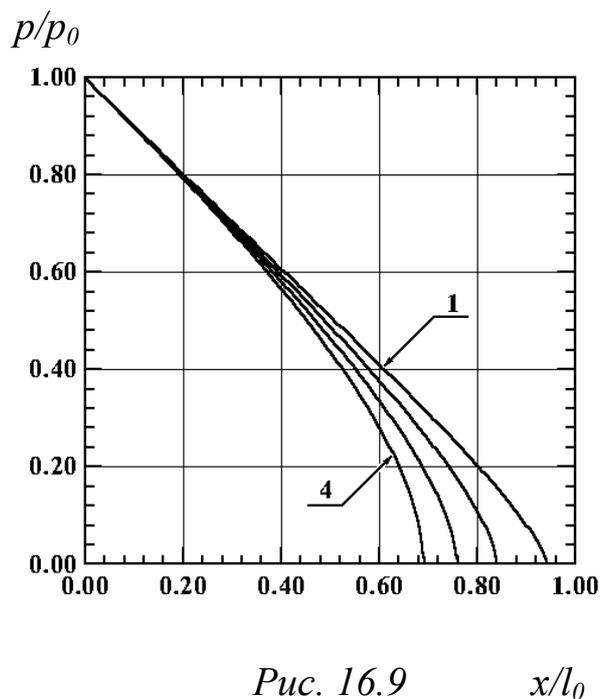
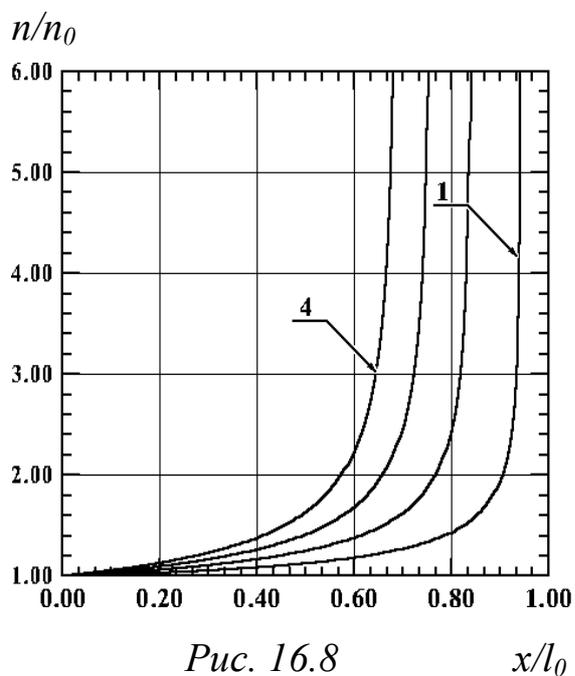


ной напряженности по длине системы. В интервале значений  $-1 \leq \alpha < 0$  направление вектора напряженности противоположно направлению оси  $x / l_0$  и остается неизменным. Значения напряженности становятся все более отрицательными при уменьшении параметра  $\alpha$ . В плоскости  $x / l_0 = 0$  напряженность становится равной по величине напряженности самосогласованного поля  $E_0$  при  $\alpha = -1$ .

На рис. 16.5 и 16.6 приведены зависимости температуры и концентрации зарядов от длины системы. Кривые рассчитаны для тех же значений  $\alpha$  и  $\beta$ , но для уменьшенного коэффициента эффективности объемных тепловых стоков  $\delta = 1/3$  ( $n=2$ ). На графиках, представленных на рис. 16.5 и 16.6, видно заметное увеличение длины пространства взаимодействия системы до  $3l_0$  и изменение характера функции распределения концентрации. Вычисления показывают, что асимптота в распределении концентрации появляется при больших отрицательных значениях параметра  $\alpha$ .



Графики на рис. 16.7 – 16.10 построены для значений  $n=1$ ,  $\beta=1/2$ , а значение параметра  $\alpha$  изменялось в пределах:  $\alpha_1=-1,25$  (кривая 1),  $\alpha_2=-1,5$  (кривая 2),  $\alpha_3=-1,75$  (кривая 3),  $\alpha_4=-2,0$  (кривая 4). Как видно из рис. 16.7, уменьшение  $\alpha$  приводит к еще большему увеличению модуля



среднего температурного градиента в системе. Вследствие этого длина пространства взаимодействия становится меньше, чем пространственный

масштаб  $l_0$ , в чем еще больше проявляется эффект “сжимающейся пружины”.

Характер изменения концентрации (см. рис. 16.8) остается таким же, как и в случае  $\alpha=-1,0$ . Асимптоты, к которым приближаются распределения, расположены: при  $\alpha_1=-1,25$  в окрестности точки  $t_1=0,942$ , при  $\alpha_2=-1,5$  в окрестности точки  $t_2=0,840$ , при  $\alpha_3=-1,75$  в окрестности точки  $t_3=0,758$ , при  $\alpha_4=-2,0$  в окрестности точки  $t_4=0,691$ .

Зависимость давления зарядов  $p / p_0$  от длины системы  $x / l_0$  сохраняет свой прежний вид (см. рис. 16.9), как и в случае  $\alpha=-1,0$ . С уменьшением величины  $\alpha$  давление зарядов с ростом  $x / l_0$  убывает быстрее.

Характер распределения термодиффузионной напряженности также сохраняет свой вид (см. рис. 16.10), как и в случае  $\alpha=-1,0$ . В плоскости  $x / l_0=0$  для значения  $\alpha=-2,0$  она уже в 1,5 раза превышает величину напряженности самосогласованного поля  $E_0$ .

На рис. 16.11 и 16.12 приведены распределения температуры и давления по длине системы, построенные при следующих значениях параметров: политропный индекс  $n=1$ , параметр состояния системы  $\beta=1/2$ , а значения параметра  $\alpha$  задавались в пределах:  $\alpha_1=0,25$  (кривая 1),  $\alpha_2=0,5$  (кривая 2),  $\alpha_3=0,75$  (кривая 3),  $\alpha_4=1,0$  (кривая 4).

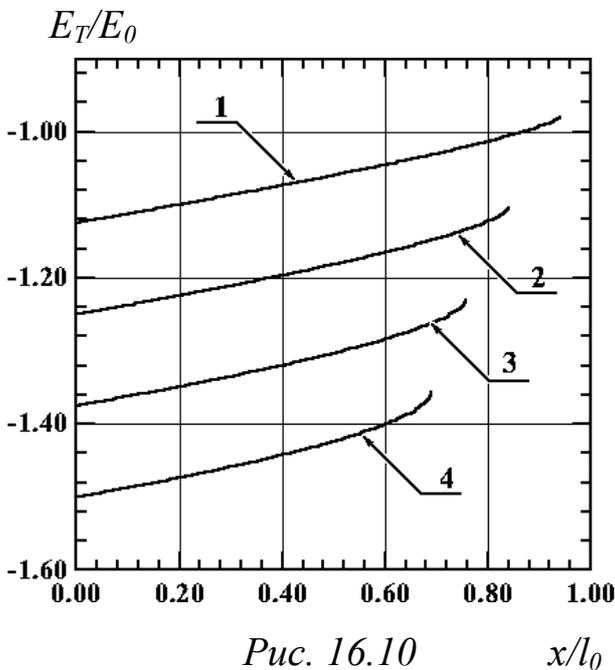


Рис. 16.10

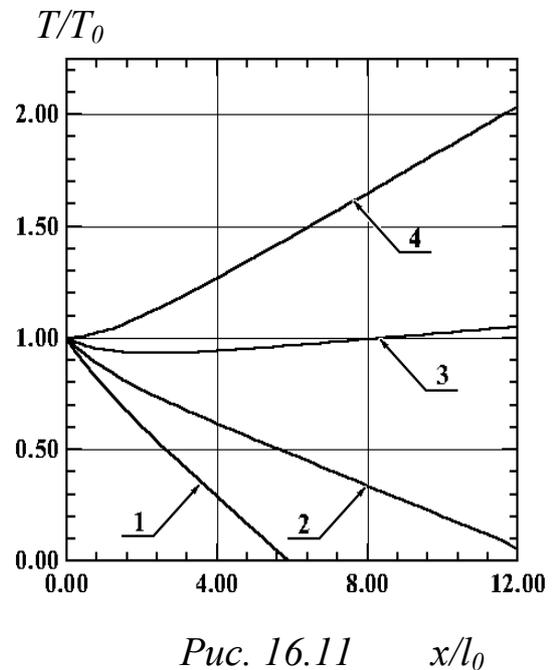
 $x/l_0$ 

Рис. 16.11

 $x/l_0$

Как видно из рис. 16.11, для значений  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в распределении температуры еще существуют точки, где она обращается в нуль. При этом обращается в нуль давление на границе системы и сама система становится ограниченной (рис. 16.12). Однако из-за уменьшения термодиффузионной напряженности ее размеры увеличиваются до значений  $L_1=5,916l_0$  при  $\alpha_1$  и  $L_2=12,8l_0$  при  $\alpha_2$  (увеличение длины “сжатой пружины”).

При значениях  $\alpha_3$  и  $\alpha_4$  в системе появляется положительный температурный градиент и система начинает излучать противоположно направлению оси  $x$ . Это приводит к тому, что на границе системы концентрация и давление зарядов асимптотически стремятся к нулю на большом расстоянии от плоскости  $x/l_0=0$ , вследствие чего система становится не ограниченной в пространстве (эффект увеличения длины “растянутой пружины”). При этих значениях  $\alpha$  свойства системы ничем не отличаются от свойств “внешнего” слоя гравитирующих частиц для значений параметров, приведенных на рис. 15.6, 15.7.

Из рис. 16.11 и 16.7 можно определить эффективность упругой деформации толщины слоя в системах одноименных зарядов. Изменение полной напряженности в пределах  $-2 \leq \alpha \leq 0,5$  приводит к изменению длины системы примерно в 12 раз.

**Оценки.** Приведем оценки для термодиффузионных систем, состоящих из электронов. Газ

электронов с параметром состояния  $\beta=1/2$  с концентрацией у поверхности  $n_0=10^{11}$  см<sup>-3</sup> и температурой  $T_0=2 \cdot 10^3$  К для значения  $\delta=1/2$  создает давление в плоскости  $x=0$ , равное  $p_0=2,76 \cdot 10^{-3}$  Па, и напряженность  $E_0=350$  В/см. Пространственный масштаб системы  $l_0 = kT_0 / (qE_0) = 4,9$  мкм, а коэффициент  $\chi=1,05 \cdot 10^{-4}$  м·К, что значительно превышает значения, полученные в гравитирующих системах.

Длина системы изменяется от  $L=3,4$  мкм при  $\alpha=-2,0$  до  $L=63$  мкм при  $\alpha=0,5$ . Это позволяет оценить средний температурный градиент, возникающий в системе. Его значение лежит в пределах от  $3,2 \cdot 10^7$  К/м при  $\alpha=-2,0$  до  $6,0 \cdot 10^8$  К/м при  $\alpha=0,5$ . Величина термодиффузионной напря

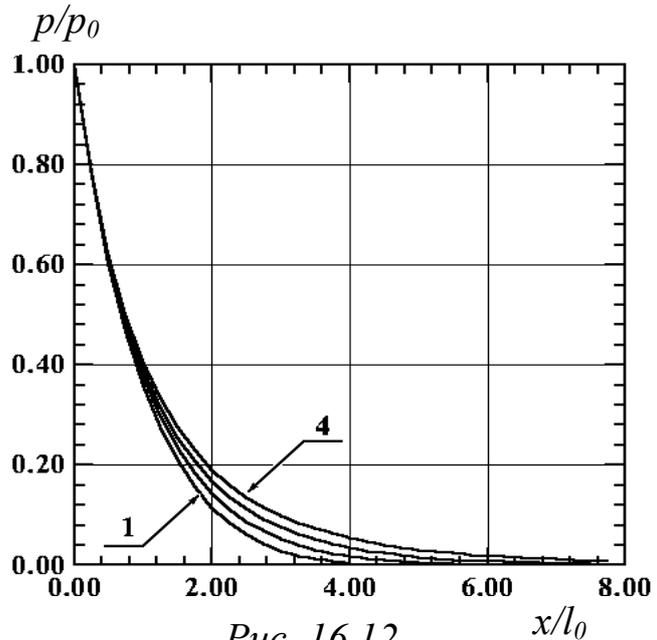


Рис. 16.12

женности при этих  $\alpha$  изменяется в диапазоне значений от  $0,6 \cdot 10^4$  до  $4,7 \cdot 10^4$  В/м.

Обнаруженные теоретически свойства упругой деформации толщины слоя системы избыточных зарядов, чувствительные к изменению градиента температуры, должны проявлять себя и в термоэлектронной эмиссии. Однако здесь следует учесть тот факт, что состояния термоэлектронов отличаются от состояний избыточных зарядов тем, что они находятся еще и во внешнем поле зарядов изображения, остающихся в металле.

В связи с этим толщина слоя, который образуют термоэлектроны возле катода, будет меньше, чем у зарядов. Последовательное экспериментальное исследование этого эффекта необходимо проводить в плоском вакуумном диоде, расстояние между анодом и катодом которого можно изменять в широких пределах от 10 до 100 мкм [39 – 41]. Для чистоты эксперимента важен факт отсутствия на электродах внешнего электрического поля.

## § 17. О физической осуществимости гамильтоновых систем

Физическая осуществимость рассмотренных гамильтоновых систем может быть поставлена под сомнение при вычислении полного заряда либо полной массы системы, находящейся во всем пространстве взаимодействия.

Для состояний с положительным полным давлением, исследованных в § 9 ( $0 < \beta < 1/2$ ), поверхностная плотность заряда зависит от параметра состояния системы  $\beta$ :

$$\sigma = q \int_0^L n(x) dx = \sigma_0 \frac{\sqrt{1 - 2\beta}}{\beta} f_i(\beta) ; (i = 1, 5), \quad (17.1)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{n_0 m v_0^2}{E_0} = \frac{2W_k}{E_0} = \frac{p_0}{E_0} \quad (17.2)$$

представляет собой отношение бесстолкновительного давления частиц системы к величине напряженности самосогласованного поля, взятых в плоскости  $x=0$ , а  $f_i(\beta)$  имеют вид:

$$f_1(\beta) = 2 \sin \frac{\theta_1}{2} - 1; \theta_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{z_0^2}{2} - 1\right); 0 \leq \beta \leq \frac{1}{4}; \quad (17.3)$$

$$f_2(\beta) = 2 \cos \frac{\theta_2}{2} - 1; \theta_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \arccos\left(1 - \frac{z_0^2}{2}\right); \frac{1}{4} \leq \beta \leq \frac{1}{3}; \quad (17.4)$$

$$f_3(\beta) = 2 \cos \frac{\theta_3}{2} - 1; \theta_3 = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos\left(1 - \frac{z_0^2}{2}\right); \frac{1}{3} \leq \beta \leq \frac{\sqrt{3}-1}{2}; \quad (17.5)$$

$$f_4(\beta) = 2 \cos \frac{\theta_4}{2} - 1; \theta_4 = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{z_0^2}{2} - 1\right); \frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq \beta \leq \frac{3}{8}; \quad (17.6)$$

$$f_5(\beta) = 2ch \frac{\theta_5}{2} - 1; \theta_5 = \frac{1}{3} Arch\left(\frac{z_0^2}{2} - 1\right); \frac{3}{8} \leq \beta < \frac{1}{2}, \quad (17.7)$$

где

$$z_0 = \frac{2(3\beta - 1)}{(1 - 2\beta)^{3/2}}. \quad (17.8)$$

Из приводимых соотношений видно, что при  $0 < \beta < 1/2$  поверхностная плотность зарядов (17.1) конечна. При  $\beta \ll 1$  она стремится к значению  $\sigma_0$ , затем монотонно возрастает с ростом  $\beta$  и при  $\beta = 1/2$  принимает значение  $2\sigma_0$ .

Для состояний с отрицательным полным давлением  $\beta > 1/2$  (параграф тот же) конечные значения поверхностной плотности заряда реализуются только для конечной длины пространства взаимодействия системы. Для длины системы  $0 \leq L \leq h$ , где  $h$  – расстояние до плоскости нулевого давления поля, поверхностная плотность зарядов имеет вид

$$\sigma_1(L) = \frac{2\sigma_0 \sqrt{2\beta - 1}}{\beta} \left[ sh \frac{\theta_1}{2} - sh \frac{\theta}{2} \right], \quad (17.9)$$

где

$$\theta_1 = \frac{1}{3} Arch\left(1 + \frac{z_1^2}{2}\right); \quad (17.10)$$

$$\theta = \frac{1}{3} Arch\left(1 + \frac{z^2}{2}\right); \quad (17.11)$$

$$z_1 = \frac{h}{P_2^{3/2} l_2}; \quad (17.12)$$

$$z = \frac{h - L}{P_2^{3/2} l_2}. \quad (17.13)$$

Для длины пространства взаимодействия  $L \geq h$

$$\sigma_2(L) = \frac{2\sigma_0\sqrt{2\beta-1}}{\beta} \left( sh \frac{\theta_1}{2} + sh \frac{\theta_3}{2} \right), \quad (17.14)$$

где

$$\theta_3 = \frac{1}{3} Arch \left( 1 + \frac{z_3^2}{2} \right); \quad (17.15)$$

$$z_3 = \frac{L-h}{P_2^{3/2} l_2}. \quad (17.16)$$

На рис. 17.1 представлены зависимости нормированной поверхностной плотности зарядов  $\frac{\sigma}{\sigma_0}$  от расстояния  $\frac{L}{h}$ , рассчитанные из соотношений (17.9) – (17.16) для значений параметра  $\beta=2$  (кривая 1) и  $\beta=5$  (кривая 2).

Для состояний с положительным полным давлением ( $0 < \beta < 1/2$ ) в системе с релятивистским бесстолкновительным потоком (§ 10) поверхностная плотность зарядов также конечна:

$$\sigma_3 = \frac{p_0'}{E_0} \frac{(1 - \sqrt{1 - 2\beta})}{\beta}, \quad (17.17)$$

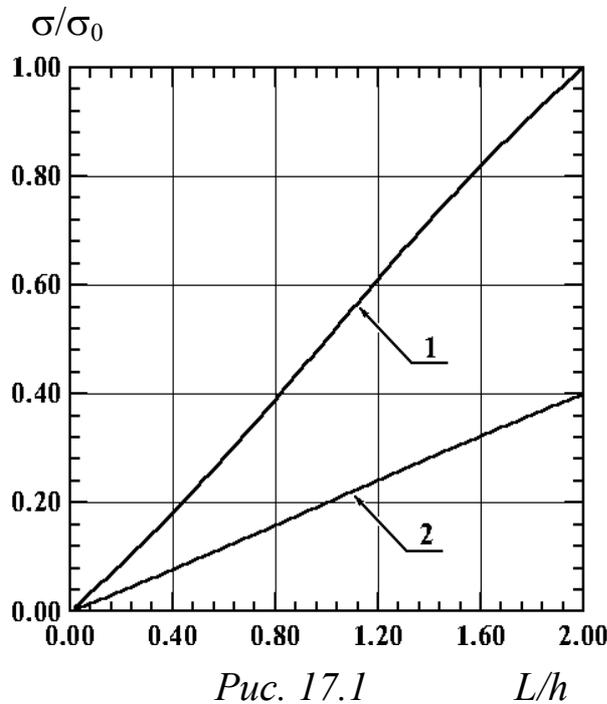


Рис. 17.1  $L/h$

где  $p_0' = n_0 m v_0^2 \gamma_0$ . Из соотношения (17.17) видно, что при  $\beta \ll 1$   $\sigma_3 \rightarrow \sigma_0'$ , где  $\sigma_0' = \frac{p_0'}{E_0}$ , а при  $\beta \rightarrow \frac{1}{2}$   $\sigma_3 \rightarrow 2\sigma_0'$ , как и в нерелятивистском случае.

В состояниях с отрицательным полным давлением конечные значения поверхностной плотности заряда существуют только для конечных значений пространства взаимодействия системы.

Политропическая система зарядов, находящихся в состоянии положительного полного давления  $0 < \beta < 1$  (§ 12), для политропного индекса  $n=1$  имеет конечное значение поверхностной плотности

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \left(1 / \sqrt{\beta} - \sqrt{(1 - \beta) / \beta}\right) / \operatorname{Arsh}\left(\sqrt{\beta} / (1 - \beta)\right), \quad (17.18)$$

где

$$\sigma_0 = qn_0L. \quad (17.19)$$

Для нулевого полного давления она также конечна:

$$\sigma = qn_0l. \quad (17.20)$$

Для газа одноименных зарядов с постоянной температурой (§ 14) поверхностная плотность зарядов самосогласованной системы конечна для состояний с положительным полным давлением  $0 \leq \beta \leq 1$ :

$$\sigma_4 = \frac{2\sigma_0(1 - \sqrt{1 - \beta})}{\beta}, \quad (17.21)$$

где  $\sigma_0 = \frac{n_0kT}{E_0}$ . Из соотношения (17.21) видно, что при  $\beta \ll 1$

$\sigma_4 \rightarrow \sigma_0$ , а при  $\beta \rightarrow 1$   $\sigma_4 \rightarrow 2\sigma_0$ , как и ранее.

При  $\beta > 1$  (случай отрицательного полного давления, § 14) поверхностная плотность зарядов стремится к бесконечности из-за расходимости интеграла на верхнем пределе при  $x \rightarrow R$ . Существование особенности указывает на то, что в этом случае пространство взаимодействия может содержать бесконечно большой заряд. В реальных ситуациях толщина слоя, заполненного зарядами, имеющими конечную энергию, всегда меньше длины пространства взаимодействия, в связи с чем отмеченная особенность не возникает.

Вычисление поверхностной плотности массы для самосогласованных гамильтоновых систем гравитирующих частиц приводит к следующим результатам:

– для бесстолкновительного газа нерелятивистских частиц (§ 7)

$$\sigma_m = m \int_{-L/2}^{L/2} n(x) dx = 6mn_0l; \quad (17.22)$$

с учетом того, что

$$l = \frac{2v_0}{\sqrt[3]{8\pi Gmn_0}} \quad (17.23)$$

(17.22) приводится к виду

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{2p_0}{\pi G}}, \quad (17.24)$$

где  $p_0 = n_0mv_0^2$  – давление частиц системы в плоскости  $x=0$ ;

– для бесстолкновительного газа релятивистских частиц (§ 7)

$$\sigma_{mp} = \sqrt{\frac{2p_0\gamma_0}{\pi G}} = \sigma_m \sqrt{\gamma_0}; \quad (17.25)$$

– для политропической системы гравитирующих частиц (§ 11) в случае политропного индекса  $n=1$

$$\sigma_m = 2mn_0L / \pi; \quad (17.26)$$

– для газа гравитирующих частиц постоянной температуры (§ 13)

$$\sigma_{mr} = \sqrt{\frac{2n_0kT}{\pi G}}. \quad (17.27)$$

Из соотношений (17.22) – (17.27) следует, что для всех рассмотренных гамильтоновых систем, состоящих из гравитирующих частиц, поверхностная плотность массы всегда конечна, не зависит от параметра состояния системы и определяется давлением частиц в плоскости  $x=0$ . Материалы данного параграфа частично изложены в [42].

### ЧАСТЬ 3. ВЕЩЕСТВО В САМОСОГЛАСОВАННОМ ПОЛЕ СО СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

#### ГЛАВА 1. СИСТЕМЫ С ОДНОРОДНОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ

##### § 18. Шаровой кластер гравитирующих частиц

**Уравнение равновесия.** Запишем уравнение (5.14), учитывая только радиальную зависимость потенциала:

$$\varphi'' + 2\varphi' / r = 4\pi Gmn_0 \exp(-m\varphi / kT), \quad (18.1)$$

где  $n_0 = \rho_0 / m$  – значение концентрации частиц системы на сфере нуля потенциала, а штрихи означают дифференцирование по  $r$ .

Покажем, что решения уравнения (18.1) описывают статические распределения потенциала в равновесных коллективно взаимодействующих кластерах гравитирующих частиц с однородной температурой, удерживаемых самосогласованным полем.

Переходя в (18.1) к функции  $\varphi(r) = -2kTy(x) / m$  относительно переменной  $x=r/R$ , где  $R$  – радиус сферы, на которой задаются граничные условия, приведем (18.1) к виду

$$xy'' + 2y' + \beta^2 x \exp(2y) = 0, \quad (18.2)$$

где

$$\beta^2 = \frac{2\pi Gm^2 n_0 R^2}{kT} = \frac{T_*}{T} \quad (18.3)$$

– параметр состояния рассматриваемой системы, а

$$T_* = \frac{2\pi Gm^2 n_0 R^2}{k} \quad (18.4)$$

– ее характеристическая температура (штрихи означают дифференцирование по  $x$ ).

Уравнение (18.2) принадлежит к классу уравнений типа уравнения Эмдена [5], описывающего изотермические распределения вещества в газовом шаре (1.63), и является его полевым аналогом. Как известно, оно не имеет точных решений в элементарных функциях для граничных условий  $y(0) = \lambda$ ;  $y'(0) = 0$ , представляющих физический интерес.

В § 13 было выяснено, что в плоских самосогласованных системах с постоянной температурой важную роль играет плоскость нулевого давления поля. В связи с этим будем искать приближенные решения (18.2) для граничных условий  $x = 1$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = 0$ , которые предполагают существование в кластере сферы нулевого давления поля.

Переходя к новой функции

$$y(x) = \eta(\xi) - \xi, \quad y' = \frac{d\xi}{dx} \left( \frac{d\eta}{d\xi} - 1 \right), \quad \text{где } \xi = \ln x,$$

получим уравнение

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \frac{d\eta}{d\xi} = 1 - \beta^2 \exp(2\eta) \quad (18.5)$$

с граничными условиями  $\xi=0, \eta(0)=0, \frac{d\eta}{d\xi}(0) = 1$ , которое допускает понижение порядка введением новой функции

$$p(\eta) = \frac{d\eta}{d\xi}; \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = p \frac{dp}{d\eta}.$$

Уравнение первого порядка

$$p \frac{dp}{d\eta} + p = 1 - \beta^2 \exp(2\eta) \quad (18.6)$$

имеет граничные условия  $\eta=0, p(0)=1$ .

Графическое представление численного решения уравнения (18.6) для семейства интегральных кривых, проходящих через точку  $\eta=0, p(0)=1$

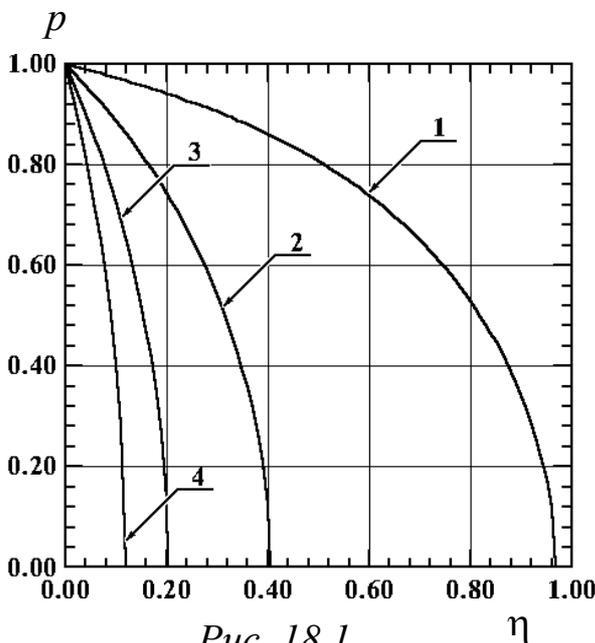


Рис. 18.1

и имеющих угол наклона в пределах  $-\infty < \frac{dp}{d\eta}(0) = -\beta^2 < 0$ , указывает на существование у этих кривых на оси  $\eta$  при  $\eta=\eta_* > 0$  особой точки, в которой  $p \rightarrow 0$ , а  $dp/d\eta \rightarrow -\infty$ .

На рис. 18.1 приведены четыре интегральные кривые. Кривая 1 построена для  $\beta=0,5$ ; кривая 2 – для  $\beta=1,0$ ; кривая 3 – для  $\beta=1,5$ ; кривая 4 – для  $\beta=2,0$ . Как видно из рис. 18.1, положение особой точки на оси  $\eta$  зависит от величины  $\beta^2$ . Для  $\beta^2 \ll 1$  она расположена далеко от начала координат и ее координаты  $\eta_*$  большие и положительные. Для значений  $\beta^2 \gg 1$  она близко подходит к началу координат справа. Это позволяет найти приближенное решение (18.6) при выполнении условия  $\beta^2 \gg 1$ .

Разрешим (18.6) относительно производной:

Разрешим (18.6) относительно производной:

$$\frac{dp}{d\eta} = \frac{1 - \beta^2 \exp(2\eta)}{p} - 1. \quad (18.7)$$

Оставляя в правой части (18.7) слагаемое порядка  $\beta^2$ , проинтегрируем это уравнение:

$$p = \sqrt{1 - \beta^2 [\exp(2\eta) - 1]}. \quad (18.8)$$

**Распределения физических величин.** Возвращаясь к функции  $\varphi(r)$ , получим закон распределения потенциала в рассматриваемом случае:

$$\frac{m\varphi}{2kT} = \ln \left[ \frac{\beta r}{R\sqrt{\beta^2 + 1}} \operatorname{ch}(A) \right], \quad (18.9)$$

где

$$A = \operatorname{Arch} \left( \frac{\sqrt{\beta^2 + 1}}{\beta} \right) - \ln \left( \frac{r}{R} \right) \sqrt{\beta^2 + 1}.$$

Выражение (18.9) позволяет получить в аналитическом виде основные гравидинамические и кинетические характеристики кластера для случая  $\beta^2 \gg 1$ . Проекция  $r$ -й компоненты напряженности самосогласованного поля находится из (18.9) и имеет вид

$$\frac{g_r}{g_0} = \frac{RB}{r}, \quad (18.10)$$

где

$$g_0 = \frac{2kT}{mR}; \quad B = \sqrt{\beta^2 + 1} \operatorname{th}(A) - 1.$$

Изменение концентрации и давления частиц в кластере:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{n}{n_0} = \left[ \frac{\beta r}{R\sqrt{\beta^2 + 1}} \operatorname{ch}(A) \right]^{-2}. \quad (18.11)$$

Распределение давления самосогласованного поля внутри кластера:

$$D = \frac{g_r^2}{8\pi G} = \frac{g_0^2 R^2 B^2}{8\pi G r^2}. \quad (18.12)$$

Проекция радиальной компоненты градиента давления частиц зависит от радиуса и имеет вид

$$\frac{dp}{dr} = \frac{2p_0 R^2 (\beta^2 + 1) B}{\beta^2 r^3 \operatorname{ch}^2(A)}. \quad (18.13)$$

Проекция радиальной компоненты градиента давления самосогласованного поля изменяется внутри кластера по закону

$$\frac{dD}{dr} = -\frac{g_0^2 R^2 B}{4\pi Gr^3} \left( \frac{\beta^2 + 1}{ch^2(A)} + B \right). \quad (18.14)$$

Как видно из соотношений (18.9) – (18.14), потенциал самосогласованного поля, создаваемый частицами кластера, представляет собой потенциальную яму с бесконечными стенками и с минимумом на сфере нулевого давления поля. Сфера нулевого давления поля делит все пространство взаимодействия кластера на две области – внутреннюю и внешнюю. Во внутренней области напряженность самосогласованного поля сонаправлена с радиус-вектором. В ней с ростом  $r$  потенциал убывает, а давление и концентрация частиц растут.

Во внешней области направление вектора напряженности поля противоположно направлению радиус-вектора. В ней с ростом  $r$  потенциал возрастает, а давление и концентрация частиц убывают. На границах внутренней и внешней областей концентрация частиц убывает плавно, в связи с чем резких границ у системы нет. При  $\beta^2 \gg 1$  внутри гравитационного кластера образуется полость, в которой вещество практически отсутствует.

**Поведение системы вблизи дна потенциальной ямы.** Для анализа поведения системы введем ось  $x$  с началом в точке  $r=R$  ( $r=R+x$ ), направленную по радиус-вектору. Разлагая (18.9) в ряд Тейлора по малому параметру  $x/R \ll 1$  с точностью до квадратичных членов, получим квадратичную зависимость потенциала в тонких слоях, прилежащих с двух сторон к сфере нулевого давления поля:

$$\varphi(x) \approx kT\beta^2 x^2 / (mR^2). \quad (18.15)$$

Проекция вектора напряженности самосогласованного поля при переходе через сферу  $x=0$  изменяет свой знак на противоположный:

$$g_x \approx -2kT\beta^2 x / (mR^2). \quad (18.16)$$

Давление частиц системы и давление поля в тонких слоях зависят от  $x$  по законам

$$p \approx p_0(1 - \beta^2 x^2 / R^2); \quad D \approx k^2 T^2 \beta^4 x^2 / (2\pi G m^2 R^4), \quad (18.17)$$

где  $p_0 = n_0 kT$ .

Проекции градиентов давления частиц и поля также изменяют свой знак при переходе через сферу  $x=0$  и имеют вид

$$\frac{dp}{dx} \approx -\frac{2p_0\beta^2 x}{R^2}; \quad \frac{dD}{dx} \approx \frac{k^2 T^2 \beta^4 x}{\pi G m^2 R^4}. \quad (18.18)$$

Из (18.15) – (18.18) с учетом (18.3) видно, что в тонких слоях, прилежащих к сфере нулевого давления поля, сумма давлений поля и частиц

остается положительной и неизменной, а градиенты давлений поля и частиц равны друг другу и противоположны по направлению.

Направления градиентов позволяют выяснить физический механизм удержания частиц кластера. Во внутренней и внешней областях кластера силы, стягивающие слой, сонаправлены с  $\mathbf{g}$ , а силы, создаваемые градиентом давления поля, направлены против  $\mathbf{g}$  и компенсируют силы, стягивающие слой [сравним с (5.3) и (5.8)]. Это приводит к тому, что основное количество гравитирующих частиц кластера удерживается полем вблизи сферы нулевого давления поля.

**Обсуждение результатов.** Параметр состояния (18.3) определяет основные свойства равновесия частиц кластера. Численное решение уравнения (18.2) показывает, что полость в системе существует только при холодных состояниях кластера, когда его температура значительно ниже характеристической ( $T \ll T_*$ ). При  $\beta^2 \ll 1$  состояния частиц в кластере следует охарактеризовать как горячие (их температура значительно выше характеристической). В этом случае полость исчезает и частицы занимают практически весь объем кластера.

На рис. 18.2 представлены результаты численного моделирования распределения давления и концентрации частиц шарового кластера с однородной температурой. Кривая 1 рассчитана для значения  $\beta=0,5$ ; кривая 2 – для  $\beta=0,7$ ; кривая 3 – для  $\beta=1,0$ ; кривая 4 – для  $\beta=3,0$ .

Из рис. 18.2 видно, как изменяется заполнение кластера частицами при изменении его температуры в окрестности значения  $T \sim T_*$ . Кривая 4 отображает существование полости, а кривые 3, 2, 1 указывают на тот факт, что при увеличении температуры все пространство взаимодействия кластера в основном заполнено частицами. Для всех кривых концентрация частиц в центре кластера обращается в нуль.

**Интегральные параметры кластера.** В реальных условиях энергия гравитирующих частиц, удерживаемых полевой ловушкой, заключена в ограниченном диапазоне значений. Это приводит к тому, что толщина сфе

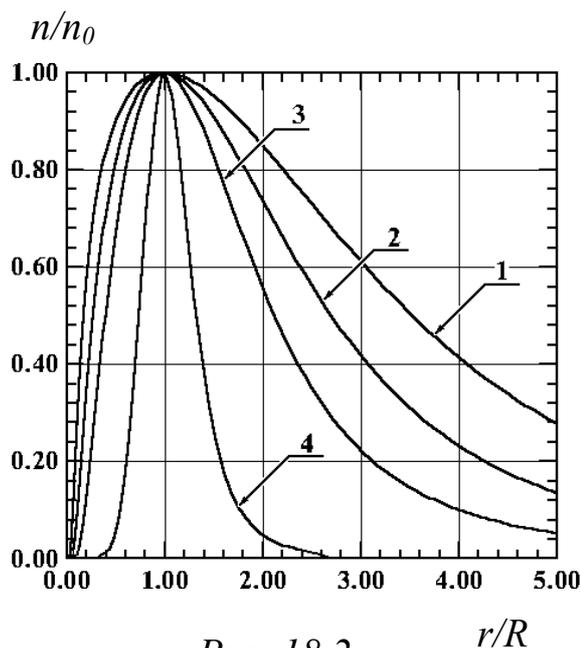


Рис. 18.2

рического слоя, занятого частицами, будет всегда конечна. В этом случае у гравитационного кластера образуются резкие границы.

Определим интегральные физические параметры кластера в предположении, что слой, занимаемый его частицами, тонкий и выполняются соотношения (18.15) – (18.18). Будем считать, что толщина слоя  $\delta = 2x$ , где  $x$  – расстояние, на которое отстоят резкие границы кластера от сферы нулевого давления поля, мала и выполняются условия  $x / R \ll 1$ ,  $\alpha^2 x^2 / R^2 \ll 1$ .

Полное число частиц, удерживаемых в кластере:

$$N = 8\pi R^2 n_0 x. \quad (18.19)$$

Энергия самосогласованного поля, заключенная в кластере:

$$W_f = \int_V \frac{g_r^2}{8\pi G} dV = \frac{W_0}{12} \left( \frac{x}{R} \right)^3, \quad (18.20)$$

где

$$W_0 = 64\pi^2 G m^2 n_0^2 R^5 \quad (18.21)$$

– масштаб энергии кластера.

Гравитационная энергия тонкого слоя частиц, сосредоточенных вблизи сферы нулевого давления поля (по аналогии с электростатикой), имеет вид

$$W_g = G \frac{M^2}{R} = G \frac{(Nm)^2}{R} = W_0 \left( \frac{x}{R} \right)^2. \quad (18.22)$$

Энергия взаимодействия частиц с самосогласованным полем

$$W_i = \int_V \phi \rho dV = \frac{W_0}{12} \left( \frac{x}{R} \right)^3 \quad (18.23)$$

в этом приближении совпадает с (18.20). Эта энергия аналогична энергии связи нуклонов в ядре, но имеет другой знак. Она увеличивает инертную массу кластера на величину  $\Delta m = W_i / c^2$ , поскольку всегда положительна.

Заметим, что применение интегральных теорем к рассмотренным равновесным состояниям гравитирующих частиц требует осторожности. При вычислении потока вектора напряженности самосогласованного поля, по теореме Гаусса, расположение замкнутой поверхности и ее размер должны быть такими, чтобы не было ее пересечения с поверхностью нулевого давления или границей пространства взаимодействия. Нельзя корректно вычислить поток через концентрическую сферу, расположенную в пространстве взаимодействия.

**Оценки.** В заключение сделаем оценки для ядерного состояния вещества (данные взяты из [43]). Для состоящего из нейтронов кластера с радиусом сферы нулевого давления поля  $R=5$  км,  $T=2,1 \cdot 10^6$  К,  $n_0=10^{42}$  м<sup>-3</sup> и  $x/R=10^{-3}$  получаем: характеристическая температура  $T^*=2,1 \cdot 10^9$  К,  $\beta^2=1,0 \cdot 10^3$ , следовательно, кластер холодный. Число нейтронов в кластере  $N=3,14 \cdot 10^{51}$ ; их суммарная масса  $M=5,25 \cdot 10^{24}$  кг; масштаб энергии  $W_0=3,7 \cdot 10^{41}$  Дж; давление частиц на сфере нулевого давления поля  $p_0=2,9 \cdot 10^{25}$  Па. Запасенная в кластере гравитационная энергия  $W_g=3,7 \cdot 10^{35}$  Дж. Энергия взаимодействия нейтронов с самосогласованным полем  $W_i=W_f=3,0 \cdot 10^{31}$  Дж увеличивает инертную массу кластера на величину  $\Delta m=W_i/c^2=3,3 \cdot 10^{14}$  кг. Физические параметры на границах кластера: потенциал  $\phi=1,73 \cdot 10^7$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>; напряженность поля  $g_x=-6,9 \cdot 10^6$  м/с<sup>2</sup>; давление поля  $D=2,9 \cdot 10^{22}$  Па; градиент давления поля  $\frac{dD}{dx}=1,2 \cdot 10^{22}$  Па/м; действующая на границы кластера и стремящаяся его стянуть сила  $F=p_0 4\pi R^2=9,1 \cdot 10^{33}$  Н.

## § 19. Шаровой кластер одноименных зарядов

Решения уравнения (6.14) для различных геометрий интенсивно изучались в начале века в работах Ричардсона, Шоттки и Лауэ (см. § 2) [9–11]. Исследователи предполагали, что эти уравнения описывают распределение электронов в приповерхностной области сильно нагретых металлических тел. К этому же выводу склонялся и Френкель [8]. Самым существенным результатом этих работ было понимание того факта, что термоэлектроны в состоянии равновесия образуют тонкий слой, толщина которого зависит от температуры. Из полученных теоретических результатов следовала физика явления: эмитирующие электроны удерживаются полем зарядов “изображения” противоположного знака, которые остаются в металле.

Как следует из изложенного выше (замечание на с. 37 в § 2), в уравнение (6.14) входят только макроскопические поля, создаваемые коллективом взаимодействующих зарядов. Коррект-

ный расчет распределения термоэлектронов вблизи эмитирующей поверхности обязательно должен учитывать влияние неоднородных полей, создаваемых зарядами “изображения”.

Эти поля оказываются внешними по отношению к самосогласованному полю термоэлектронов, и их действие на функцию распределения в уравнении (6.14) никак не проявляется.

Покажем, что решения уравнения (6.14), учитывающего радиальную зависимость потенциала, описывают статическое распределение потенциала в равновесных коллективно взаимодействующих скоплениях одноименных зарядов со сферической симметрией. Взаимодействие зарядов происходит в вакууме при отсутствии каких-либо электродов. Исследуемые скопления удерживаются самосогласованным полем, вследствие чего они локализованы в пространстве для любых значений их абсолютной температуры. В дальнейшем эти скопления будем называть кластерами.

**Уравнение равновесия.** Переходя в (6.14) к функции  $\varphi(r) = -2kTy(x) / q$  относительно переменной  $x=r/R$ , где  $R$  – радиус сферы, на которой задаются граничные условия, приведем радиальное уравнение к виду

$$xy'' + 2y' = \alpha^2 x \exp(2y), \quad (19.1)$$

где

$$\alpha^2 = \frac{2\pi q^2 n_0 R^2}{kT} = \frac{T_*}{T} \quad (19.2)$$

– параметр состояния системы с однородной температурой;

$$T_* = \frac{2\pi q^2 n_0 R^2}{k} \quad (19.3)$$

– ее характеристическая температура, а штрихом обозначено дифференцирование по  $x$ . Здесь учтено, что  $\rho_0 = qn_0$ , где  $n_0$  – концентрация на сфере нуля потенциала. Уравнение (19.1) отличается от  $E$ –уравнения Эмдена [5] знаком правой части, что указывает на замену сил притяжения между гравитирующими частицами силами кулоновского отталкивания зарядов. Как известно, уравнение (19.1) не имеет точных аналитических решений в элементарных функциях, представляющих физический интерес.

Будем искать приближенные решения (19.1) для граничных условий  $x=1, y(1)=0, y'(1) = 0$ , которые предполагают существование сферы нулевого давления поля. Переходя к новой функции

$$y(x) = \eta(\xi) - \xi, \quad y' = \frac{d\xi}{dx} \left( \frac{d\eta}{d\xi} - 1 \right), \quad \text{где } \xi = \ln x,$$

получим уравнение

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \frac{d\eta}{d\xi} = 1 + \alpha^2 \exp(2\eta) \quad (19.4)$$

с граничными условиями  $\xi=0, \eta(0)=0, \frac{d\eta}{d\xi}(0) = 1$ , которое допускает понижение порядка. Вводя функцию

$$p(\eta) = \frac{d\eta}{d\xi}; \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = p \frac{dp}{d\eta},$$

придем к уравнению первого порядка

$$p \frac{dp}{d\eta} + p = 1 + \alpha^2 \exp(2\eta) \quad (19.5)$$

с граничными условиями  $\eta=0, p(0)=1$ .

Численное решение (19.5) для пучка интегральных кривых, проходящих через точку  $\eta=0, p(0)=1$  и имеющих угол наклона в пределах  $0 < \frac{dp}{d\eta}(0) = \alpha^2 < \infty$ , указывает на

существование у этих кривых на оси  $\eta$  при  $\eta=\eta_* < 0$  особой точки, в которой  $p \rightarrow 0$ , а  $p' \rightarrow \infty$ . На рис. 19.1 приведены четыре интегральные кривые. Кривая 1 построена для  $\alpha=0,5$ ; кривая 2 – для  $\alpha=1,0$ ; кривая 3 – для  $\alpha=1,5$ ; кривая 4 – для  $\alpha=2$ . Как видно из рис. 19.1, положение особой точки  $\eta_*$  на оси  $\eta$  зависит от величины  $\alpha^2$ . Для малых  $\alpha^2 \ll 1$  она далека от начала координат и значения ее координаты  $\eta_*$  большие и отрицательные. Для  $\alpha^2 \gg 1$  она близко приближается к началу координат слева.

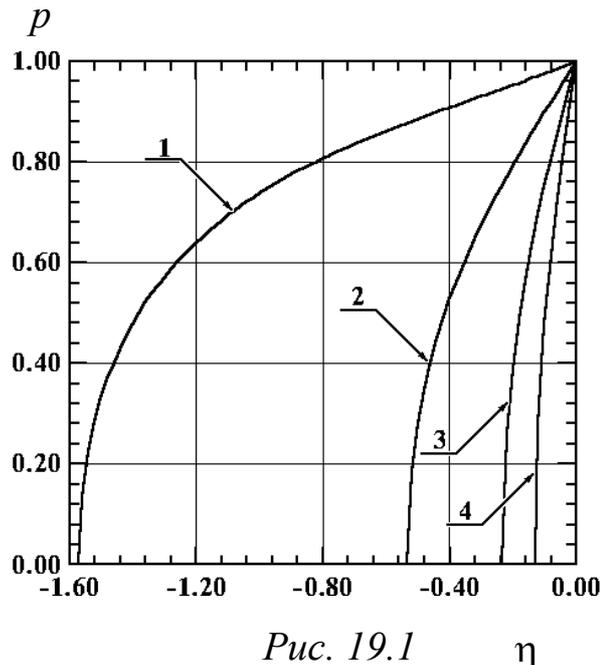


Рис. 19.1  $\eta$

Это позволяет найти приближенное решение (19.5) в элементарных функциях при выполнении условия  $\alpha^2 \gg 1$ . Разрешим (19.5) относительно производной

$$\frac{dp}{d\eta} = \frac{1 + \alpha^2 \exp(2\eta)}{p} - 1. \quad (19.6)$$

Оставляя в правой части (19.6) слагаемое порядка  $\alpha^2$ , приведем уравнение к виду

$$\frac{dp}{d\eta} = \frac{\alpha^2 \exp(2\eta)}{p}. \quad (19.7)$$

Интегрируя (19.7), получим

$$p = \sqrt{1 + \alpha^2 [\exp(2\eta) - 1]}. \quad (19.8)$$

Из (19.8) видно, что особая точка имеет координаты  $p=0$ ,  $\eta_* = [\ln(1 - \alpha^{-2})] / 2 < 0$ . Совершая переход к  $\eta=\eta(\xi)$ , получим

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{1 + \alpha^2 [\exp(2\eta) - 1]}} = \xi + \xi_0, \quad (19.9)$$

где  $\xi_0$  – постоянная, определяемая из граничных условий. Интегрируя (19.9), получим

$$\eta = -\ln \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \sin \left[ \arcsin \left( \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} \right) - \xi \sqrt{\alpha^2 - 1} \right] \right\}. \quad (19.10)$$

**Распределения физических величин.** Возвращаясь к функции  $y(x)$ , а затем к  $\varphi(r)$ , получим закон распределения потенциала в рассматриваемой системе для случая  $\alpha^2 \gg 1$ :

$$\frac{q\varphi}{2kT} = \ln \left[ \frac{\alpha r}{R \sqrt{\alpha^2 - 1}} \sin(A) \right], \quad (19.11)$$

где

$$A = \arcsin \left( \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha^2} \right) - \ln \left( \frac{r}{R} \right) \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

Нули синуса в решении (19.11) дают асимптоты, которые и являются границами пространства взаимодействия кластера. Граница внутренней сферы:

$$\ln \frac{r_1}{R} = \left[ \arcsin \left( \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} \right) - \pi \right] / \sqrt{\alpha^2 - 1}. \quad (19.12)$$

Граница внешней сферы ( $r_2 > r_1$ ):

$$\ln \frac{r_2}{R} = \left[ \arcsin \left( \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} \right) \right] / \sqrt{\alpha^2 - 1}. \quad (19.13)$$

Определим зависимость толщины сферического слоя взаимодействия зарядов кластера  $d=r_2 - r_1$  от параметра  $\alpha$  :

$$d = R \exp \left\{ \left[ \arcsin \left( \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} \right) \right] / \sqrt{\alpha^2 - 1} \right\} \left[ 1 - \exp \left( - \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \right) \right]. \quad (19.14)$$

Разлагая экспоненты в ряд по малому параметру  $\frac{1}{\alpha}$  с точностью до малых величин первого порядка, получим зависимость толщины слоя взаимодействия зарядов кластера от температуры:

$$d \approx \frac{\pi R}{\alpha} = \frac{1}{q} \sqrt{\frac{\pi k T}{2 n_0}}. \quad (19.15)$$

Результат сравнения (19.15) с соотношением для длины пространства взаимодействия при высокотемпературном состоянии самосогласованной гамильтоновой системы одноименных зарядов (14.48) показывает, что толщина слоя кластера больше длины пространства взаимодействия ровно в два раза.

Полученные формулы (19.11) – (19.15) позволяют получить аналитические выражения основных электродинамических и кинетических характеристик кластера для случая  $\alpha^2 \gg 1$  [44,45]. Проекция  $r$ -й компоненты напряженности самосогласованного поля зависит от радиуса, находится из (19.11) и имеет вид

$$\frac{E_r}{E_0} = \frac{RB}{r}, \quad (19.16)$$

где

$$E_0 = \frac{2kT}{qR}, \quad B = \sqrt{\alpha^2 - 1} \operatorname{ctg}(A) - 1.$$

Изменение концентрации и давления зарядов в кластере:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{n}{n_0} = \left[ \frac{\alpha r}{R \sqrt{\alpha^2 - 1}} \sin(A) \right]^{-2}. \quad (19.17)$$

Распределение давления самосогласованного поля внутри кластера:

$$D = \frac{E_r^2}{8\pi} = \frac{E_0^2 R^2 B^2}{8\pi r^2}. \quad (19.18)$$

Проекция радиальной компоненты градиента давления зарядов зависит от радиуса и имеет вид

$$\frac{dp}{dr} = \frac{2 p_0 R^2 (\alpha^2 - 1) B}{\alpha^2 r^3 \sin^2(A)}. \quad (19.19)$$

Проекция радиальной компоненты градиента давления поля изменяется в кластере по закону

$$\frac{dD}{dr} = \frac{2E_0^2 R^2 B}{8\pi r^3} \left( \frac{\alpha^2 - 1}{\sin^2(A)} - B \right). \quad (19.20)$$

Как видно из соотношений (19.11) – (19.20), потенциал самосогласованного поля, создаваемого положительными зарядами кластера, отрицателен во всем пространстве и имеет максимум на сфере нулевого давления поля. Сфера нулевого давления поля делит все пространство взаимодействия кластера на две области: внутреннюю и внешнюю. Направление вектора напряженности во внутренней области противоположно направлению радиус-вектора. В ней с ростом  $r$  отрицательный потенциал растет, а плотность и давление зарядов системы убывают. Во внешней области направление вектора напряженности совпадает с направлением радиус-вектора. В ней с ростом  $r$  отрицательный потенциал убывает, а давление и плотность зарядов растут.

**Поведение системы вблизи асимптот.** Исследуем поведение электродинамических и кинетических характеристик системы вблизи ее асимптот. Введем координату  $x \geq 0$ , направленную по радиус-вектору, начало которой приходится на радиус внутренней асимптоты  $r_1$ :

$$r = r_1 + x.$$

Предполагая, что  $x \ll r_1$ , разложим функцию  $f(r) = \sin(A)$  в (19.11) в точке  $r = r_1$  в ряд Тейлора по малому параметру  $\frac{x}{r_1}$ :

$$f(r) \approx \frac{x}{r_1} \sqrt{\alpha^2 - 1}. \quad (19.21)$$

Подставляя (19.21) в (19.11), получим, что потенциал в тонком слое, прилежащем к полости, обладает логарифмической особенностью

$$\frac{q\phi}{2kT} \approx \ln\left(\frac{\alpha x}{R}\right). \quad (19.22)$$

Вектор напряженности самосогласованного поля направлен против оси  $x$  в этой области:

$$E_x \approx -\frac{2kT}{qx}, \quad (19.23)$$

и имеет особенность  $x^{-1}$ . Давление зарядов системы имеет особенность  $x^{-2}$ :

$$p \approx \frac{n_0 k T R^2}{\alpha^2 x^2}. \quad (19.24)$$

Давление поля в тонком слое имеет такую же особенность:

$$D = \frac{E_x^2}{8\pi} \approx \frac{k^2 T^2}{2\pi q^2 x^2}. \quad (19.25)$$

Градиент давления зарядов кластера

$$\frac{dp}{dx} \approx -\frac{2n_0 k T R^2}{\alpha^2 x^3} \quad (19.26)$$

и градиент давления поля

$$\frac{dD}{dx} \approx -\frac{k^2 T^2}{\pi q^2 x^3} \quad (19.27)$$

обладают особенностью  $x^{-3}$ .

Введем координату  $x \geq 0$ , направленную против радиус-вектора, начало которой приходится на радиус внешней асимптоты  $r_2$ :  $r=r_2-x$ . Предполагая, что  $x \ll r_2$ , разложим  $f(r) = \sin(A)$  в (19.11) в точке  $r=r_2$  в

ряд Тейлора по малому параметру  $\frac{x}{r_2}$ :

$$f(r) \approx \frac{x}{r_2} \sqrt{\alpha^2 - 1}. \quad (19.28)$$

Подставляя (19.28) в (19.11), приходим к соотношению (19.22). Заметим, что если ось  $x$  направить по радиус-вектору, а ее начало совместить с  $r=R$ , то, используя разложение по малому параметру  $x/R \ll 1$ , можно показать, что в тонких слоях кластера, прилежащих с двух сторон к сфере нулевого давления поля, разность давлений поля и зарядов отрицательна и постоянна, а градиенты давлений поля и зарядов равны между собой. В этом проявляется принципиальное отличие сферической симметрии от плоской, в которой градиенты давлений поля и зарядов равны между собой в произвольной плоскости, взятой внутри пространства взаимодействия.

Соотношения (19.24) – (19.27) позволяют установить физические причины удержания одноименных зарядов в ограниченной области пространства. С учетом (19.3) в тонком слое, прилежащем к полости кластера, и в тонком слое, прилежащем к внешней сфере, законы изменения давления поля и зарядов, а также изменение градиентов давления поля и зарядов попарно одинаковы. Направления градиентов позволяют выяснить физический механизм удержания зарядов кластера.

Во внутренней и внешней областях силы, расширяющие слой, сонаправлены с  $\mathbf{E}$  [см. (6.3)], а силы, создаваемые градиентом давления поля, взятым с противоположным знаком, направлены против  $\mathbf{E}$  и компенсируют расширяющие силы [см. (6.8)]. Это приводит к тому, что результи

рующее распределение зарядов в системе устанавливается таким, что их основная часть удерживается полем у границ системы.

**Обсуждение результатов.** Параметр состояния  $\alpha^2$  определяет основные свойства равновесия зарядов кластера. Численное решение уравнения (19.1) показывает, что полость в системе существует для любых значений ее абсолютной температуры. При  $\alpha^2 \ll 1$  радиус полости  $r_1$  становится малым по сравнению с радиусом  $R$ . Вследствие этого в “горячем” кластере заряды заполняют практически весь его объем. В противоположном случае, когда  $\alpha^2 \gg 1$  (“холодные” состояния кластера), радиус полости приближается к внешнему радиусу системы и оба они мало отличаются от значения  $R$ .

На рис. 19.2 представлены результаты моделирования распределения давления и концентрации зарядов шарового кластера с однородной температурой. Кривая 1 рассчитана для значения  $\alpha=0,5$ ; кривая 2 – для  $\alpha=0,7$ ; кривая 3 – для  $\alpha=1,0$ ; кривая 4 – для  $\alpha=3,0$ . Из рис. 19.2 видно, как изменяется заполнение кластера зарядами при температуре, близкой к характеристической. Кривая 4 указывает на существование полости, а кривые 3,2,1 – на то, что с ростом температуры внутренняя асимптота системы перемещается все ближе к центру кластера.

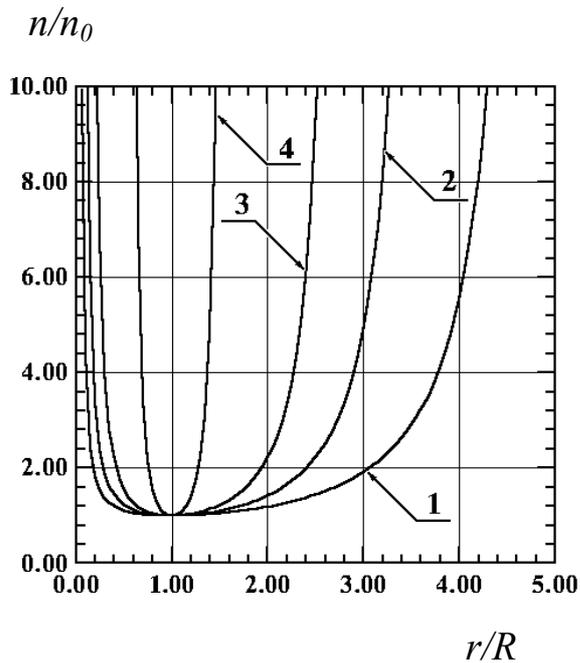


Рис. 19.2

В реальных условиях энергия зарядов, удерживаемых полевой ловушкой, заключена в ограниченном диапазоне значений. Это приводит к тому, что толщина сферического слоя, занятого зарядами, будет всегда меньше толщины слоя пространства взаимодействия кластера. В этом случае у него образуются резкие границы. На этот факт указывают и ре

полный заряд системы, находящийся во всем пространстве взаимодействия, принимает бесконечные значения из-за расходимости интегралов, с помощью которых вычисляется заряд, на асимптотах системы. Существование особенностей указывает на то, что пространство взаимодействия может содержать внутри себя бесконечный заряд.

зультаты экспериментов по неупругому взаимодействию зарядовых кластеров с поверхностью металла [2].

**Интегральные параметры кластера.** Определим количество зарядов, находящихся во внутренней и внешней областях кластера. Поскольку наибольший вклад в их число дает особенность, существующая на асимптотах  $r_1$  и  $r_2$  при  $x \rightarrow 0$ , то для внутренней области можно записать:

$$N_0 = \frac{Q_0}{q} = \frac{1}{q} \int_{r_1}^R \rho(r) 4\pi r^2 dr, \quad (19.29)$$

где  $r$  изменяется в пределах  $r_1 < r < R$ . В качестве зависимости  $\rho(r)$  возьмем приближенную, существующую вблизи асимптот [следует из (19.24)] зависимость  $\rho(r) = \rho_0 R^2 / (\alpha x)^2$ . Как и ранее,  $x$  – координата, направленная по радиус-вектору с началом в  $r_1$ , связана с  $r$  соотношением  $x = r - r_1$ . Переходя в (19.29) к переменной  $x$  и интегрируя, получаем

$$N_0 = \frac{4\pi R^2 \rho_0}{q\alpha^2} \int_x^{x_1} \frac{(r_1 + x)^2 dx}{x^2} \approx \frac{4\pi R^2 \rho_0 r_1^2}{q\alpha^2 x}, \quad (19.30)$$

где  $x_1 = R - r_1$ . После интегрирования сохраняются слагаемые, имеющие особенность  $x^{-1}$ , что возможно при выполнении условия  $x \ll x_1$ .

Аналогично вычислим число зарядов во внешней области (координата  $x$  направлена против радиус-вектора с началом в  $r_2$ , и условие  $x \ll x_2 = r_2 - R$  считаем выполненным). Тогда полное число зарядов кластера дается соотношением

$$N \approx \frac{4\pi R^2 \rho_0}{q\alpha^2 x} (r_1^2 + r_2^2) \approx \frac{8\pi R^4 \rho_0}{q\alpha^2 x} = \frac{4R^2 kT}{q^2 x} \quad (19.31)$$

и не зависит от  $n_0$ .

Таким же образом и в тех же приближениях рассчитаем энергию самосогласованного поля, заключенную в зарядовом кластере:

$$W_f = \int_V \frac{E_r^2(r)}{8\pi} dV \approx \frac{2k^2 T^2}{q^2 x} (r_1^2 + r_2^2) \approx \frac{4k^2 T^2 R^2}{q^2 x} = NkT, \quad (19.32)$$

которая с точностью до постоянной совпадает с тепловой энергией зарядов кластера  $U = 3W_f / 2$ . При выводе (19.32) в качестве  $E_r(r)$  была взята приближенная зависимость (19.23).

Энергия тонкого слоя зарядов, сосредоточенных вблизи сферы нулевого давления поля, имеет вид

$$W_e = \frac{Q^2}{2R} = \frac{8R^3 k^2 T^2}{q^2 x^2} = \frac{2RW_f}{x}. \quad (19.33)$$

Энергию взаимодействия зарядов с самосогласованным полем вычислим в тех же приближениях, что и интеграл в (19.31):

$$W_i = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV \approx W_f \left[ 1 + \ln \left( \frac{\alpha x}{R} \right) \right]. \quad (19.34)$$

Эта энергия в рассматриваемых системах представляет собой аналог энергии связи нуклонов в ядре. Для системы из зарядов одного знака она всегда отрицательна и уменьшает инертную массу кластера.

Методика расчета физических параметров кластеров, находящихся в холодных состояниях, заключается в следующем. Вначале задают значения четырех исходных параметров:  $\rho_0$  – минимальное значение плотности зарядов на сфере нулевого давления,  $R$  – радиус сферы нулевого давления поля,  $T$  – температуру системы,  $x$  – расстояние, на которое отстоят границы кластера от границ внешней и внутренней сфер слоя взаимодействия. Затем по соотношениям (19.22) – (19.34) определяют остальные параметры кластера.

**Оценки.** Приведем оценки физических параметров зарядовых кластеров, состоящих из электронов. Для кластера с радиусом сферы нулевого давления поля  $R=15$  мкм,  $T=2 \cdot 10^3$  К,  $\rho_0=16$  Кл/м<sup>3</sup> и  $x/R=10^{-6}$  получаем: характеристическая температура  $T_*=2,4 \cdot 10^6$  К,  $\alpha^2=1,2 \cdot 10^3$ , следовательно, кластер холодный. Радиус внутренней сферы слоя взаимодействия  $r_1=14,3$  мкм, радиус внешней сферы  $r_2=15,7$  мкм, толщина слоя взаимодействия  $d=1,35$  мкм, объем слоя взаимодействия  $V_0=4\pi R^2 d=3,8 \cdot 10^{-15}$  м<sup>3</sup>. Количество зарядов в кластере  $N=7,1 \cdot 10^9$ , полный заряд  $Q=1,1 \cdot 10^{-9}$  Кл, суммарная масса зарядов кластера  $M=6,5 \cdot 10^{-21}$  кг. Запасенная в кластере электрическая энергия  $W_e=3,6 \cdot 10^{-4}$  Дж. Тепловая энергия зарядов в кластере  $U=3 \cdot 10^{-10}$  Дж. Заключенная в кластере энергия самосогласованного поля  $W_f=2 \cdot 10^{-10}$  Дж. Энергия взаимодействия зарядов с самосогласованным полем  $W_i=-1,8 \cdot 10^{-9}$  Дж. Инертная масса кластера уменьшается на величину  $m=W_i/c^2=-2,0 \cdot 10^{-26}$  кг. Средняя концентрация зарядов в слое  $n_f=N/V_0=1,87 \cdot 10^{24}$  м<sup>-3</sup>, средняя концентрация зарядов во внешней сфере  $\langle n \rangle=5,0 \cdot 10^{23}$  м<sup>-3</sup>. Физические параметры на границах кластера: концентрация  $n_b=8,2 \cdot 10^{28}$  м<sup>-3</sup>; потенциал  $\varphi=-3,5$  В; напряженность поля  $E_x=-2,3 \cdot 10^{10}$  В/м; давление поля и зарядов  $D=p=2,3 \cdot 10^9$  Па; градиент давления поля и зарядов  $dD/dx = dp/dx=-3 \cdot 10^{20}$  Па/м; сила, действующая на границах кластера и стремящаяся его расширить,  $F=-p4\pi(r_1+x)^2 \approx p4\pi R^2=6,5$  Н.

Для кластера радиусом  $R=0,1$  м,  $T=6 \cdot 10^3$  К,  $\rho_0=16$  Кл/м<sup>3</sup> и  $x/R=10^{-8}$  получаем:  $T_*=1,0 \cdot 10^{14}$  К,  $\alpha^2=1,7 \cdot 10^{10}$ , следовательно, кластер холодный.

Радиус  $r_1=9,99988 \cdot 10^{-2}$  м,  $r_2=1,000012 \cdot 10^{-1}$  м,  $d=2,4$  мкм, объем  $V_0=0,3$  см<sup>3</sup>. Количество зарядов в кластере  $N=1,5 \cdot 10^{16}$ , полный заряд  $Q=2,4$  мКл, масса  $M=1,4 \cdot 10^{-14}$  кг. Электрическая энергия  $W_e=2,6 \cdot 10^5$  Дж. Тепловая энергия  $U=1,9 \cdot 10^{-3}$  Дж. Энергия поля  $W_f=1,2 \cdot 10^{-3}$  Дж. Энергия взаимодействия зарядов с самосогласованным полем  $W_i=-6,8 \cdot 10^{-3}$  Дж. Инертная масса кластера уменьшается на величину  $m=W_i/c^2=-7,5 \cdot 10^{-20}$  кг. Средняя концентрация зарядов в слое  $n_i=5 \cdot 10^{22}$  м<sup>-3</sup>, средняя концентрация во внешней сфере  $\langle n \rangle = 3N/(4\pi R^3) = 3,6 \cdot 10^{18}$  м<sup>-3</sup>. Физические параметры на границах кластера: концентрация  $n_b=5,9 \cdot 10^{25}$  м<sup>-3</sup>; потенциал  $\phi = -6,9$  В; напряженность поля  $E_x = -1,04 \cdot 10^9$  В/м; давление поля и зарядов  $D=p=4,8 \cdot 10^6$  Па; градиент давления поля и зарядов  $dD/dx = dp/dx = -9,6 \cdot 10^{15}$  Па/м; сила, действующая на его границу,  $F=6 \cdot 10^5$  Н.

Из оценок можно сделать следующие выводы. Первый кластер имеет характерные параметры, реализующиеся в экспериментах [2] при их генерации с острейшего катода, имеющего температуру  $T=2 \cdot 10^3$  К. Характерными его особенностями являются: количество зарядов в кластере приближается к верхней границе значений, полученных в эксперименте; имея малые размеры он обладает большой электрической, тепловой и полевой энергией; возникающее изменение массы кластера эквивалентно энергии  $1,1 \cdot 10^{10}$  эВ; концентрация зарядов на границе оказывается выше средней концентрации электронов твердого тела, в результате чего кластер проявляет твердость алмазного абразива, наблюдаемую в эксперименте.

Второй кластер имеет характерные параметры, которые могут осуществиться в шаровой молнии (ШМ) с высокой температурой. Если такой кластер и есть «каркас» вещества, из которого состоит ШМ, то она представляет собой тонкостенный пузырь из зарядов с толщиной стенок порядка микрометров. При изменении  $x/R$  в диапазоне от  $10^{-8}$  до  $10^{-6}$  ее заряд изменяется в пределах от  $Q_1=24 \cdot 10^{-6}$  Кл до  $Q_2=2,4 \cdot 10^{-3}$  Кл. Для этого же диапазона суммарная масса ее зарядов изменяется в пределах от  $M_1=1,4 \cdot 10^{-16}$  кг до  $M_2=1,4 \cdot 10^{-14}$  кг и она оказывается чрезвычайно легкой. Такие ШМ обладают электрической энергией  $W_e$ , лежащей в диапазоне от 26 до  $2,6 \cdot 10^5$  Дж, который совпадает с наблюдаемым [57]. Величина силы, действующая на их границах, лежит в диапазоне от 60 до  $6 \cdot 10^5$  Н и дает представление о порядках сил полевого происхождения, удерживающих систему в равновесии. Уменьшение инертной массы ШМ существенно и эквивалентно энергии взаимодействия, лежащей в диапазоне от  $0,75 \cdot 10^{14}$  до  $4,2 \cdot 10^{16}$  эВ. Концентрация электронов на их границах лежит в диапазо

не от  $5,9 \cdot 10^{21}$  до  $5,9 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$  и для этих энергий меньше, чем средняя концентрация электронов у твердого тела.

Оценки позволяют предположить, что проявление известных свойств ШМ может быть связано с электрическими и упругими свойствами зарядовых кластеров [44,45], которые возникают на неоднородностях атмосферы при прохождении линейной молнии. После возникновения кластера движущиеся в нем заряды начинают излучать электромагнитные волны, нагревая прилегающие к нему участки атмосферы. Необратимые потери энергии кластера на излучение всегда гарантируют его распад.

Применение интегральных теорем к рассмотренным равновесным состояниям зарядов требует осторожности. При вычислении потока вектора напряженности самосогласованного поля по теореме Гаусса расположение замкнутой поверхности и ее размеры должны быть такими, чтобы не было пересечения замкнутой поверхности с поверхностью нулевого давления или границей пространства взаимодействия. Нельзя корректно вычислить поток через концентрическую сферу, расположенную в пространстве взаимодействия.

В заключение оценим физические параметры ядра, которое состоит из одних протонов (либо из одних электронов), удерживаемых самосогласованным полем.

Для кластера радиусом  $R=4 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ ,  $T=3 \cdot 10^2 \text{ К}$ ,  $\rho_0=1,6 \cdot 10^{21} \text{ Кл/м}^3$  и  $x/R=3 \cdot 10^{-8}$  получаем: характеристическая температура  $T_*=1,7 \cdot 10^7 \text{ К}$ ,  $\alpha^2=5,7 \cdot 10^4$ , следовательно, кластер холодный. Радиус внутренней сферы слоя взаимодействия  $r_1=3,974 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ , радиус внешней сферы  $r_2=4,026 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ , толщина слоя взаимодействия  $d=5,24 \cdot 10^{-17} \text{ м}$ , объем слоя взаимодействия  $V_0=4\pi R^2 d=1,05 \cdot 10^{-44} \text{ м}^3$ . Количество зарядов в кластере  $N=9$ , полный заряд  $Q=1,44 \cdot 10^{-18} \text{ Кл}$ , суммарная масса зарядов кластера  $M=6,5 \cdot 10^{-21} \text{ кг}$  (для протонов), и  $M=8,2 \cdot 10^{-30} \text{ кг}$  (для электронов). Запасенная в кластере электрическая энергия  $W_e=2,33 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}$ . Тепловая энергия зарядов в кластере  $U=5,6 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$ . Заключение в кластере энергия самосогласованного поля  $W_f=4 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$ .

Энергия взаимодействия зарядов с самосогласованным полем  $W_i = -4,2 \cdot 10^{-19}$  Дж = -2,6 эВ. Инертная масса кластера практически не уменьшается. Средняя концентрация зарядов в слое  $n_i = N/V_0 = 8,57 \cdot 10^{44}$  м<sup>-3</sup>, средняя концентрация во внешней сфере  $\langle n \rangle = 3N/(4\pi R^3) = 3,4 \cdot 10^{43}$  м<sup>-3</sup> порядка ядерной. Физические параметры на границах кластера: концентрация  $n_b = 1,92 \cdot 10^{50}$  м<sup>-3</sup> на шесть порядков превышает ядерную; потенциал  $\phi = -0,61$  В; напряженность поля  $E_x = -4,3 \cdot 10^{20}$  В/м; давление поля и зарядов  $D=p=9,1 \cdot 10^{44}$  Па; градиент давления поля и зарядов  $\frac{dD}{dx} = \frac{dp}{dx} = -1,5 \cdot 10^{67}$  Па/м; действующая на границах кластера и стремящаяся его расширить сила  $F = p4\pi(r_1+x)^2 \approx p4\pi R^2 = 1,8 \cdot 10^{17}$  Н.

Сделанные оценки позволяют указать на возможность существования безнейтронных ядер и ядер, состоящих из одних электронов, которые могут стать автономным прототипом куперовских пар.

Результаты, представленные в § 19, обсуждались на конференциях [46,47].

## § 20. Неупругое взаимодействие зарядового кластера с плоской поверхностью

Неупругое столкновение шарового зарядового кластера большой энергии с поверхностью металла оставляет на нем характерный кратер. Этот кратер, хорошо видимый под электронным микроскопом, и натолкнул Шоулдерса на догадку о существовании зарядового кластера [2].

**Функция распределения осевших зарядов.** Для сопоставления полученных результатов с результатами эксперимента рассчитаем распределение зарядов кластера после удара о плоскую поверхность. Расчеты проведем при следующих упрощающих предположениях: распределение концентрации зарядов в объеме кластера однородное; во время удара выполняется закон сохранения зарядов; направление движения кластера перед ударом перпендикулярно плоскости, на которую оседает заряд.

Тогда преобразование концентрации зарядов  $n$  в поверхностную плотность  $\sigma$  найдем из следующих соображений. В центре верхней половины полого шара с радиусами  $r_2 > r_1$  расположим начало координат с ориентацией: оси  $x, y$  лежат в экваториальной плоскости, а ось  $z$  перпендикулярна ей. Координаты точек, лежащих на сферах верх

ней половины, удовлетворяют уравнениям  $x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = r_2^2$ . Координаты точек радиус-вектора  $\rho$ , лежащего в экваториальной плоскости, связаны соотношением  $x^2 + y^2 = \rho^2$ . Используя приведенные соотношения, найдем границы изменения координаты  $z$  при условии, что  $\rho < r_1$ :  $z_1 = \sqrt{r_1^2 - \rho^2}$ ,  $z_2 = \sqrt{r_2^2 - \rho^2}$ .

Тогда в области нахождения зарядов элементарный объем  $dV$ , вырезаемый цилиндрической трубкой радиусом  $\rho$  и толщиной  $d\rho$ , связан с элементарной площадью поверхности  $dS = 2\pi\rho d\rho$ , на которую оседает заряд (см. рис. 20.1), соотношением

$$dV = \left( \sqrt{r_2^2 - \rho^2} - \sqrt{r_1^2 - \rho^2} \right) dS. \quad (20.1)$$

В (20.1) учтено, что распределение зарядов в цилиндрической трубке не зависит от угла  $\varphi$ .

Из закона сохранения следует, что элементарное число зарядов, находящихся в  $dV$ , после удара равно их количеству на  $dS$ :  $ndV = \sigma(\rho)dS$ , откуда искомая функция распределения имеет вид

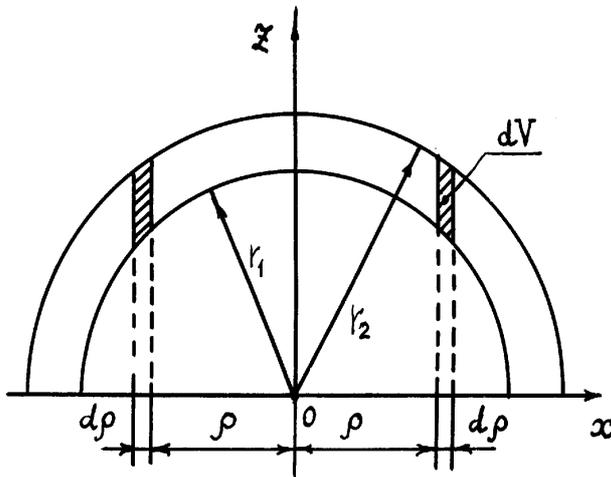


Рис. 20.1

$$\sigma(\rho) = 2n \left( \sqrt{r_2^2 - \rho^2} - \sqrt{r_1^2 - \rho^2} \right). \quad (20.2)$$

В (20.2) учтены заряды нижней половины шара. Разделим (20.2) на минимальное значение в центре  $\sigma(0) = 2n(r_2 - r_1)$  и введем безразмерные величины  $\eta = r_1 / r_2$  и  $\chi = \rho / r_1$ :

$$\sigma_n = \sigma(\rho) / \sigma(0) = \frac{\sqrt{1 - \eta^2 \chi^2} - \eta \sqrt{1 - \chi^2}}{1 - \eta} \quad \text{при } 0 \leq \chi \leq 1. \quad (20.3)$$

При  $r_1 \leq \rho \leq r_2$  аналогичные вычисления дают

$$\sigma_n = \sqrt{1 - \eta^2 \chi^2} / (1 - \eta) \quad \text{при } 1 \leq \chi \leq 1 / \eta. \quad (20.4)$$

Построенные из соотношений (20.3) и (20.4) распределения поверхностной плотности заряда, осевшего на поверхность, представлены на рис. 20.2 в диапазоне значений, близких к экспериментальным. Кривая 1 построена для  $\eta=0,8$ , кривая 2 – для  $\eta=0,84$ , а кривая 3 – для

$\eta=0,88$ . Из рис. 20.2 видно, что поверхностная плотность осевших зарядов имеет большую радиальную неоднородность в области  $\chi \sim 1$ .

После неупругого удара о поверхность зарядовый кластер оставляет на ней проплавленный след. Если кластер горячий, то след от удара представляет собой застывшую после расплава площадку круговой формы, граница которой окаймлена выдавленным при расплаве веществом. Распределение расплавленного вещества похоже на распределение поверхностной плотности осевшего заряда, концентрация которого однородна по всему объему шара. Оно следует из (20.2) при

$$z_1=0, \quad r_2=r :$$

$$\sigma_0(\rho) = \sigma_0(0)\sqrt{1 - \rho^2 / r^2}, \text{ где}$$

$$\sigma_0(0) = 2nr, \text{ а } r - \text{ внешний}$$

радиус кластера. Радиус проплава  $\rho_{\text{п}}$  связан с критическим значением  $\sigma_k$ , выше которого вещество начинает плавиться, вследствие чего  $\rho_{\text{п}} < r$ . Центральные слои прогреваются больше, в связи с чем возможно выдавливание жидкого вещества на границу области.

Если кластер холодный, то он оставляет на металле

след – характерный кратер, представленный на рис. 20.3 (снимок взят из [2]). В этом случае проплавление поверхности титана возникает только по краям кратера. Это указывает на то, что критическое значение  $\sigma_k$  попадает в интервал от  $\sigma(0)$  до наибольшего значения  $\sigma_{\eta} = \sigma(0)\sqrt{(1 + \eta) / (1 - \eta)}$  в распределениях (20.3), (20.4).

**Оценки и сравнения результатов.** Оценим нижний диапазон количества электронов в кластере. Сопоставление теории и эксперимента проведем для значения  $\sigma_k = 0,6\sigma_{\eta}$ . На увеличенном снимке (рис. 20.3) были найдены средние радиусы внутренней поверхности проплава  $\rho_1 = 12,7$  мкм, внешней поверхности проплава  $\rho_2 = 14,5$  мкм и толщина его слоя  $\Delta = 1,80$  мкм. Полагаем, что  $\eta = r_1/r_2 \approx \rho_1/\rho_2 = 0,876$ , тогда  $A = \sigma_k/\sigma(0) \approx 2,33$ . Из (20.4)  $\chi_2 = \rho_2 / r_1 = \sqrt{1 - (1 - \eta^2)A^2} / \eta = 1,09$ ;  $r_1 = \rho_2/\chi_2 = 13,3$  мкм – радиус

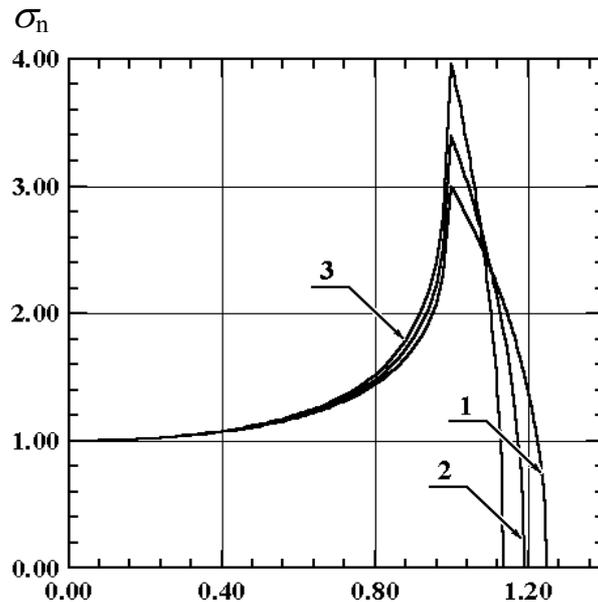
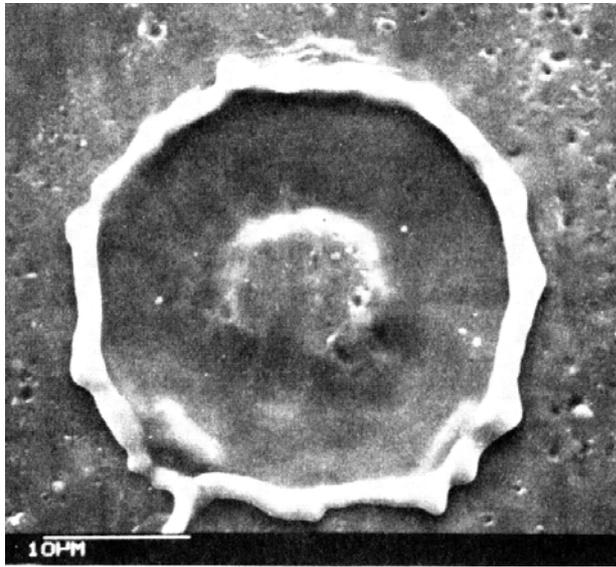


Рис. 20.2 χ

внутренней асимптоты кластера;  $r_2 = r_1/\eta = 15,2$  мкм – радиус его внешней асимптоты. Вычисляя параметр  $\chi_1 = \rho_1 / r_1$  и подставляя его в (20.3), получим практически то же самое значение  $A$ .

Радиус сферы нулевого давления поля  $R=(r_1+r_2)/2 \approx 14,2$  мкм, а  $d=r_2 - r_1 \approx 1,90$  мкм. Параметр состояния системы  $\alpha = \pi R / d \approx 23,5$  находим из (17.15). Поскольку  $\alpha^2 \gg 1$ , то выполнено приближение холодного кластера. Для температуры кластера, равной температуре катода  $T = 2 \cdot 10^3$  К, характеристическая температура  $T_* = \alpha^2 T = 1,1 \cdot 10^6$  К, концентрация  $n_0 = 5,2 \cdot 10^{19}$  м<sup>-3</sup>.

Массу вещества проплава вычисляем в предположении, что глубина и ширина проплава титана одинаковы:



$m = 2\rho_t \pi r_1 \Delta^2 = 12 \cdot 10^{-13}$  кг для  $\rho_t = 4,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. На нагрев и плавление слоя ушла энергия  $Q \approx 1,5 \cdot 10^{-6}$  Дж. При расчетах взято среднее значение  $c_p = 603$  Дж/(кг·К) в диапазоне температур от 250 до 1500 К и значение  $\lambda = 3,1 \cdot 10^5$  Дж/кг [48]. Если считать, что на тепловыделение уходит от 5 до 15% кинетической энергии кластера, ускоренного напряжением 10 кВ, то он содержит электроны в диапазоне

от  $N_1 \sim 6,2 \cdot 10^9$  до  $N_2 \sim 1,9 \cdot 10^{10}$ , что приближается к верхней границе значений, полученных в эксперименте [2].

Соотношения (17.31) – (17.34) позволяют рассчитать дополнительные физические параметры исследуемого кластера ( $x/R=10^{-6}$ ). При количестве зарядов  $N_2$  полный заряд системы  $Q=3 \cdot 10^{-9}$  Кл, масса зарядов кластера  $M=1,7 \cdot 10^{-20}$  кг, электрическая энергия, запасенная в кластере  $W_e = 2,8 \cdot 10^{-3}$  Дж. Энергия самосогласованного поля кластера  $W_f=5 \cdot 10^{-10}$  Дж. Внутренняя энергия  $U=7,5 \cdot 10^{-10}$  Дж. Энергия взаимодействия зарядов с полем  $W_i = -4,8 \cdot 10^{-9}$  Дж. Инертная масса уменьшена на величину  $m = -5,3 \cdot 10^{-26}$  кг. Средняя концентрация зарядов в слое  $n_f=4 \cdot 10^{24}$  м<sup>-3</sup>.

Оценим порядок величин на границах кластера. Для значения  $N_2$  получим: концентрация зарядов  $n_b=6,9 \cdot 10^{29}$  м<sup>-3</sup> на порядок превы

шает концентрацию электронов твердого тела; потенциал  $\varphi = -4,0$  В; напряженность поля  $E_x = -6,5 \cdot 10^7$  кВ/м; давление поля и зарядов  $D = p = 1,9 \cdot 10^{11}$  Па; градиент давления поля и зарядов  $dD / dx = -7,2 \cdot 10^{23}$  Па/м; действующая на границы кластера и стремящаяся его расширить сила  $F = pS = p4\pi R^2 = 480$  Н.

Полученные значения указывают на хорошее совпадение результатов теории с результатами экспериментов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованные механизмы удержания вещества самосогласованным полем предоставляют большие возможности для уточнения пределов применимости известных экспериментальных результатов, их теоретического объяснения, а в некоторых случаях и их физической адекватности.

Одним из важных теоретических результатов следует считать существование в сферическом случае внутренней атмосферы зарядов, концентрация которых возрастет с приближением к центру системы. Такая атмосфера будет образовываться внутри тонкостенной металлической сферы, несущей отрицательный избыточный заряд. Ее высота в зависимости от величины накопленного заряда, температуры и радиуса может изменяться в пределах от тысячных долей до сотен микрон.

Возникший слой зарядов, имеющий высокую концентрацию, обладает свойствами металла и должен хорошо отражать когерентное излучение. Чувствительность интерференционных методов, в которых используется длина волны света видимого диапазона, достаточна для измерения зависимости высоты внутренней атмосферы от сообщенного сфере заряда.

Шаровые зарядовые кластеры, излучающие свет, наблюдались в экспериментах, в которых исследовалось протекание токов большой величины в различных средах, уже давно [49 – 65]. В обзоре [66] указывается на то, что первые светящиеся шары были обнаружены при мощном разряде, возникшем при исследовании физических свойств лейденской банки. Долгоживущие светящиеся объекты типа шаровых зарядовых кластеров были обнаружены при протекании больших токов в жидкости [67].

Известны опыты, которые проводились в Московском радиотехническом институте (но, к сожалению, не опубликованные) по выводу сильнооточного цилиндрического электронного пучка в газовую атмосферу. На выходе ускорителя пучок зарядов при взаимодействии с атмосферой превращался в светящиеся шары, имеющие время жизни, достаточное для их визуализации. Обнаруженный в монографии механизм удержания зарядов позволяет объяснить статические состояния светящихся шаров, возникающих в любых средах, с единой точки зрения и считать их появление естественным следствием коллективного взаимодействия зарядов.

Статическая атмосфера избыточных зарядов существует не только на сферической поверхности. Она будет образована и при электризации цилиндрического проводника. Законы распределения потенциала и зарядов в такой атмосфере будут определяться самосогласованными уравнениями с цилиндрической симметрией.

Если такой однородный проводник подключить к источнику ЭДС, то в нем возникнет постоянный ток. При этом на поверхности проводника обязательно появится атмосфера избыточных зарядов. Принято считать, что эти заряды неподвижны, поскольку они являются источниками электрического поля, которое существует внутри проводника и обеспечивает протекание постоянного тока [1].

На наш взгляд, постоянный ток в любом проводнике состоит из двух взаимодействующих между собой составляющих: тока проводимости, текущего внутри проводника, и тока избыточных зарядов, текущего по поверхности проводника. С точки зрения проводимости подвижности их носителей сильно отличаются.

Введение понятия “поверхностный ток избыточных зарядов” позволяет предложить некантовое объяснение известному явлению автоэлектронной эмиссии. При комнатных температурах в прикатодной области вакуумного диода всегда существует атмосфера избыточных зарядов. Вклад в эту атмосферу вносит небольшое количество термоэлектронов и заряды, которые появляются в случае приложения внешнего ускоряющего электрического поля.

Повышение напряжения между катодом и анодом приводит к увеличению высоты атмосферы зарядов, обусловленному двумя факторами: во-первых, количество избыточных зарядов растет из-за поддержания возникающего тока смещения; во-вторых, на систему зарядов, удерживаемую самосогласованным полем, накладывается внешнее электростатическое поле и в системе возникает упругая деформация высоты атмосферы (см. § 16).

При некотором пороговом значении напряженности внешнего поля высота атмосферы увеличится до значения, равного расстоянию между катодом и анодом (оно предполагается большим по сравнению с первоначальной высотой атмосферы). В момент соприкосновения атмосферы с анодом в диоде должно скачкообразно возникнуть ток. Как известно, в квантовой модели автоэлектронной эмиссии пороговых значений напряженности и скачков тока не существует.

Последовательная физическая теория коллективного взаимодействия частиц и зарядов, уточняющая известные гравитационные и

электрические явления, обязательно приведет к прогрессу в понимании разнообразных физических эффектов и созданию новых тонких технологий, которыми будет управлять.

В теоретическом плане необходимо: продолжить исследование свойств гравитационных и электрических самосогласованных полей бесстолкновительных трехмерных систем и систем со столкновениями в неплоских симметриях (сферическая, цилиндрическая); учесть излучение в упомянутых системах; частичную компенсацию заряда в зарядовых кластерах; выяснить влияние внешних полей на характеристики системы; сформулировать динамику удержания вещества переменным самосогласованным полем; рассмотреть кинетические и квантовые эффекты; получить тонкую структуру функции распределения поверхностной плотности частиц после неупругого взаимодействия гравитационного кластера с плоской поверхностью и др.

На очереди стоит также создание теории возникновения зарядового кластера на остром катоде. Это позволит уйти от полуинтуитивных экспериментов, описанных в патентах Шоулдерса (см. приложение), и создать устройства генерации зарядового кластера с заранее известными физическими параметрами (диаметр, толщина слоя, концентрация зарядов на его поверхности, накопленный заряд, время жизни и т.д.). Только на этом пути можно ожидать появления кластеров, содержащих заряд в диапазоне от  $10^{-6}$  до  $10^{-3}$  Кл. Это позволит приблизиться к значениям заряда, который, по нашему мнению, может быть накоплен шаровой молнией, а стало быть, к реальной возможности ее искусственного воспроизведения.

С одной стороны, развитие технологии генерации кластеров может помочь в формировании новых энергетических капсул с ограниченным, но управляемым временем жизни. Их уникальные физические свойства предоставляют большие возможности для создания экологически чистых двигателей, которые будут построены на новых физических принципах (введение специальных условий заставит взрываться кластер до высвечивания через одно и то же время после его зарождения). С другой стороны, эта же технология может привести к созданию различных видов “гуманного” оружия, в случае применения которого будут использоваться в качестве поражающего фактора шаровые молнии с малым электрическим зарядом, вызывающим кратковременную потерю боеспособности человека.

Существует еще одна область, в которой применение зарядовых кластеров сулит большие выгоды (патенты Шоулдерса). Это создание

прямопролетных генераторов СВЧ, в которых расплывающиеся сгруппированные сгустки электронов будут заменены зарядовыми кластерами. Реализация этих идей должна привести к появлению совершенно нового класса устройств и приборов СВЧ, выходная мощность которых будет значительно превышать мощность современных клистронов, ламп бегущей и обратной волны. Взрывы невысвеченного кластера могут быть использованы для генерации гамма-квантов.

Наибольшие теоретические и экспериментальные усилия, по нашему мнению, следует приложить к постановке и решению задач нелинейного взаимодействия зарядовых кластеров со стенкой металлического резонатора, в которой возникает заряд изображения. Этот очень перспективный путь поможет понять физику работы устройств, систем и явлений, в которых отсутствуют привычные законы сохранения энергии [68].

Открытие свойств упругой деформации толщины атмосферы избыточных зарядов, чувствительных к изменению градиента температуры (см. § 16) позволит создать генераторы СВЧ-колебаний на основе нового физического принципа. Вакуумный диод в режиме отсутствия тока, должен обладать свойствами генератора. Помещенный в резонатор, частота которого рассчитана на частоту колебаний высоты атмосферы избыточных зарядов, он будет генерировать колебания, частота которых зависит от градиента температуры на катоде и внешнего электрического поля. Особенно привлекательна реализация этих принципов с точки зрения проектирования и создания нового поколения твердотельных приборов вакуумной электроники микронных размеров, появившихся в последнее десятилетие.

Как известно [2], кластер, у которого концентрация электронов на границе превышает концентрацию электронов в твердом теле, не имея кристаллической решетки, обладает твердостью алмазного абразива. Он способен рассверливать короткие каналы в твердых телах и пробивать отверстия в микронных пленках. Получение тонкой структуры функции распределения поверхностной плотности зарядов кластера, осевших на плоскую поверхность кристалла, позволит формировать кратеры с определенным рельефом, что может представлять интерес для современных технологий микронных и субмикронных размеров.

Еще одна технология, предлагаемая Шоулдерсом, позволяет обнаружить принципиально новый класс ядерных превращений и реакций, в которых в качестве налетающих “ядер” применяется поток за

рядовых кластеров большой энергии. Как показали его последние эксперименты [69 – 70], в мишени возникает новый класс низкоэнергетических кластерных ядерных реакций, в некоторых случаях приводящих к появлению новых веществ, которых не было в мишени. Это направление исследований Шоулдерс считает исключительно перспективным, поскольку изучение таких ядерных превращений позволит применить их для уменьшения радиоактивности нуклидов и использовать его на благо человечества при утилизации ядерных отходов.

К этому направлению исследований можно добавить еще одно: поиск новых типов кластеров, имеющих размеры порядка ядерных. Их следует искать на пути создания и анализа взаимодействия ядер, состоящих из одних протонов (либо из одних электронов, обобщенного аналога куперовских пар, объясняющих явление сверхпроводимости), на возможность существования которого указывает теория. Как показывают оценки для их генерации необходимы энергии, соизмеримые со значением энергии в один электронвольт. Кроме того, уменьшение размеров зарядового кластера до ядерных должно привести к резкому увеличению его времени жизни. Это связано с тем, что в таких системах уже будут наблюдаться квантовые свойства обычных ядер.

В заключение хочу выразить свою глубокую признательность и благодарность всем тем, без чьей конкретной помощи книга не увидела бы свет: заведующему кафедрой физики профессору Захарову А.Г., научному консультанту профессору Малышеву В.А., декану ЕГФ Василовскому В.В., декану ФЭП профессору Коноплеву Б.Г., доценту кафедры физики Куповых Г.В., редактору Маныч Э.И., Пекарю В.Я., Ивановым В.М. и Е.А., а также всем родным и близким, которые своими усилиями и поддержкой помогли мне ее закончить.

Таганрог, 10 августа 2000 г.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Результаты экспериментов Шоулдерса опубликованы в его монографии [2], которую не только в России, но и в США невозможно найти ни в одной библиотеке. Для того чтобы читатель мог иметь хоть какое-то собственное представление об этих опытах, мы решили включить в приложение перевод редакционной статьи Роберта Нельсона [71], опубликованной в журнале “Бесконечная энергия” (вып. 18, 1998\*).

В списке литературы, начиная со ссылки [69], приводятся ссылки на работы по современным исследованиям зарядовых кластеров (независимые эксперименты и альтернативные подходы в теории за период времени с июля 1989 года по август 1999 года, список не претендует на полноту).

### **Ken Shoulders' Electrum Validum**

*Edited by Robert Nelson*

Infinite Energy \* issue 18, 1998

Кеннет Шоулдерс получил 5 патентов США за открытие и разработку способов генерации скопления зарядов высокой плотности (СЗВП). Шоулдерс описывает СЗВП как “относительно дискретное, автономное, отрицательно заряженное, обладающее высокой плотностью состояние материи (группа электронов, которая образуется при приложении сильного электрического поля между катодом и анодом). Он дал ей название “Electrum Validum” (EV), что означает “сильный электрон”, от греческого “elektron” (электрический заряд) и латинского “valere” (быть сильным, обладающим способностью к соединению).

Кен Шоулдерс полагает, что “сильные электроны” перемещаются в электромагнитном сосуде (потенциальной яме) глубиной около 2 кВ. Электромагнитное поле притягивает некоторое количество ионов, которые придают EV массу. Удержание электронов в обычном пучке происходит благодаря внешнему электростатическому или магнитному полю, так как электроны отталкивают друг друга. Хотя EV представляет собой дискретный сгусток электронов, для него более свойственно устанавливать связь с другими объектами и распадаться при отсутствии такой воз

---

\* Перевод выполнен Сапунцовой Н.Н. и отредактирован Сапогиной Л.К.

возможности. EV можно рассматривать как атом без ядра или сферический осциллятор одноименных зарядов. EVs проявляют свойства уединенных волн с количеством уплотнений, равным числу Авогадро. Эти заряженные электронные сгустки обладают различными значениями энергии связи, которая превышает аналогичные в атомах, что допускает протекание новых типов ядерных реакций в веществе.

Диаметр EV относительно мал (около 0,1 мкм) и имеет высокий отрицательный заряд (обычно приблизительно  $10^{11}$  электронов, минимум  $10^8$ ). Существует верхний предел концентрации ионов: 1 положительный ион на 100 000 электронов. Под воздействием приложенного поля EVs приобретают скорости порядка 1/10 скорости света. Хотя наиболее часто встречаемая структура EV на квантовом уровне имеет диаметр приблизительно 1 мкм, наблюдались EVs диаметром порядка 1/10 мкм.

Вероятнее всего EV – сфероид, но может иметь тороидальную форму и обладать тонкой структурой. Одиночный EV наблюдается редко. Сфероиды имеют тенденцию образовывать замкнутые цепочки – квазистабильные, кольцеобразные структуры диаметром порядка 20 мкм (рис. П1). Хотя они не являются вихревыми или нитевидными (волоконистыми) структурами, такие кольца могут образовывать цепи колец, которые свободно вращаются и переплетаются друг с другом.

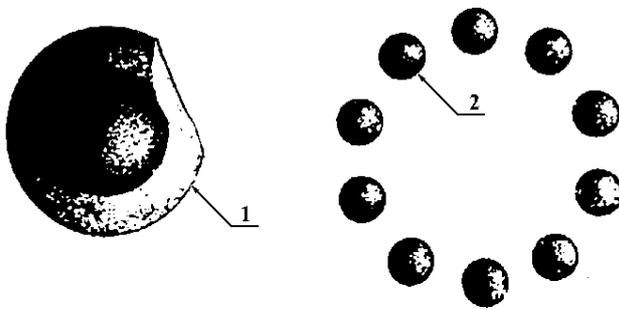


Рис. П1. 1 – Электрум Валидум  
2 – цепочка Электрум Валидум

Расстояние между сфероидами EV в цепочке приблизительно равно диаметру отдельных сфероидов. Цепи EV имеют хаотичную форму в момент возникновения на катоде, но далее они сами автоматически перестраиваются в кольца. Шоулдерс “не имеет в виду, что их преобразование действительно происходит в виде раскручивания, скорее, узлы сложной конфигурации как-

ким-то образом перемещаются”. Цепочки EV сталкиваются с поверхностью без вращения, сдвига или перекоса.

EVs можно обнаружить в высоковольтных электрических разрядах (молнии, искры и т.д.), но в этой форме они не имеют практического применения. Шоулдерс говорит, что “EV формируется и распространяется в сторону анода в случае, когда постоянный ток или импульсное напряжение достигают величины, при которой полевая эмиссия начинает

ускорение переходного процесса, поддерживаемое испарением металла с эмиттерной площадки катода. Этот процесс происходит постоянно (100% времени)».

Патенты Шоулдерса описывают устройства для распространения, выделения, отбора и управления EVs, разработанные таким образом, чтобы можно было извлечь из этих процессов тепловую, электрическую и другие виды энергий. Для практического использования траектория движения EVs может быть изменена по направлению или протяженности при помощи камеры, осциллографа или индикаторной панели.

Устройства Шоулдерса, генерирующие EV, обладают качествами, превосходящими любые другие устройства.

Другой патент предлагает способ утилизации ядерных отходов при помощи EVs. Это бесценное применение разработанной технологии: оно станет основой новой огромной индустрии, значение которой для человечества и планеты невозможно оценить.

EV может быть сгенерирован на конце острия электрода в случае приложения большого отрицательного напряжения на катоде (2 – 10 кВ). Пластина диэлектрика (предпочтительно из плавленного кварца или алюминия обычно толщиной 0,024 см) помещается между эмиттером (катодом) и коллектором (анодом) (рис. П2, П3).

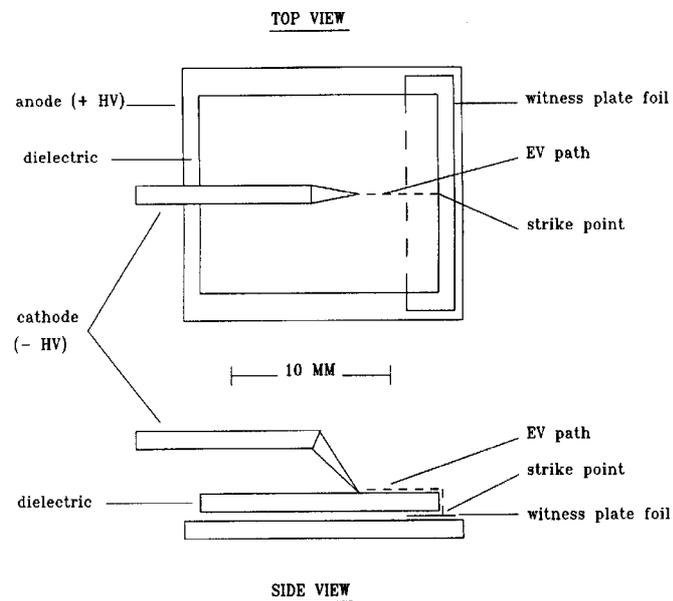


Рис. П2. Генератор EV

EV излучает вспышку света при прохождении вдоль поверхности диэлектрика и передает диэлектрику локализованный поверхностный заряд. До момента рассеяния своего заряда он породит другой EV, следующий по иной траектории. Для фиксации этого процесса устанавливается пластина из металлической фольги. При попадании EVs в фольгу на ней будут видны следы значительных повреждений от их ударов. Фольга, таким образом, служит для определения наличия и местонахождения EVs, даже если они невидимы (черные EVs).

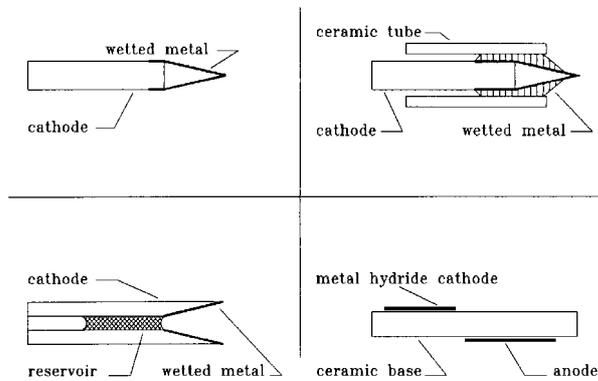


Рис. ПЗ. Источники EV

Величина тока анода может изменяться от 1 до 6 А. Шоулдерс обнаружил, что уровень тока анода величиной в 1 А рождает цепочку из 3 – 5 сфероидов EV, чей общий диаметр составляет около 3 мкм. Для того, чтобы напряжение не возрастало и не отклоняло EV, необходимо использовать достаточно низкое нагрузочное сопротивление. Для импульса в 2 кВ возможно увеличение напряжения на аноде не более чем до 500 В. Скорость нарастания напряжения очень велика, и для измерения напряжения требуется широкополосный осциллограф. В противном случае необходима емкостная нагрузка для EV. Существует верхний предел диаметра EV или предельное значение тока, которое может быть достигнуто на острие любого провода конкретного размера.

Обычно генератор EVs имеет длину около 10 мм, но генерация и управление EVs может осуществляться конструкцией, имеющей и меньшие размеры (порядка 10 мкм). Материалы, используемые для создания генератора, должны быть очень прочными, чтобы противостоять высокой энергии EVs. Генератор также может иметь форму трубки и быть сконструированным для работы в вакууме или в газовой атмосфере. В системе высокого вакуума расстояние между катодом и анодом должно быть менее 1 мм для возникновения заряда при напряжении 2 кВ. В газовой атмосфере при давлении в несколько тор расстояние между электродами может быть более 60 см, если расположить вокруг трубки или за ней экранирующую плоскость.

Длительность подаваемого отрицательного импульса может изменяться от нескольких наносекунд до постоянного тока, не оказывая влия

ния на генерацию EV. Стандартный резистор помещается между источником импульсного напряжения и генератором EV, а для наблюдения за напряжением используется осциллограф. Ток рассчитывается, исходя из величины сопротивления и скачка напряжения. Условия формирования импульса большой длительности в газовой атмосфере требуют подключения входного резистора для предотвращения длительного тлеющего разряда в трубке. Разряд легко гасится в условиях низкого давления или вакуума. Например, при периодичности импульса 0,1 мкс наиболее удобно использовать резистор номиналом от 500 – 1500 Ом для работы как в режиме вакуума, так и в газовой атмосфере.

Формирование EV – очень быстрое явление, которое невозможно четко наблюдать на обычном осциллографе; все, что видно в этом случае, – это возмущение (помеха) и небольшой скачок длительностью в несколько наносекунд. Кен Шоулдерс разработал “пикоскоп”, который функционирует как осциллограф в режиме реального времени и измеряет форму колебаний с разрешением  $10^{-13}$  с.

Катод может быть изготовлен из меди или других материалов (Ag, Ni, Al и пр.). Он должен быть либо остrokонечным, либо заточенным так, чтобы на острие могла возникнуть высокая напряженность электрического поля. Однако рассеяние энергии при образовании EV разрушает острие катода, и его необходимо восстанавливать. Восстановление можно производить при помощи такого жидкого проводника, как, например, ртуть. Вместо ртути также можно использовать неметаллические проводники (то есть глицерин, легированный иодидом калия, или нитроглицерин, легированный азотной кислотой и т.д.). Частота импульсов напряжения, приложенного к катоду, должна быть достаточно низкой, для того, чтобы была возможной миграция жидкого проводника.

Катод также может быть встроен в паз выполненного на диэлектрической основе волновода. Такой катод может быть сделан из металлической пасты, вплавленной в алюминиевую базу. Предпочтительнее использование молибдена, так как серебро или медь сильно растворяются в ртути, чтобы их можно было использовать в пленочной схеме. Расположение катода в поверхностном слое делает возможным распространение EVs уже при напряжении 500 В и со значительно большей частотой повторения импульсов.

Если срез катода представляет собой острый угол, то EV могут возникать в зазоре между катодом и диэлектрическим волноводом. В условиях низкого давления (т.е. наполнение Hg или Xe при давлении  $10^{-2}$  тор)

ускорителем EV можно управлять с помощью импульса напряжения, который подают на катод уменьшенным до 200 В. Если размеры деталей сведены к минимуму (то есть толщина диэлектрической базы 1 мкм), EV могут появляться при разности потенциалов между анодом и катодом менее чем 100 В (рис. П4).

При нагревании катода, покрытого жидким проводником, появляются парообразные продукты, которые формируют облако положительных ионов и увеличивают генерацию EVs. Тем не менее эти пары считаются загрязнителями, которые необходимо отделять от EVs. Это делается при помощи тонкой туннельной диэлектрической прокладки, которая удерживает загрязняющие вещества, в то время как EVs проходят в направлении анода.

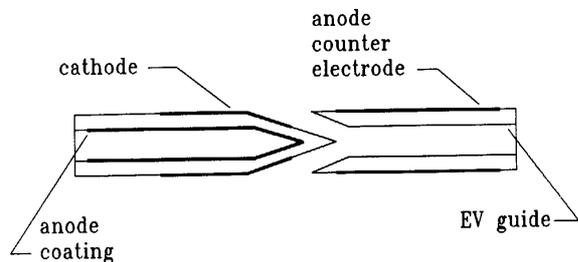


Рис. П4. Ускоритель EV

контрэлектроде и ноль на аноде.

Если разделительный туннель состоит из полупроводникового материала, сам туннель может служить контрэлектродом.

EVs имеют тенденцию следовать особенностям тонкой структуры поверхности, таким, как поверхностные царапины и неровности. Таким образом, перемещением EVs можно управлять при помощи гладкого паза или пересечения двух диэлектрических поверхностей или плоскостей, расположенных под углом менее чем  $180^\circ$ . Необходимо, чтобы ширина и глубина паза составляла всего несколько микрон. Направляющий эффект паза может быть усилен цилиндрическим диэлектрическим волноводом (в форме трубки) с внешним контрэлектродом или с экранирующей плоскостью. В отличие от канала волновода, который может иметь очень малые размеры (до 20 мкм в диаметре), EVs по размеру не ограничиваются.

Если диаметр первого EV больше, чем диаметр канала, то EV высверлит для себя более широкий канал. Перемещение следующих за ним EVs никаких повреждений каналу не причинит. Поперечное движение

Разделитель содержит контрэлектрод, расположенный на внешней стороне туннеля и имеющий положительный потенциал относительно катода. Анод положительно заряжен относительно контрэлектрода. Типичные значения напряжения находятся в следующем диапазоне: 4 кВ на катоде, 2 кВ на

EVs по поверхности диэлектрика вызывает синхронизацию их траекторий в противофазе. Поперечным перемещением EV по поверхности диэлектрика можно управлять, если поместить на противоположной стороне диэлектрика положительно заряженную экранирующую плоскость или контрэлектрод. Используя RC (резистивно-емкостной) и LC (индуктивно-емкостной) волноводы можно также изменять направление перемещения EV.

Введение газовой среды облегчает управление движением EVs. Особенно эффективно использование ртути и ксенона. При низком давлении (обычно  $10^{-3} - 10^{-2}$  тор) цепочка EV слегка поднимается над диэлектрической поверхностью и более не воздействует на нее разрушительно. Эффективность прохождения соответственно возрастает, и EV может перемещаться дальше между электродами. Поверхностный заряд рассеивается после того, как EV распространяется в газовой среде. Если импульсы подаются при полном отсутствии газа в канале и анод находится на большом расстоянии от воздействия приложенного напряжения, EV не образуются. Данное состояние носит название “факела” (рис. П5).

При более высоком давлении EVs удаляются от диэлектрической

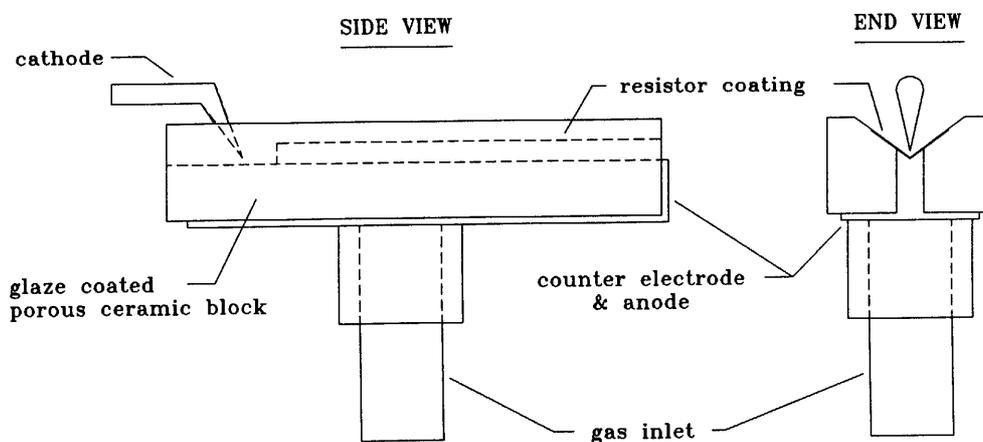


Рис. П5. Газонаполненный волновод для EV

поверхности, на которой образуется упругая газовая прокладка, изменяющая направление движения EVs. Паз волновода и контрэлектрод создают градиент давления газа, определяемый формой паза, который помогает управлять перемещением EVs. Помимо этого, внутренняя поверхность паза волновода может быть покрыта оболочкой из резистивного материала, чтобы обеспечить подавление поверхностного заряда.

Когда EVs перемещаются через газовую атмосферу, которая изолирует влияние РС-волновода, они сопровождаются видимым потоком частиц (стримером). Перед появлением стримера возникает узкий пучок света, возможно, из-за ионизации газа потоком EVs. Этот пучок света, появляющийся вначале, может отклоняться предметами, а EV и его стример последуют за пучком. Это свойство делает возможным использование оптических зеркальных волноводов для наблюдения за EVs.

Зеркала должны быть выполнены из материала с высокой диэлектрической проницаемостью и хорошей отражающей способностью в области ультрафиолетовых лучей. Требуется, чтобы их размер по грани был только несколько микрометров.

Когда EV приближается к любому элементу замкнутого контура, он изменяет потенциал этого элемента так, что его взаимодействие с EV ослабляется. Индуктивные элементы очень восприимчивы к этому эффекту, в связи с чем они могут быть использованы для создания LC-волноводов.

Формы LC-волноводов могут быть различны (например, пластинчатые планарные конструкции или четырехполюсные контуры, в которых отсутствует зеркальное отображение заряда, и др.).

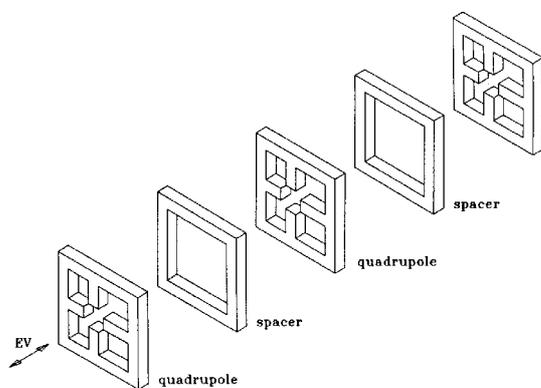


Рис. П6. Четырехполюсный контур LC волновода для EV

Полюсы должны быть расположены на расстоянии четверти длины волны на частоте аппроксимации EV. Это определяется скоростью движения EV и расстоянием от него до полярных элементов. Расстояние между полярными элементами должно быть как минимум 20 мкм, и они должны быть заключены в проводящие экраны (рис. П6).

Если EV пересекает неровную поверхность, он теряет электроны, которые порождают поверхностный заряд, замедляющий движение последующих EV.

Появление поверхностного заряда можно подавлять несколькими способами: 1) диэлектрическая подложка может быть покрыта алюминием, легированным хромом, вольфрамом, или молибденом, что обеспечивает большую электропроводность подложки (сопротивление подложки должно быть не менее 200 Ом на квадратный дюйм); 2) эффект подавле

ния можно усилить уменьшением толщины подложки; 3) поверхностный заряд также можно снять при помощи эффекта фотопроводимости, если диэлектрик состоит из алмаза – углерода, легированного графитом; 4) еще один метод подавления поверхностного заряда – это увеличение удельной электропроводности, вызванное бомбардировкой высокоскоростными электронами EV.

Отдельные сфероиды EV можно выделить из цепочек для исполь-

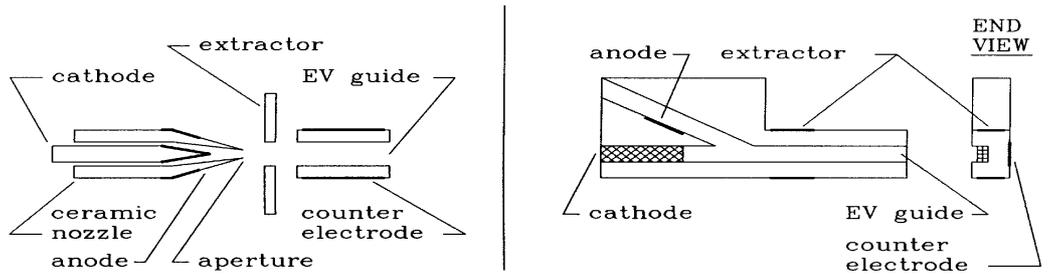


Рис. П7. Селекторы EV

зования в каком-либо процессе или устройстве. При помощи специального разделителя с положительно заряженным приблизительно до величины 2 кВ электродом-экстрактором из целого заряда можно выделить приблизительно пять EV-цепочек, каждая из которых содержит 1 – 12 сфероидов. Последовательность разделителей EV позволяет проводить выделение EVs с определенной энергией связи из всего множества цепочек с широким диапазоном значений энергии связи (рис. П7 – П9).

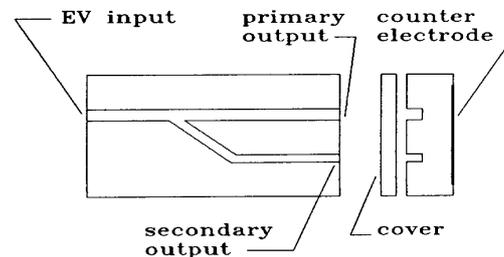
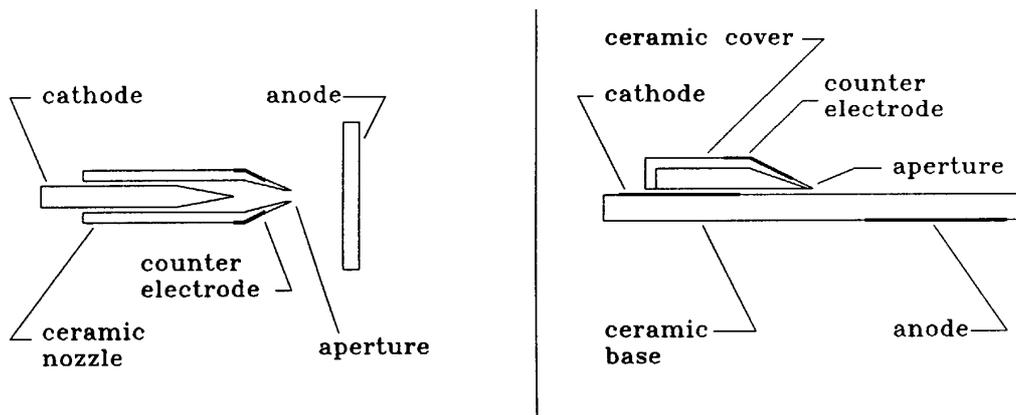


Рис. П8. Расщепители EV

Большой выброс сгустков EVs можно разделить расщепителем на множество близких по времени, или синхронных, промежуточных сгустков. В конструкции расщепителя EV основной направляющий канал волновода пересекается узкими вторичными каналами, расположенными в местах распространения EVs. Одиночный EV в таком случае может свернуть в боковой канал, но эффект “толпы”, которую представляет множество сгустков EVs, препятствует отклонению всего выброса в расщепитель.

Результатом расщепления пакета сгустков EVs, сгенерированных при помощи одного импульса, является появление сигналов о перемещении EV в двух или более местах либо одновременно, либо с различными временными задержками. Каналы волновода могут включать в себя изгибы, которые выборочно изменяют направление движения EV.

На направление движения EV также можно влиять при помощи поперечных электрических полей. Степень отклонения направления зави-



*Рис. П9. Разделитель EV*

сит от величины отклоняющего поля и от периодичности его воздействия. Отклоняющее поле можно отключать (включать) или изменять его величину для того, чтобы осуществлять выборочное отклонение. Переключатель отклонения не должен находиться вблизи какого-либо канала волновода, который может помешать поперечному отклонению EV.

Отрицательная и положительная обратные связи по напряжению, возникающие от проходящих EV, могут быть использованы для управления переключателем отклонения с помощью двухтактного устройства или фильтра. Величина отклоняющего напряжения может быть не более нескольких десятков вольт. Переключение отклонения может быть использовано при разработках многоэлектродных устройств (триодов, тетродов и т.д.). В общем, известные технологии, используемые в работе электронных ламп, применимы и к EV-устройствам.

Использование отклоняющих электродов делает возможным создание осциллографа с фосфорным экраном, оптическим микроскопом или электронной (видео) камерой для наблюдения за EV. Форму волны одиночного сгустка в диапазоне 0,1 пс можно наблюдать при помощи такого “пикоскопа”, встроенного в EV-генератор (рис. П10).

EV также можно генерировать при помощи безэлектродных устройств, в которых используется высокочастотная энергия (в диапазоне

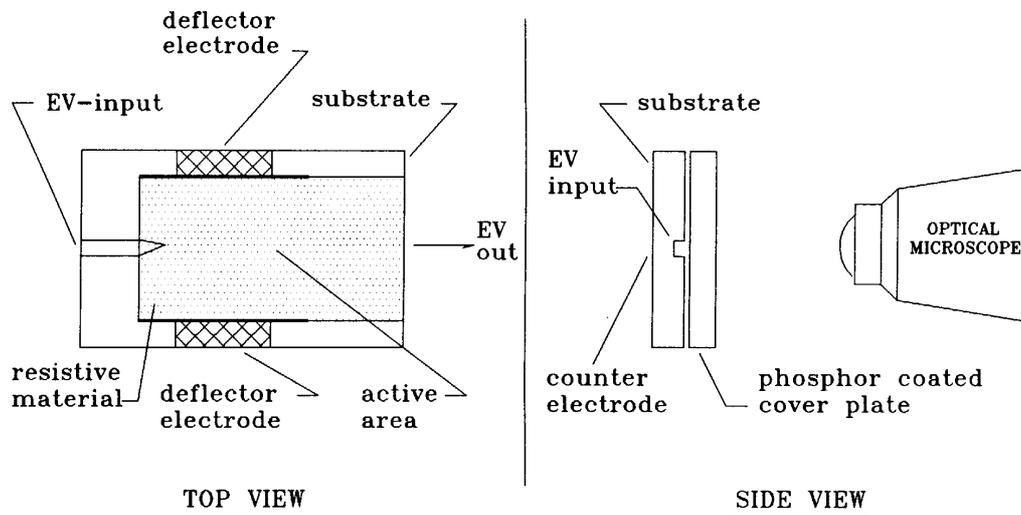


Рис. П10. Пикоскоп EV

радиочастот) для возбуждения газа (предпочтительно ксенона) при давлении 0,1 атм. На внешние металлические электроды подается напряжение величиной приблизительно 3 кВ, которое передается через цилиндрическую или планарную диэлектрическую оболочку в формирующую камеру, действующую как “виртуальный катод”. Экранирующая плоскость (контр-электрод) не может полностью ограничить такую оболочку, так как это препятствовало бы распространению электромагнитного излучающего сигнала вне трубки. Используется проволочная спираль, которая заканчивается согласованной нагрузкой с полным сопротивлением (рис. П11).

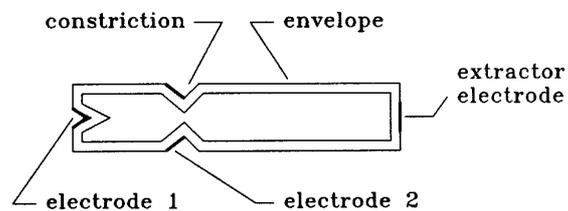


Рис. П11. Безэлектродный источник EV

Например, если обернуть спираль длиной 30 см (со временем задержки сигнала приблизительно 16 нс при импедансе 200 Ом) вокруг трубки с внешним диаметром 3 мм (1 мм внутренний диаметр, давление  $10^{-2}$  тор, атмосфера ксенона), то можно сгенерировать EV. Это осуществляется использованием источника напряжения в 1 кВ с частотой следования сигналов 100 имп/с через входной резистор 1500 Ом с напряжением на аноде, равным 0 В, и нагрузкой на контр-электроде (антикато

де) в 50 Ом. При этом достигается отрицательное выходное напряжение 2 кВ на линии задержки в 200 Ом и отрицательное напряжение 60 В на контр-электроде.

Форма волны, генерируемой в спирали, зависит от давления газа. При этих параметрах образуется отрицательный импульс с крутым фронтом и срезом (длительность 16 нс), за ним следует плоский импульс, длительность которого линейно зависит от давления газа. При минимальном давлении газа плоский импульс может отсутствовать.

Распространение EVs через газовую атмосферу вызывает появление очень тонких ярких ионных стримеров в газе или вдоль стенок оболочки. В безэлектродном устройстве другие EVs могут перемещаться вдоль той же оболочки ионного стримера, который сформирован предыдущим EV. Толщина ионной оболочки увеличивается по мере того, как множество сгустков EVs распространяется вдоль того же стримера. Если давление газа очень низкое, то EVs будут распространяться без образования видимого стримера. Такие EVs известны как черные EVs.

EVs, сгенерированные внутри безэлектродной оболочки, могут быть использованы в лампах бегущей волны (ЛБВ). Такие устройства обеспечивают хорошую связь с обычными электрическими цепями и могут обмениваться с ними энергией. При помощи EV-импульсов могут генерироваться электромагнитные излучения в диапазоне от СВЧ до частот видимого спектра, и это излучение может быть связано с электрической цепью путем согласования параметров линии передачи и энергии генерации EV (рис. П12).

Генерация EV требует быстрой концентрации в малом объеме очень высокого нескомпенсированного электронного заряда. Ранее описанные процессы полевой эмиссии порождают пары металла, возникающие на катоде при термическом испарении и ионной бомбардировке. Генерации EV при помощи чистой полевой эмиссии можно достичь путем быстрого переключения в высоком вакууме. Длительность процесса эмиссии при включении/выключении должна быть такой, чтобы не было перегрева эмиттера или его испарения, то есть короче чем тепловая постоянная времени катода (обычно менее 1 пс).

Размер полевого эмиттера имеет критическое ограничение по диаметру (приблизительно 1 мкм в поперечнике). Катоды больших размеров подвержены чрезмерным термическим нагрузкам, в то время как “при размере менее 1 мкм полевой эмиттер имеет такое преимущество, как большее охлаждение. Охлаждение обеспечивается элементами с типично

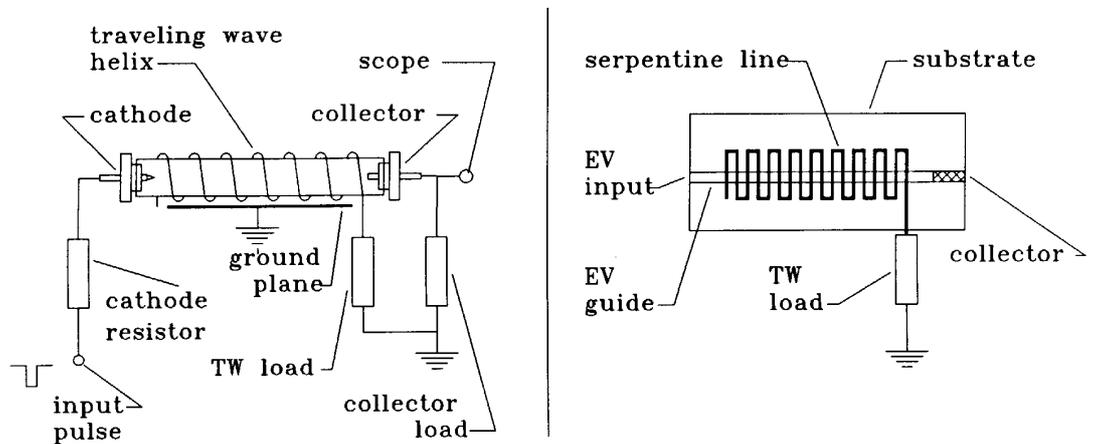


Рис. П12. Связь EV с цепью лампы бегущей волны

высоким коэффициентом отношения поверхность/объем”.

На эмиттере может быть положительное напряжение смещения; если оно составляет более 2 кВ, то электроды удалены друг от друга на расстояние около 1 мм. Электрод-экстрактор должен быть покрыт оболочкой из резистивного материала ( $10^{-2} - 10^{-6}$  Ом).

Кен Шоулдерс также построил “пикоимпульсный прибор” для управления генерацией EV в интервале менее 1 пс (рис. П13).

При полном разрушении EV возникает рентгеновское излучение. При захвате EV элементом цепи низкой индуктивности он освобождает энергию так быстро, что возникают фотоны рентгеновских лучей с энергией приблизительно 2 кВ. Столкновение EV с поверхностью может вызывать термоэлектронную импульсную эмиссию и другие явления, наиболее значительным из которых является трансмутация атомов (рис. П14).

EVs можно использовать в качестве источников электронов. Можно получить источник наверху канавки РС-волновода, создаваемый вторичной эмиссией электронов, которые возникают после столкновения EVs с поверхностью канавки при их прохождении.

Но в таком случае необходимое для перезарядки время будет доста-

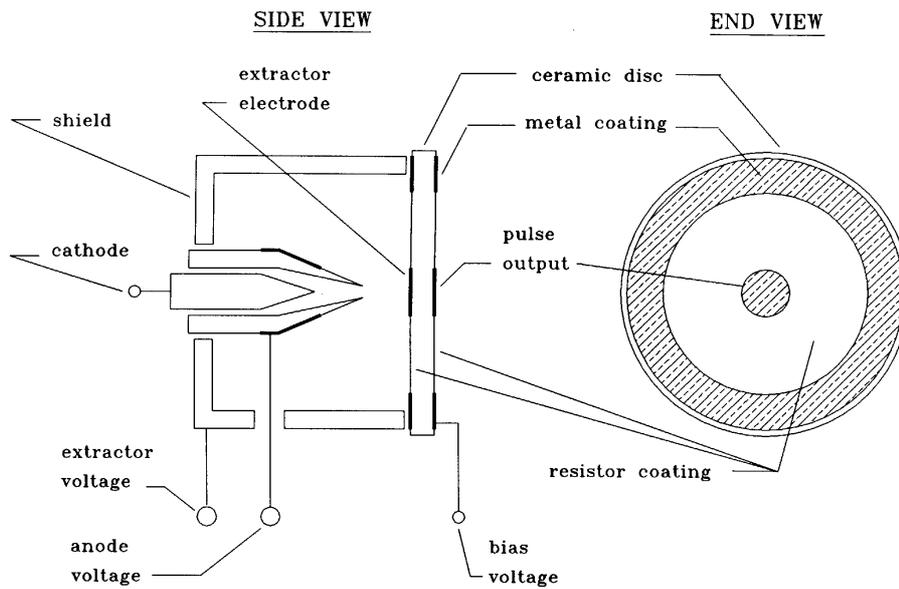


Рис. П13. Импульсный генератор

точно велико. LC-волноводы обладают более высокой скоростью перезарядки и могут быть использованы для генерации радиочастот.

По Шоулдерсу, “существует обратная связь между скоростью пере-

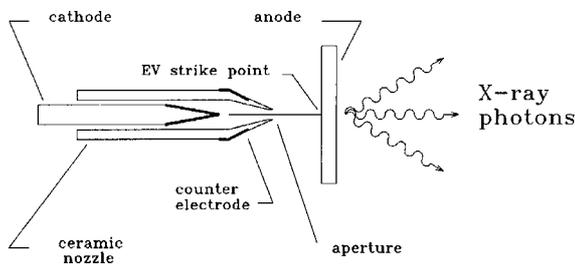


Рис. П14. EV, излучающие рентген

мещения EV вдоль канала волновода и выходными резонаторами, расположенными в местах стыковки с выводами коллектора, определяющая частоту вызванного излучения. Частота вызванного излучения соответствует величине, равной скорости EV, умноженной на обратное расстоя-

ние между пазами. Формы отверстий в контрэлектроде определяют формы генерируемой волны. Аперриодичные формы волны могут быть сгенерированы приданием соответствующей формы прорезям контрэлектрода. Их можно использовать для запуска различных вычислительных или временных функций. Нагрузка на выходных контактах электрода должна соответствовать полосе пропускания волны сгенерированной формы”.

LC-волноводы могут иметь структуру с многочисленными изгибами (“wigglers”) или в форме циркулятора. Заряд при ускорении излучает энергию на частоте, определяемой величиной ускорения заряда. Интенсивность изменяется в соответствии с геометрией источника излучения и

числа вовлеченных зарядов. Таким образом, источник излучения может быть создан медленно движущимся по малому радиусу зарядом либо быстро движущимся по большому радиусу зарядом. Время одного полного обращения заряда определяет частоту излучения.

Диаграмма направленности циркулирующего заряда (движущегося по замкнутой траектории) соответствует двум линиям зарядов, совершающих колебания по синусоиде со сдвигом фаз  $90^\circ$  одна относительно другой. Аналогичная диаграмма направленности может быть получена при использовании гармонических излучателей, фазированных антенных решеток и т.д.

Разработанные Шоулдерсом LRC (индуктивно-резистивно-емкостные) резонансные контуры волноводов могут быть использованы в различных практических приложениях: например, для улучшения константы времени перезарядки без необходимости легирования диэлектрического материала. Паразитные заряды удаляются нанесением тонкого металлического покрытия на стенки волновода. По Шоулдерсу, “покрытие было бы оптимальным по толщине в диапазоне от 200 до 500 ангстрем. Для этих значений достигается хорошее оптическое отражение следа EV, а сопротивление вдоль канала относительно высоко. Алюминий и молибден – хорошие материалы для создания такого покрытия...” (рис. П15).

“Излучатели, имеющие структуры с многочисленными изгибами (“wigglers”), и циркуляторные излучатели можно непосредственно использовать для экспериментальных задач, где требуется избежать контакта с газовой средой (“collision avoidance”)

и в технике связи, где антенная решетка напрямую подвергается воздействию среды, в которую она излучает. Использование EV-циркуляторов, имеющих частоту 3 ГГц (длина волны 10 см), влечет за собой применение циркуляторов с физическим размером 3 см для обращения EVs со скоростью света или 4,3 см для обращения EVs, имеющих скорость, равную 0,1 скорости света. Можно разместить решетку из тысячи таких излучателей на квадратной подложке размером в несколько дюймов.

Для импульсной системы их следует не только включать в разное время, но и осуществлять управление ими по фазе. Система переключе

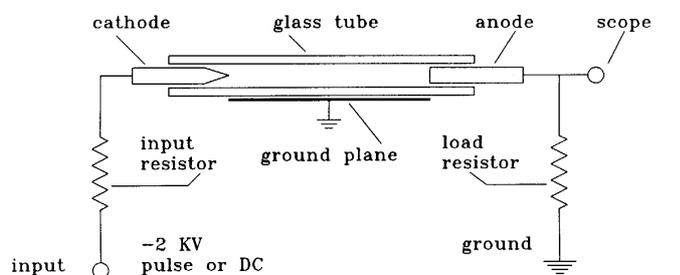


Рис. П15. EV-цепь

ния тысячи источников сложна, но переключаящие свойства EV в состоянии осуществить это”.

При использовании EV-технологий наблюдается явление, которое не происходит в обычных цепях. Скрещенные волноводы можно расположить под углом  $90^0$  друг к другу (в системе координат XYZ) без “замыкания”, которое произошло бы в монтажной схеме.

Прохождение EV вдоль лампы бегущей волны или планарного прибора влечет внезапное аккумулярование отрицательного заряда, порождающего постоянный ток на коллекторе. При оптимальных условиях выходная энергия устройства превышает энергию, необходимую для генерации EV. В качестве примера Шоулдерс предлагает: “При входном импульсе амплитудой в 1 кВ через входной резистор 1500 Ом и выходном импульсе амплитудой в 2 кВ через спираль сопротивлением 200 Ом отношение выходной пиковой энергии к входной пиковой энергии получается равным  $20\ 000/667=30$ . Этот результат нужно умножить на величину, которая равна отношению длительности выходного импульса к длительности входного импульса. Если взять длительность входного импульса равной 16 нс, а выходного – 600 нс, тогда отношение равно 0,027. Результирующий уточненный коэффициент преобразования энергии равен  $0,027 \times 30 = 0,81$ ”. Часть входной энергии теряется на возбуждение газа в лампе бегущей волны.

“Для устойчивой генерации EV предпочтительнее условия, когда давление газа понижено до наименьшего значения.... При уменьшении, например, до 5 нс длительности входного импульса уточненный коэффициент преобразования энергии составляет  $(16/5) \cdot 30 = 96$ . Это значит, что при указанном уменьшении длины импульса выходная энергия лампы бегущей волны в 96 раз превышает входную энергию без учета энергии, потребляемой внутри лампы, и энергии, выделяемой на коллекторе в виде собранных частиц”.

“Увеличение коэффициента преобразования энергии достигается при дальнейшем уменьшении длительности входного импульса; EV можно генерировать даже при такой малой длительности входного импульса, как  $10^{-3}$  нс. EV – это механизм для отбора энергии, вероятно, нулевых колебаний и для преобразования ее в полезные виды. Я полагаю, что большая часть электронных зарядов, заключенных внутри EV, скрыта таким образом, что EV не показывает внешним измерительным приборам действительную величину заряда, равную величине полного заряда, содержащегося внутри EV”.

Величина остаточного заряда после столкновения EV диаметром 3 мкм с электродом составляет  $2 \cdot 10^{10}$  электронов. EV диаметром 10 мкм теряет  $3,5 \cdot 10^{14}$  электронов при прохождении им расстояния 1 мм. Есть некоторые указания на то, что EV может взорваться при достижении критически низкого значения величины его заряда или плотности.

Шоулдерс подсчитал, что текущая объемная плотность тока EV приблизительно равна  $6 \cdot 10^{11}$  А/см<sup>3</sup>. Скорость его эмиссии составила бы приблизительно  $1,7 \cdot 10^6$  А. Характерное время жизни EV составляет  $3 \cdot 10^{-11}$  с. Его вычисления показывают, что плотность заряда составляет приблизительно  $6,6 \cdot 10^{23}$  электронов/см<sup>3</sup>, что приближается к средней плотности заряда в твердом теле.

Шоулдерс утверждает, что “В этот момент я могу обратиться к работкам Бергстрема и заявить, что движение изолированных зарядов есть на самом деле то, что привязывает их к оставшимся зарядам, образующим эту сущность. При таком положении дел я могу шагнуть в священную область вакуума или поляризованного эфира, как его называет Бергстром, и начать поиски поддерживающего процесса, который сохраняет эту сущность в неприкосновенности дольше, чем это кажется возможным, принимая во внимание величину начальной энергии на входе. Для поддержания существования EV я буду возбуждать нулевые колебания как вездесущий источник энергии. Я заявляю, что начальное движение электронов в момент образования EV поддерживается в равновесном состоянии или далее “сжимается” входной электромагнитной энергией нулевых колебаний.

Так как скорость поступления энергии нулевых колебаний ограничена (возможно, из-за взаимосвязанных предположений), существует определенная конечная скорость извлечения энергии из электронов в созданной потенциальной яме до момента превышения критерия стабильности для этой ямы. При превышении этой скорости, что может, скорее всего, произойти в момент контакта EV с металлом, EV взрывается, высвобождая содержащуюся в нем энергию в соответствующей области спектра излучения.

Существуют признаки того, что для сфероидов диаметром в 1 мкм это область мягкого рентгеновского излучения. Постоянная величина диаметра просверленных отверстий (в оксиде алюминия) позволяет предположить, что либо эти дыры появились вследствие воздействия механизма, содержащего очень большую энергию, на который едва ли оказал влияние сам этот процесс, либо то, что в ходе процесса происходила постоянная подкачка энергии. Я выбираю второе объяснение.”

Шоулдерс также предположил, что EV является сферическим генератором на базе несимметричного вибратора. Вот как он описывает это в заключении книги “EV: A Tale of Discovery” : “Это (генератор на базе несимметричного вибратора) является совершенным осциллятором векторных и скалярных потенциальных волн, в которых отсутствуют влияния со стороны электростатического E и магнитного B полей. Эти волны можно рассматривать как продольные волны в вакууме. Их большей частью нельзя определить обычными способами индикации электростатического E и магнитного B полей, но их индикация легко доступна несимметричным вибраторам.”

Похоже, что, помимо этого, еще возникает невероятно большое число полезных явлений, проявляющихся в результате потенциальных эффектов, которые непосредственно недоступны влиянию сил электростатического E и магнитного B полей. При переходе в эту стадию мир без воздействия сил станет когда-то в будущем “новой главой” исследования и разработки EV.

Одним из наиболее значительных возможных приложений EV-технологий станет переработка при помощи EV радиоактивных отходов, преобразуемых в нерадиоактивные элементы. Шоулдерс сделал соответствующую заявку на патент, касающуюся процесса, который называется “Преобразование при помощи инъекций плазмы”. Заявки на похожую тему были поданы и другими исследователями (Род Нил, Стэн Глисон и др.). EV несомненно может служить ускорителем, обладающим достаточной энергией для инъекции большой группы ядер в мишень и порождения групповой ядерной реакции.

Строение EV позволяет ему заключить в себя приблизительно  $10^5$  нуклидов. EV могут абсорбировать ионы до тех пор, пока общий заряд системы не станет положительным. Такие EV называют нуклидными EV (NEV). По Шоулдерсу, “NEV действует как сверхмассивный отрицательный ион с высоким отношением заряд/масса. Это обеспечивает функционирование простого ядерного ускорителя.

NEV могут быть созданы механической энергией, которая есть внутри кристаллической решетки и может быть высвобождена из решетки металла путем фрактоэмиссии электронов. Для акустических/водных систем они генерируются разделением заряда в лопающемся пузырьке. Анализ отходов палладия после их обработки NEV показал увеличение количества Mg, Ca, Si, Ga, Au. Местная фрактоэмиссия, возникающая в результате ударов NEV, обеспечивает значительное количество энергии для реакции и может стать причиной чрезвычайно быстрого распространения энергии, которая либо инициирует, либо поддерживает реакцию”.

Шоулдерс делает вывод, что “такие ядерные реакции являются в своей основе реакциями, вовлекающими большое число ядер, а не одной изолированной реакцией на атомном уровне”. Такие реакции происходят в течение нескольких десятков наносекунд. Первым шагом является процесс “загрузки”, на котором ослабляется структура материала. Затем в результате очень быстрого надлома генерируется NEV, плотно нагруженный нуклидами (100 000 дейтонов в электролитическом элементе для холодного ядерного синтеза). NEV с ускорением вводятся в приемный материал путем приложения напряжения, которое лежит в диапазоне киловольт, но NEV обладает скоростью, эквивалентной при приложении напряжения в мегавольты, благодаря механизму ускорения при надломе. Шоулдерс предлагает специальное объяснение этим результатам как происходящим “благодаря кластерным ядерным реакциям с неизвестной формой связности”.

Эксперименты Шоулдерса показали полное устранение радиоактивности в высокорadioактивном материале. Каким бы ни был действующий механизм этого процесса, нейтрализация огромного количества ядерных отходов по EV-технологии станет чудесным явлением, за что мы должны благодарить Кена Шоулдерса.

**Литература к приложению**

1. Kenneth R. Shoulders: P.O. Box 243, Bodega, CA 94922-0243 USA.
2. Shoulders, Kenneth R.: U.S. Patent 5,018,180 (CI.378/119); «Energy Conversion Using High Charge Density» (May 21, 1991).
3. Shoulders, K.: U.S.P. 5,054,046 (CI.378/119); «Method & Apparatus for Production & Manipulation of High Density Charge» (Oct. 1, 1991).
4. Shoulders, K.: U.S.P. 5,054,047 (CI.378/119); «Circuits Responsive to & Controlling Charged Particles» (Oct. 1, 1991).
5. Shoulders, K.: U.S.P. 5,123,039 (CI.378/119); «Energy Conversion Using High Charge Density» (June 16, 1992).
6. Shoulders, K.: U.S.P. 5,148,461 (CI.378/119); «Circuits Responsive to & Controlling Charged Particles» (Sept. 15, 1992).
7. Shoulders, K.: EV: A Tale of Discovery; 1987, Jupiter Technology, Austin TX.
8. Bergstrom, Arne: Physical Review 26: 720 (1955).
9. Bole, W.S., et al.: J. Applied Physics 26: 720 (1955).
10. Kisliuk, P.P.: Bell Lab. Records 34: 218 (1956).
11. Laferty, J.M.: Vacuum Arcs: Theory & Application; 1980, J. Wiley & Sons.
12. Mesyats, G.A.: IEEE Transactions on Electrical Insulation EI-18 (3): 218-22 (June 1983).
13. Nardi, V., et al.: Physical Review A-22 (5): 33266-3269 (15 May 1980).
14. Schwirzke, F.: J Nuclear Materials. 128/129: 609-612 (1984).

## SUMMARY

The hypothesis of heterogeneous non-equilibrium and equilibrium substance (i.e., either gravitating particles or similar charges) can be confined at the restricted space area by the static self-consistent field is founded.

The inverse field influence at the substance, causing this field occurrence, is allowed, the collective interaction between the particles or charges is considered to be self-consistent. The static macroscopic self-consistent fields of considered systems can be created by the moving particles or charges only.

Independently of form of substance state equation (that is substance pressure dependence of its density) the collective interaction is obeyed to the integral of total pressure - the fundamental conservation law of scalar function of system. The integral corresponds to the total of self-consistent field and particles pressures at the systems of gravitating particles. It consists of self-consistent field and charges pressures difference for the similar charges. The total pressure integral becomes collective interaction Hamiltonian for the plane symmetry systems.

The physical mechanisms of substance confinement by self-consistent field are followed from the conservation laws. So, two static forces of field origin act at the optional volume element of gravitating particles to confine it at the mechanical equilibrium. The first coincides with the direction and value of particles pressure gradient and equals to multiplication of particle's mass density on the intensity of self-consistent gravitation field at the volume arrangement place. The second one is created by the self-consistent field pressure gradient. It coincides with gradient direction, acts at the substance mass density and compensates for the first force action.

Also, two static forces of field origin act at the optional volume element of similar charges. The first one coincides with the direction and value of charges pressure gradient and equals to multiplication of charge density on the intensity of self-consistent electrical field at the volume arrangement place. Another is created by field pressure gradient. It has the inverse direction, acts at the substance mass density as an ordinary pressure gradient and compensates for the first force action too.

The field origin forces arise and develop themselves as internal confinement forces only at the areas, where the substance is found.

The physical mechanisms of substance confinement by the self-consistent field allow carrying out the following points:

- To predict the substance distribution laws of gravitating clusters not only have the density, increasing from the center to outside, but also have the internal areas with zero density too.
- To explain the origin of volume forces to confine the excess similar charges near the surface of any solids have the define geometry at the electrostatics

experimental paradox. The theory points out at the opportunity of appearance the internal charges “atmosphere” with concentration, increasing towards the system’s center, under the thin-walled metallic sphere electrization.

- To find the mechanical elastic properties of the thermo diffusion self-consistent systems, where is no crystal lattice found and the layer thickness is sensitive to the temperature gradient variation.
- To clarify the confinement nature of similar charge clusters, generating at the contemporary experiments by the point cathodes in the vacuum, and the reasons of excess electron concentration on the charge cluster border versus average solid electron concentration.
- To suggest the alternative model of ball lightning “frame” can be founded on the idea (which is proved by estimations), that the ball lightning is the compact similar charge cluster in the form of thin-walled bubble, being temporary confined by the self-consistent field at the restricted space area.
- To obtain the radial distributions of physical quantities (magnitudes) and integral parameters of cold spherical cluster, which contains neutrons, having the nuclear density with homogeneous temperature, and being confined by the self-consistent field.
- To figure in the radial distributions of physical quantities and integral parameters of cold spherical cluster, which contains similar charges with homogeneous temperature, and compare results with experimental data, and obtain good coincidence with experiment, and validate the physical properties observed under inelastic cluster’s interaction (collision) with the flat metal surface.

The theory predicts the opportunity of existence neutronless nucleuses and nucleuses, containing electrons only, under the low temperatures. The estimates show to generate such nucleuses the energy is necessary to be commensurate with one electron-volt energy value.

The physical mechanisms observed permit to create science intensive technology of generation the clusters, containing the charge at the range from microcoulomb to millicoulomb. We can approach to the real opportunity of ball lightning reproduction at this way only.

The utilization of explosive energy of clusters with final and directed lifetime may be interesting to create ecological pure engines.

The usage of unique physical properties of charge clusters at micro- and nano-electronics can lead to the creation of new technique of crystal’s surface processing and to the new principles of superpower microwave oscillator’s creation.

*Vladimir Sapogin. E-mail: sapogin@mail.ru or sapogin@at.infotecstt.ru*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. М.: Высшая школа, 1983. 463 с.
2. Shoulders K. EV: A Tale of Discovery. 1987, Jupiter Technology, Austin TX.
3. Bergstrom A. Physical Review, vol. 26, 1955, p.720.
4. Власов А.А. Теория многих частиц. М-Л: ГИТТЛ, 1950. 349 с. Приоритетная работа: On the kinetic theory of an ansembly of particles with collective interaction. Journ.Phys.(USSR), 9, 25 (1945). Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966. 320 с. Нелокальная статистическая механика. М.: Наука, 1978. 260 с.
5. Emden R. Gaskugeln. Leipzig und Berlin. 1907.
6. Fowler R.H., M.N., vol. 91, p. 63, 1930; Quart.J.Math.("Oxford Series"), vol. 2, p. 259, 1931; vol. 45, p. 289, 1914.
7. Чандрасекар С. Введение в учение о строении звезд. М.: ИЛ, 1950. 476 с.
8. Френкель Я.И. Статистическая физика. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1948. 760 с.
9. Richardson O.W., Phil.Transactions. A: vol. 201, p. 516, 1903.
10. Schottky W., Phis. Zeitsehr. vol. 15, p. 526, 1914; Jahrb.D. Radioakt. u. Elektronik, vol. 12, p. 147, 1915.
11. Laue M.V. Gluhelektronen. Jahrbuch der Radioaktivitat und Elektronik. Band 15, Heft 3, s. 205, Jahr 1918.
12. Вайнштейн Л. Сборник научных трудов. М.: Сов. радио, 1948. Т.Х.
13. Сапогин В.Г. Плоские самосогласованные гамильтоновы системы гравитирующих частиц//Изв. высш. учеб. зав. Северо–Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 1996. №3. С.72–78.
14. Сапогин В.Г. Коллективное взаимодействие зарядов с самосогласованным полем плоской симметрии//Изв. высш. учеб. зав. Северо–Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 1994. №3. С.49–59.
15. Сапогин В.Г. Коллективное взаимодействие релятивистских зарядов с самосогласованным полем плоской симметрии I. Захваченные состояния с положительным полным давлением//Изв. высш. учеб. зав. Северо–Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 1995. №4. С.34–39.
16. Сапогин В.Г. Коллективное взаимодействие релятивистских зарядов с самосогласованным полем плоской симметрии II. Захваченные состояния с нулевым полным давлением//Изв. высш. учеб. зав. Северо–Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 1996. №1. С.31–32.

17. Сапогин В.Г. Коллективное взаимодействие релятивистских зарядов с самосогласованным полем плоской симметрии III. Пролетные состояния с отрицательным полным давлением// Изв. высш. учеб. зав. Северо–Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 1996. №2. С.25–29.
18. Сапогин В.Г. Плоские самосогласованные гамильтоновы системы равновесных одноименных зарядов//Изв. высш. учеб. зав. Северо–Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 1996. №4. С.63–68.
19. Child C.D. //Phys. Rev. 1911. Vol. 32. P. 492.
20. Langmuir I. //Phys. Rev. 1913. Vol. 2. P. 456.
21. Бурсиан В.Р. //ЖРФХО. 1921. Т. 51. С. 289.
22. Langmuir I. //Phys. Rev. 1923. Vol. 21. P. 419.
23. Бурсиан В.Р., Павлов В.И. //ЖРФХО. 1923. Т. 55. С. 71.
24. Jory H.R., Trivelpice A.W. //Jorn. of Appl. Physics. 1969.Vol 40. No 10. P.3924.
25. Добрецов Л.Н. Электронная и ионная эмиссия. М. 1950. 312 с.
26. Гвоздовер С.Д. Теория электронных приборов сверхвысоких частот. М. 1956. 528 с.
27. Шулейкин М.В. Электронные лампы. М. 1963. 366 с.
28. Birdsall C.K., Bridges W.B. Electron dynamics of diod region. Academic Press. New York, 1966. P.368.
29. Молоковский С.И., Сушков А.Д. Интенсивные электронные и ионные пучки. М. 1991. 306 с.
30. Зинченко Н.С. Курс лекций по электронной оптике. Харьков. 1961. 246 с.
31. Сапогин В.Г. Интеграл движения и двухпоточковые состояния плоского виртуального катода. Таганрог: ТРТИ, 1992. 25 с. Деп. в ВИНТИ № 118-В92. 10.01.92.
32. Сапогин В.Г. Интеграл давления и стационарные состояния плоских самосогласованных полей моноэнергетического катода нерелятивистских зарядов. Таганрог: ТРТИ, 1993. 19 с. Деп. в ВИНТИ № 2622-В93. 20.10.93.
33. Лоусон Дж. Физика пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1980. 438 с.
34. Jory H.R., Trivelpice A.W.//Jorn. of applied phisycs. 1969. Vol. 40. No 10. PP. 3924–3926.
35. Сапогин В.Г. Политропические равновесия самосогласованных гамильтоновых систем гравитирующих частиц//Изв. высш. учеб. зав. Северо–Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 2000. №1. С.79–75.

36. Сапогин В.Г. Политропические равновесия самосогласованных гамильтоновых систем одноименных зарядов//Изв. высш. учеб. зав. Северо–Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 2000. №2. С.46–51.
37. Сапогин В.Г. Политропические равновесия самосогласованных гамильтоновых систем одноименных зарядов. Состояния с неположительным полным давлением//Изв. высш. учеб. зав. Северо–Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 2000. №4. С.53–56.
38. Ивлев А.В., Павлов К.Б., Яковлев М.А. К теории плотного приповерхностного электронного слоя//Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки. 1999. №1. С.61–81.
39. Булыга А.В//Изв. АН БССР. Сер. Физико-математические науки. 1976. № 4. С. 121–126; Изв. АН БССР. Сер. Физико-математические науки. 1978. № 2. С. 52–56.
40. Булыга А.В. О механизме возбуждения взрывной эмиссии в процессах термоэмиссионного преобразования энергии//Доклады АН БССР. 1983. Т.ХХVII, №6. С.509–512; О влиянии оптических свойств электродов термоэмиссионного преобразователя энергии на его эффективность//Доклады АН БССР. 1983. Т.ХХVII, №9. С.813–816.
41. Булыга А.В., Капустин Н.Ф., Солонович В.К. Прибор для исследования термоэмиссии электродных материалов без источника внешнего электрического поля//Электронная техника. Сер. Материалы. 1983. Вып. 12(185). С. 63–66.
42. Сапогин В.Г. О физической осуществимости плоских самосогласованных гамильтоновых систем//Изв. ТРТУ. 1999. №2. С. 164–168.
43. Тер Хаар Д. Нейтронные звезды и пульсары. М.: Мир. 1973.
44. Сапогин В.Г. О модели шаровой молнии из одноименных зарядов//Изв. высш. учеб. зав. Северо–Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 1999. №3. С.67–70.
45. Сапогин В.Г. Изотермическая модель шаровой молнии из одноименных зарядов//Изв. ТРТУ. 2000. №1. С. 186–191.
46. Сапогин В.Г. Шаровой кластер одноименных зарядов с однородным распределением температуры//Материалы Международной конференции “Актуальные проблемы твердотельной электроники и микроэлектроники”. Дивноморское, Россия, 17–22 сентября, 2000 г.
47. Сапогин В.Г. Моделирование распределения одноименных зарядов в шаровом кластере с однородной температурой//Материалы Всероссийской научной конференции “Математическое моделирование в на

- учных исследованиях”. Ставрополь, СГУ, Россия, 27–30 сентября, 2000 г.
48. Справочник. Физические величины/А.П.Бабичев, Н.А.Бабуш-кина, А.М.Братковский и др; Под ред. И.С.Григорьева, Е.З.Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
  49. Барри Дж. Шаровая молния и четочная молния/ Пер. с англ. М.: Мир, 1983.
  50. Гезехус Н. О шаровой молнии. СПб,1900.
  51. Дмитриев М.Т. Шаровые молнии: новые наблюдения и новые гипотезы//Природа. 1971. №6. С.50.
  52. Имянитов И.М., Тихий Д.Я. За гранью законов науки. М.: Атомиздат, 1980.
  53. Капица П.Л. О природе шаровой молнии//ДАН СССР. 1965. Т.101. №2.
  54. Квасов Н.Т. Шаровая молния: гипотезы и факты. Минск: Университетское. 1989.
  55. Леонов Р. Загадка шаровой молнии. М.: Наука, 1965.
  56. Сингер С. Природа шаровой молнии/ Пер. с англ. М.: Мир, 1973.
  57. Смирнов Б.М. Загадка шаровой молнии. М.: Знание,1987.
  58. Смирнов Б.М. Фрактальные кластеры//Успехи физических наук. 1986. Т.149. С.177.
  59. Стаханов И.П. О физической природе шаровой молнии. М.: Энергоатомиздат, 1985.
  60. Френкель Я.И. О природе шаровой молнии//ЖЭТФ. 1940. Т.10. С.1424.
  61. Френкель Я.И. Теория явлений атмосферного электричества. М.–Л.: ГИТТЛ. 1949.
  62. Aniol R. Der Kugelblitz. Meteorologische Rundschau. 1954. № 11/12. S. 220.
  63. Brand. Der Kugelblitz. Hamburg. 1923.
  64. Finkelstein D. end J.Rubinstein. Ball Lightning. Phys. Rev. 1964. Vol.135. P. A390.
  65. Hill E.L. Ball Lightning. Amer.Scientist. 1970. Vol. 58. P. 479.
  66. Turner D.J. Ball Lightning and Other meteorological phenomena. Physics Reports. 1998. Vol. 293. PP. 1–60.
  67. Golubnichiy P.I., Gromenko V.M. et al. “The Investigation of the Mechanism of Energy Accumulation in Long-Living Lightning Objects, Found after a Powerful Impulse Energy Release in Water”, Cold Fusion Source Book. ISCF a. AES. 1994. Minsk. PP. 221–225; “Long-Living

- Lightning Objects Inside the Pulsating Cavern, Initiated by the Powerful Energy Emission in Water.” Dokl. An SSSR. 1990. V. 311. No. 2. PP. 356–360; “Formation of Long-Living Lightning Objects after the Collaps of Dens Low Temperature Water Plasma.” Zhurnal Techn. Fiziki. 1990. V.60. No. 1. PP. 183–186; “Fomation and Dinamics of Long-Living Lightning Objects – Lightning Ball, Summary Report”. Moscow: Inst. Vysokih Temp. 1991. No. 2. PP. 73–75; “Dinamics of Long-Living Lightning Objects Throw-out, Initiated by the Powerful Spark Energy Emission in Water. High velocity photography, photonics and metrology of fast-occurring processes. Summary of Reports at the 15th All–Union conference.” 1991. Moscow: VNIIOFI. P.113.
68. Marinov Stefan. The Thorny Way of Truth. Part V. (Documents on the violation of the laws of conservation). International Publishers “East–West”. 1989. AUSTRIA – Morrellenfeldgass 16. A-8010 Graz. P. 243; "Segner-Marinov Turbine as a Perpetual Motion Machine." J. New Energy. 1996. Vol. 1. No. 2. PP. 130–132; “Generation of Free Momentum and Free Energy by the Help of Centrifugal Forces.” J. New Energy. 1997. Vol. 2. No. 1. PP. 44–59.
69. Shoulders Ken and Shoulders Steve, “Observation on the Role of Charge Clusters in Nuclear Cluster Reaction”, Journal of New Energy. 1996. Vol. 1. No. 3. PP. 111–121.
70. Shoulders Ken and Shoulders Steve, “Charge clusters in action”, Bodega, CA, 1999. P.12.
71. R.Nelson. Ken Shoulders’ Electrum Validum. Infinite Energy. 1998. Issue 18. PP. 58–63.
72. G.A.Mesyats, Ecton processes at the cathode in vacuum discharge, Proceedings of the XVIIth International Symposium on Discharges and Electrical Insulation in Vacuum. 1996. Berkeley. CA. PP. 720–731.
73. Месяц Г.А. Эктон – лавина электронов из металла//Успехи физических наук. 1995. Т. 165. С. 601–626; //Письма в ЖЭТФ. 1993. Т. 57, С. 88; “Эктоны. Роль эктонов в электрофизических устройствах”. Екатеринбург: Наука. 1994.
74. Petr Beckmann. “Electron Cluster”. Galilean Electrodynamics. Sept./Oct. 1990. Vol. 1. No. 5. PP. 55-58.
75. Richard W.Ziolkowski and Michael K. Tippet. “Collective Effect in an Electron Plasma System Catalyzed by a Localized Electromagnetic Wave”. Physical Review A. 1991. Vol. 43. No. 6. PP. 3066–3072.

76. Shang-Xian Jin & Hal Fox. "Characteristics of High-Density Charge Cluster: A Theoretical Model". *J. of New Energy*. 1996. Vol. 1. No. 4. PP. 5–20.
77. Atul Bhadkamkar, Hal Fox. "Electron Charge Cluster Sparking in Aqueous Solution". *J. of New Energy*. 1996. Vol. 1. No. 4. PP. 62–68.
78. Shang Xian Jin, Hal Fox. "High Density Charge Cluster Collective Ion Accelerator." *J. New Energy*. 1990. Vol. 4. No. 2. PP. 96–104.
79. Hal Fox, Patrick Bailey. "High-Density Charge Clusters and Energy Conversion Results." *IECEC 1997 Proceedings*. Paper #97230; (NEN Aug. 1997, Abs. only); *J. New Energy*. 1997. Vol. 2. No. 2. P. 127.
80. Hal Fox, Shang Xian Jin. "Low-Energy Nuclear Reactions and High-Density Charge Clusters." *Proc. INE'98 Symp. New Energy*. Aug. 1998; *J. New Energy*. 1998. Vol. 3. No. 2/3. PP. 56–67.
81. Dan Chicea. "Electron Clusters – Possible Deuterium Fusion Catalyzers." *J. New Energy*. 1997. Vol. 2. No. 1. PP. 37–43.
82. Moray B. King. "Charge Clusters: The Basis of Zero-Point Energy Inventions." *J. New Energy*. 1997. Vol. 2. No. 2. PP. 18–31.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	3
<b>ЧАСТЬ 1. МЕТОД САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ</b> .....	12
<b>ГЛАВА 1. МЕТОДЫ САМОСОГЛАСОВАНИЯ ПОЛЯ И ВЕЩЕСТВА (обзор)</b> .....	12
<b>§ 1. Распределение гравитирующих частиц, находящихся в равновесии в газовых шарах</b> .....	12
<i>Уравнение гравитационного равновесия. Политропическое равновесие. Частные случаи решения уравнения Лэна–Эмдена. Гравитационные равновесия с постоянной температурой и уравнение Эмдена. Изоклины уравнения Эмдена.</i>	
<b>§ 2. Поля термоэлектронов, находящихся в изотермическом равновесии по Лауэ</b> .....	28
<i>Уравнение равновесия термоэлектронов. Равновесие термоэлектронов у плоского электрода. Равновесие термоэлектронов в сферически симметричном случае. Равновесие термоэлектронов у цилиндрического электрода. Капиллярное давление термоэлектронов.</i>	
<b>§ 3. Коллективное взаимодействие в системах заряженных частиц по Власову</b> .....	38
<i>Основные предпосылки и уравнения теории. Отличительные особенности метода.</i>	
<b>§ 4. Самосогласование поля и вещества, находящихся в изотермическом равновесии по Френкелю</b> .....	43
<i>Историческая справка. Силы дальнего действия между частицами и метод самосогласованного поля. Гравитирующий газ (звезда). Электронный газ. Распределение электронов в случае плоской симметрии. Электронный газ между двумя электродами.</i>	
<b>ГЛАВА 2. ГИДРОСТАТИКА ВЕЩЕСТВА В САМОСОГЛАСОВАННОМ ПОЛЕ</b> .....	55
<b>§ 5. Гидростатика гравитирующих частиц в самосогласованном поле</b> .....	55
<i>Условие равновесия гравитирующих частиц. Интеграл полного давления. Градиент давления поля как объемная плотность сил. Уравнения равновесия гравитирующих частиц в самосогласованном поле.</i>	

<b>§ 6. Гидростатика одноименных зарядов</b>	
<b>в самосогласованном поле</b>	..... 58
<i>Условие равновесия одноименных зарядов. Интеграл полного давления. Градиент давления поля как объемная плотность сил. Уравнения равновесия зарядов в самосогласованном поле.</i>	
<b>ЧАСТЬ 2. САМОСОГЛАСОВАННЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ</b>	
<b>СИСТЕМЫ С ПЛОСКОЙ СИММЕТРИЕЙ</b>	
	..... 61
<b>ГЛАВА 1. БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ</b>	
	..... 61
<b>§ 7. Нерелятивистский газ гравитирующих частиц</b>	..... 61
<i>Бесстолкновительная функция распределения и уравнение равновесия. Гамильтонова функция системы. Распределения физических величин. Фазовая траектория. Обсуждение результатов. Поведение частиц вблизи плоскости возврата.</i>	
<b>§ 8. Релятивистский газ гравитирующих частиц</b>	.....68
<i>Бесстолкновительная функция распределения релятивистских частиц. Гамильтонова функция системы. Распределения физических величин. Фазовые траектории. Обсуждение результатов. Оценки.</i>	
<b>§ 9. Нерелятивистский газ одноименных зарядов</b>	.....73
<i>Бесстолкновительная функция распределения и уравнение равновесия. Гамильтонова функция системы. Случай положительного полного давления. Распределения физических величин. Фазовые траектории. Обсуждение результатов. Поведение зарядов вблизи плоскости возврата. Случай нулевого полного давления. Случай отрицательного полного давления. Распределения физических величин. Фазовые траектории. Обсуждение результатов. Поведение системы в асимптотике. Оценки.</i>	
<b>§ 10. Релятивистский газ одноименных зарядов</b>	.....96
<i>Бесстолкновительная функция распределения релятивистских зарядов и уравнение равновесия. Гамильтонова функция системы. Случай положительного полного давления. Распределения физических величин. Фазовые траектории. Обсуждение результатов. Оценки. Случай нулевого полного давления. Распределения физических величин. Оценки. Случай отрица</i>	

*тельного полного давления. Распределения физических величин. Фазовые траектории. Обсуждение результатов. Поведение системы в асимптотике. Оценки.*

**ГЛАВА 2. ПОЛИТРОПИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ** ..... 118

**§ 11. Системы гравитирующих частиц** .....118

*Скалярный интеграл. Функция распределения. Уравнение политропического равновесия. Гамильтонова функция системы. Распределения физических величин. Фазовые траектории. Обсуждение результатов. Уравнение теплопроводности. Оценки.*

**§ 12. Системы одноименных зарядов** .....129

*Скалярный интеграл. Функция распределения. Уравнение политропического равновесия. Гамильтонова функция системы. Случай положительного полного давления. Распределения физических величин для случая  $n=1$ . Распределения физических величин для случая  $n=2$ . Фазовые траектории. Распределения физических величин для случая  $n=3$ . Распределения физических величин для случая  $n=5$ . Обсуждение результатов. Уравнение теплопроводности. Оценки. Случай нулевого полного давления. Распределения физических величин для случая  $n=1$ . Распределения физических величин для  $n>1$ . Фазовые траектории и уравнение теплопроводности. Случай отрицательного полного давления. Распределения физических величин для случая  $n=1$ . Распределения физических величин для случая  $n=2$ . Распределения физических величин для случая  $n=3$ . Распределения физических величин для случая  $n=5$ . Обсуждение результатов.*

**ГЛАВА 3. ИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ** .....148

**§ 13. Системы гравитирующих частиц** .....148

*Скалярный интеграл. Функция распределения. Уравнение изотермического равновесия. Гамильтонова функция системы. Распределения физических величин. Фазовая траектория. Оценки.*

**§ 14. Системы одноименных зарядов** .....151

*Скалярный интеграл. Функция распределения. Уравнение изотермического равновесия. Гамильтонова функция системы. Случай положительного полного*

давления. Распределения физических величин. Фазовые траектории. Обсуждение результатов. Поведение в асимптотике. Случай нулевого полного давления. Случай отрицательного полного давления. Фазовые траектории. Обсуждение результатов. Поведение системы вблизи границы. Оценки.

**ГЛАВА 4. СИСТЕМЫ С ТЕРМОДИФФУЗИЕЙ** ..... 163

**§ 15. Системы гравитирующих частиц** .....163

Уравнения равновесия. Интегралы системы. Система с плоской симметрией. Гамильтонова функция системы. Барометрическое соотношение. Распределения физических величин для случая  $n=1$ . Политропические состояния с термодиффузией. Обсуждение результатов. Оценки.

**§ 16. Системы одноименных зарядов** .....173

Уравнения равновесия. Интегралы системы. Система с плоской симметрией. Гамильтонова функция системы. Барометрическое соотношение. Распределения физических величин для случая  $n=1$ . Политропические состояния с термодиффузией. Обсуждение результатов. Оценки.

**§ 17. О физической осуществимости гамильтоновых систем** ....188

**ЧАСТЬ 3. ВЕЩЕСТВО В САМОСОГЛАСОВАННОМ ПОЛЕ**

**СО СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ** .....193

**ГЛАВА 1. СИСТЕМЫ С ОДНОРОДНОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ** ...193

**§ 18. Шаровой кластер гравитирующих частиц** .....193

Уравнение равновесия. Распределения физических величин. Поведение системы вблизи дна потенциальной ямы. Обсуждение результатов. Интегральные параметры кластера. Оценки.

**§ 19. Шаровой кластер одноименных зарядов** .....199

Уравнение равновесия. Распределения физических величин. Поведение системы вблизи асимптот. Обсуждение результатов. Интегральные параметры кластера. Оценки.

**§ 20. Неупругое взаимодействие зарядового кластера с плоской поверхностью** .....211

Функция распределения осевших зарядов. Оценки и сравнения результатов.

<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>	.....	<b>216</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ</b>	.....	<b>221</b>
<b>SUMMARY</b>	.....	<b>241</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА</b>	.....	<b>243</b>
<b>ОГЛАВЛЕНИЕ</b>	.....	<b>249</b>

**САПОГИН Владимир Георгиевич**

***МЕХАНИЗМЫ***

***УДЕРЖАНИЯ ВЕЩЕСТВА***

***САМОСОГЛАСОВАННЫМ ПОЛЕМ***

Монография

Ответственный за выпуск  
Редактор  
Корректор

Сапогин В.Г.  
Маньч Э.И.  
Проценко И.А.

ЛР №020565 от 23.06.1997 г.

Подписано к печати 3.01.2001 г.

Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная.

Печать офсетная.

Усл.печ.л.-15,7

Уч.-изд.л.-15,2

Заказ № 11

Тираж 250 экз

<< С >>

---

Издательство Таганрогского государственного  
радиотехнического университета  
ГСП17А, Таганрог, 28, Некрасовский, 44  
Типография Таганрогского государственного  
радиотехнического университета  
ГСП17А, Таганрог, 28, Энгельса, 1

**СТАТЬИ ПО ХОЛОДНОМУ ЯДЕРНОМУ СИНТЕЗУ,  
ОПУБЛИКОВАННЫЕ ЗА ПОСЛЕДНИЕ ДЕСЯТЬ ЛЕТ**

**Информационный Центр Синтеза  
(Fusion Information Center, Inc.),  
расположенный в Солк Лэйк Сити, штат Юта, США  
предлагает приобрести компьютерный компакт-диск  
CD-ROM с полным текстом статей журналов:**

**Новая Энергия (Journal of New Energy);  
Факты Синтеза (Fusion Facts);  
Новости Новой Энергии (New Energy News);  
Материалы Конференции по Холодному  
Ядерному Синтезу, Минск, 1994  
(Cold Fusion Source Book,  
a Russian Conference),  
включая полную библиографию Центра за период  
с июля 1989 года по август 1999 года**



**Стоимость диска \$49 плюс \$9 за пересылку для иностранных  
адресатов. Заказы можно направлять по адресу:**

**EEMF, 3084 East 3335 South, Salt Lake City,  
UT, 84109, U.S.A.**