

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Институт сферы обслуживания и предпринимательства (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Донской государственный технический университет»
в г. Шахты Ростовской области
(ИСОиП (филиал) ДГТУ в г. Шахты)

В.Г. Сапогин, Н.Н. Прокопенко, А.Е. Панич

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНДУКТИВНОСТИ С ВЫСОКОЙ СИММЕТРИЕЙ

Монография

ШАХТЫ
ИСОиП (филиал) ДГТУ в г. Шахты
2016

УДК 621.3.011
ББК 31.233
С194

Рецензенты:

д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Радиоэлектронные
и электротехнические системы и комплексы»
ИСОиП (филиала) ДГТУ в г. Шахты **В.И. Марчук**
д.т.н., профессор, заместитель директора по научной работе
Ростовского филиала Российской таможенной академии **Д.А. Безуглов**
к.т.н., доцент кафедры «Системы автоматического управления»
Инженерно-технологической академии ЮФУ **Ю.И. Иванов**

Сапогин, В.Г.

С194 Интегральные индуктивности с высокой симметрией : моногр.
/ В.Г. Сапогин, Н.Н. Прокопенко, А.Е. Панич. – Шахты : ИСОиП
(филиал) ДГТУ в г. Шахты, 2016. – 234 с.
ISBN 978-5-906786-31-9

В монографии рассматриваются оригинальные методики расчётов интегральных индуктивностей высокой симметрии для систем на кристалле и систем в корпусе. Предлагаются конструкции токовых индуктивностей и микросолоноидов, а также технологические прототипы физико-технологических моделей.

Для научных работников, преподавателей вузов, инженеров, технологов, магистров и аспирантов специальностей 05.13.05 «Элементы и устройства вычислительной техники и систем управления»; 11.06.01 «Электроника, радиотехника и системы связи».

УДК 621.3.011
ББК 31.233

Монография подготовлена в рамках выполнения Госзадания Минобрнауки России № 8.374.2014/К по теме «Разработка и исследование нового поколения архитектурных, схмотехнических и топологических методов расширения диапазона рабочих частот аналоговых микросхем на основе перспективных технологических процессов и их практические приложения».

Режим доступа к электронной копии печатного издания:
[http: // www.libdb.sssu.ru](http://www.libdb.sssu.ru)

ISBN 978-5-906786-31-9

© ИСОиП (филиал) ДГТУ в г. Шахты, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
1. Метод расчёта статической планарной индуктивности для нулевого фазового сдвига между током и потоком	26
1.1. Магнитные и индуктивные свойства планарного токового 2D-кольца с азимутальным направлением плотности тока	42
1.1.1. Распределение магнитного поля внутри кольцевого тока	42
1.1.2. Распределение магнитного поля вне кольцевого тока	50
1.1.3. Потокосная часть индуктивности токового кольца с конечной радиальной толщиной.....	59
1.1.4. Добротность потокосной части индуктивности	69
1.1.5. Моделирование частотных свойств индуктивности токового кольца в симуляторе HFFS – Ansoft. Сравнение результатов с экспериментами	70
Выводы по разделу 1.1	75
1.2. О расчёте коэффициента увеличения планарной индуктивности 2D-спиралей Архимеда и обобщённых спиралей	76
1.2.1. Физико-математическая модель расчёта.....	76
1.2.2. Магнитное поле тока и индуктивность спирали Архимеда	76
1.2.3. Магнитное поле тока и индуктивность обобщённой спирали ..	78
Выводы по разделу 1.2	80
2. Алгоритмы расчёта погонных 3d-индуктивностей цилиндрической симметрии с аксиальной плотностью токов и метод управления их значением.....	81
2.1. Магнитные и индуктивные свойства полого и круглого цилиндрических проводников	81
2.1.1. Распределение магнитных полей бесконечно длинного круглого проводника с током	81
2.1.2. Индуктивность сплошного цилиндрического проводника с током. Параметр обрезания поля	83
2.1.3. Распределение магнитных полей бесконечно длинного трубчатого проводника с током.....	85
2.1.4. Индуктивность трубчатого проводника. Параметр обрезания поля.....	87
2.1.5. Добротность индуктивности цилиндрического проводника ...	89
Выводы по разделу 2.1	90
2.2. О методе управления погонной индуктивностью коаксиального кабеля с аксиальной плотностью токов	91
2.2.1. Физико-математическая модель расчёта.....	91

2.2.2. Распределение векторного потенциала внутри коаксиального кабеля	93
2.2.3. Распределение индукции магнитного поля внутри коаксиального кабеля	94
2.2.4. Управление индуктивностью коаксиального кабеля для сонаправленных и встречных токов	95
Выводы по разделу 2.2.....	99
3. Аналитические методы расчёта токовихревых интегральных индуктивностей для микросхем и систем на кристалле	101
3.1. Индукционные и индуктивные свойства проводящего цилиндра с азимутальной плотностью вихревого тока.....	101
3.1.1. Физико-математическая модель расчёта. Две ориентации силовых линий вихревого электрического поля.....	101
3.1.2. Энергетический баланс в системе	111
3.1.3. Частотная зависимость вносимой интегральной индуктивности трубчатого проводящего цилиндра	112
3.1.4. Основные физические параметры цилиндров с малой радиальной толщиной	113
3.1.5. Расчёты величины вносимой индуктивности проводящего цилиндра конечной толщины	114
Выводы по разделу 3.1	117
3.2. Учёт влияния магнитных свойств токов Фуко и омических потерь на значение вносимой индуктивности цилиндра	117
3.2.1. Физико-математическая модель расчёта.....	118
3.2.2. Частичный учёт магнитных свойств токов Фуко	120
3.2.3. Энергетический баланс системы	121
3.2.4. Индуктивные свойства сплошного немагнитного цилиндра	122
3.2.5. Оценки вносимой индуктивности цилиндра в низкочастотной области	123
3.2.6. Оценки отрицательной вносимой индуктивности в среднечастотной области	124
3.2.7. Оценки вносимой индуктивности в крайне высокочастотной области	126
3.2.8. Полный учёт магнитных свойств токов Фуко и их влияние на частотную зависимость индуктивности.....	127
Выводы по разделу 3.2.....	130
3.3. Поточковая частотно-независимая токовихревая индуктивность проводящей плёнки	133
Выводы по разделу 3.3	140
4. Индуктивные свойства ленточных микросоленоидов и способ увеличения их граничной частоты.....	141
4.1. Индуктивные свойства ленточных микросоленоидов	141

4.2. Эталонная индуктивность и индуктивности с малыми и большими потокоцеплениями.....	142
4.3. Добротность и плотности индуктивности соленоида в микро- и наноразмерах.....	144
4.4. О способе увеличения граничной частоты ленточного микросоленоида.....	148
Выводы по главе 4.....	152
5. Интегральная индуктивность планарного токового слоя для микронных и нано-технологий.....	155
5.1. Индуктивность планарных токовых систем.....	155
5.1.1. Распределение магнитных полей однородного токового слоя.....	155
5.1.2. Индуктивность плоского однородного токового слоя.....	158
5.1.3. Объёмная плотность индуктивности планарного токового слоя.....	159
5.1.4. Добротность плоского токового слоя. Характеристическая частота.....	160
Выводы по разделу 5.1.....	162
5.2. Законы распределения плотности переменного тока в проводящей среде и их влияние на частотные характеристики интегральной индуктивности.....	163
5.2.1. Физико-математическая модель расчёта вихревого электрического поля проводника.....	163
5.2.2. Интеграл полного давления в эффектах выталкивания и локализации планарного токового слоя в проводящей среде.....	164
5.2.3. Частотные зависимости индуктивности уединённого планарного токового слоя на СВЧ.....	167
5.2.4. Частотные зависимости индуктивности цилиндрического токового шнура на СВЧ. Сравнение с экспериментами.....	169
Выводы по разделу 5.2.....	170
6. Технологические прототипы физико-математических моделей индуктивности высокой симметрии.....	172
6.1. Индуктивность планарных токовых систем.....	172
6.2. Индуктивность цилиндрических токовых систем.....	176
6.3. Планарно-вырожденный отрезок коаксиального кабеля.....	182
6.4. Индуктивности цилиндрического индуктора и планарного углового сектора на радиальной компоненте вектора плотности тока.....	183
Выводы по разделу 6.....	185
7. Методы измерений и экспериментальные исследования интегральных индуктивностей высокой симметрии.....	187
7.1. Об одном методе измерения погонной индуктивности.....	187

7.2. О методе измерений индуктивности высокой симметрии со значением, близким к 1 нГн.....	189
7.3. Выбор метода измерения отрицательной вносимой индуктивности сплошного проводящего цилиндра с азимутальной плотностью вихревого тока.....	191
7.3.1. Физические свойства вносимой индуктивности.....	191
7.3.2. Физические свойства измерительного соленоида	196
7.3.3. Метод измерения индуктивности на пассивном фильтре первого порядка.....	197
7.3.4. Метод резонансного измерения индуктивности на пассивных фильтрах второго порядка	199
7.3.5. Способ измерения частотной зависимости индуктивности... ..	203
7.4. Измерения частотной зависимости динамической индуктивности PGS- и RPGS-индукторов в высокочастотном диапазоне. Сравнения с теорией	207
7.5. Измерения отрицательной и положительной индуктивности слоистой проводящей Al-Cu наноплёнки в низкочастотном диапазоне. Сравнения с теорией	213
7.6. Обработка результатов измерений отрицательной индуктивности макроскопического латунного цилиндра.....	219
7.7. О развитии способа создания токовихревой планарной индуктивности с высокой объёмной плотностью	223
Выводы по разделу 7.....	224
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	228
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	231

ВВЕДЕНИЕ

Исследованием физических свойств индуктивности, её проектированием и созданием человечество стало заниматься активно после изобретения радио Поповым и Маркони. В последние три десятилетия одно из направлений исследований было ориентировано на создание индуктивности микроскопических размеров для радиотехнических цепей ВЧ и СВЧ диапазона.

В наше время требования к индуктивности очень противоречивые. Она должна иметь малые геометрические размеры (сотни микрон и меньше), быть относительно большой по значению до 10 нГн и выше, иметь малую стоимость и удовлетворять огромное количество разнообразных заказчиков своим значением добротности и частотным диапазоном. Ибо в хорошей индуктивности нуждаются все, начиная от проектировщиков сложных функциональных блоков до специалистов, создающих самые маленькие ВЧ и СВЧ-системы на кристалле.

Уменьшение объёма интегральных микросхем привело к попыткам создания планарных индуктивностей в 60-х гг. XX в. Поскольку первые планарные индуктивности пришлось делать на печатных платах, то конструкторы и технологи столкнулись с новыми проблемами по их воплощению. Было обнаружено, что паразитные ёмкости индуктивности, лежащей на подложке, ограничивают диапазон рабочих частот, а её эквивалентное сопротивление ограничивает собственную добротность индуктивности (см. обзор [1]).

Применение технологии *GaAs* и сапфировых кристаллов к концу 80-х гг. позволило создать спиральные индуктивности порядка 25 нГн с частотой собственного резонанса более 3 ГГц. Индуктивности имели геометрические размеры до 500 мкм. Реализация планарной индуктивности на кремниевом кристалле [2] дала собственный резонанс индуктивности на частоте 2,47 ГГц при номинальном значении 9,3 нГн. Индуктивность имела плоскую квадратную форму с девятью витками при линейном размере 230 мкм. Ширина токопровода составила 6,5 мкм, а расстояние между полосками – 5,5 мкм. Максимальная добротность индуктивности оказалась равной 3.

Моделирование объёмных интегральных структур в начале 90-х гг. позволило перейти к разработке КМОП-устройств (английская аббревиатура *CMOS* – *Complementary Metal Oxid Semyconductor*) с использованием планарных индуктивностей ещё меньших размеров. В работе [3] для малошумящего усилителя в диапазоне частот 800–900 МГц была реализована спиральная индуктивность по КМОП-технологии с двумя слоями металла на кремниевом кристалле. В этом частотном диапазоне индуктивность в цепи нагрузки составляла от десятков до сотен нГн и имела толщину около 2 мкм.

В настоящее время в мире каждые пять лет в среднем появляется более 1000 работ по индуктивности. Их можно разделить на несколько направлений исследований. Одно из направлений – это патенты, взятые на индуктивность. Другое направление – статьи, в которых исследуются частотные свойства разнообразных индуктивностей. Обычно это одиночные токовые индукторы, разработанные технологами либо для интегральных микросхем, либо для систем на кристалле.

Токовым индуктором далее будем называть устройство, принадлежащее к интегральной индуктивности, выполненное из одного проводника разнообразной геометрической формы и расположенное на планарной поверхности. Индуктором можно называть планарные квадратные, прямоугольные и спиральные катушки индуктивности, находящиеся на изолированной подложке или на кристалле. Индуктором также могут быть отдельные планарные проводники прямоугольного и круглого поперечного сечения, одновитковые кольца, соленоиды, микросоленоиды, а также индуктивности, выполненные в виде шестиугольника, октаэдра, додекаэдра и других многоугольных проникающих геометрий.

Статьи обычно содержат информацию о частотных зависимостях индуктивности и добротности, которые дают заказчикам возможность отобрать из многочисленных патентов то, что им требуется. Иногда в таких работах приводятся эмпирические расчётные формулы и формулы, полученные замещением интегральной индуктивности схемами с сосредоточенными параметрами, по которым можно рассчитать значения индуктивности исследуемой конкретной геометрии. Практически во всех патентах геометрические размеры индуктивности не приводятся. Это считается ноу-хау патента.

Замечательным свойством любого одиночного планарного индуктора является то, что его индуктивность и добротность часто зависят от частоты. При этом обычно зависимость такова, что на низких частотах положительная индуктивность индуктора принимает значение, близкое к статическому значению, а на высоких частотах она начинает увеличиваться до тех пор, пока не достигнет частоты среза (граничной частоты).

Обнаружены и другие виды частотных зависимостей индуктивности для определённого диапазона частот. Для таких зависимостей добротность и индуктивность индуктора вначале увеличиваются, а затем плавно уменьшаются. В последние годы американские исследователи обнаружили существование частотно-независимых индуктивностей сверхтонких проводящих слоёв (Al+Cu толщиной от 200 нм), работающих в определённом диапазоне частот [4].

В работе [5] приведены частотные зависимости индуктивности ленточных микросоленоидов диаметром 800 мкм длиной от 1,6 до 2,4 мм с количеством витков от четырёх до шести, используемых в мощных

выходных каскадах и уже ставших классическими. В них всегда наблюдают одно и то же явление. На малых частотах индуктивность совпадает со своим статическим значением, оставаясь постоянной. Потом на низких частотах появляется дребезг индуктивности, который связан с механическим резонансом, возникающим на продольных механических колебаниях упругих витков катушки. Сами механические колебания обусловлены притяжением витков друг к другу из-за действия в соседних витках со-направленных токов Ампера. Такое притяжение возникает на каждом полупериоде переменного тока. При дальнейшем увеличении частоты до значений частоты среза, индуктивность увеличивается на порядок, а далее скачком теряет свои индуктивные свойства.

Увеличение индуктивности свёрнутой ленты микросоленоида с ростом частоты можно объяснить только увеличением линейной плотности тока, протекающего в ленте. Это возможно только в том случае, если переменный ток в ленте образует тонкий шнур, диаметр которого становится меньше, чем продольная ширина ленты. С приближением частоты тока к частоте среза токовый шнур «исчезает», и соленоид теряет свои индуктивные свойства.

Объяснить причины уменьшения диаметра токового шнура на СВЧ можно только на языке сил, удерживающих цилиндрический шнур. С ростом частоты внешний источник вбрасывает в соленоид всё меньше и меньше одноимённых зарядов, образующих ток, за полупериод изменения последнего. Это снижает объёмную плотность кулоновских сил расталкивания, действующих между движущимися в одном направлении зарядами. В то же время объёмная плотность стягивающих (амперовских) сил либо не изменяется, либо уменьшается с частотой медленнее, чем силы кулоновского взаимодействия. Частота среза приходится на тот момент, когда шнур начинает катастрофически сжиматься в пинч. Зарегистрировано, что при этом индуктивность одиночного индуктора резко возрастает, а при дальнейшем росте частоты соленоид теряет свои индуктивные свойства.

Ключевая работа по упомянутым физическим свойствам, проявляемым планарными индукторами на гигагерцах, вышла в 2001 г. Kuhn и Ibrahim [6], исследуя экспериментально протекание тока на высоких частотах в одиночных многovitковых квадратных, прямоугольных и спиральных индукторах, обнаружили эффект, прямо противоположный скин-эффекту. Переменный ток на гигагерцах образовывал локализованный в пространстве токовый шнур в проводнике индуктора с любой геометрией.

С ростом частоты токовый шнур уменьшал площадь своего поперечного сечения. Это приводило к тому, что омическое сопротивление и индуктивность индуктора увеличивались с частотой, а протекание переменного тока уже не подчинялось закону Ома. Такое шнурование тока

высокой частоты было ими названо «Current Crowding Effects» (эффекты токового сжатия). Дальнейшее увеличение частоты переменного тока приводило к ещё большей локализации токового шнура, которое обычно заканчивалось катастрофой. При приближении частоты тока к частоте среза токовый шнур сжимался в пинч, становился неустойчивым, и одиночный индуктор любой геометрии терял свои индуктивные свойства.

Физические причины такого различного поведения тока на высоких частотах исследованы в монографии. В ней впервые получен полный набор аналитических решений, описывающий законы распределения плотности переменных токов: планарного и с цилиндрической симметрией. Выяснено, в каких случаях протекания тока происходит скин-эффект, а в каких – эффекты сжатия тока. Впервые получены соотношения, описывающие частотные зависимости индуктивности индукторов, в которых учтено влияние зависимости распределения плотности тока на значение индуктивности.

Поразительно, но докладывая материал по теоретическому и экспериментальному обоснованию шнурования тока на различных международных конференциях по приборам СВЧ, мы обнаружили, что научные сотрудники и технологи, работающие в этой области, совершенно не знают об этих физических эффектах, открытых 15 лет тому назад.

В мае 1999 г. Yue и Wong, сотрудники Стэнфордского университета, опубликовали ещё одну ключевую работу [7], в которой предложили принципиально новое технологическое решение для построения разнообразных планарных индуктивностей. Они исследовали три варианта планарного размещения спирального индуктора, кремниевой подложки и экрана (сплошного или узорчатого). В первом варианте они поместили планарный прямоугольный спиральный индуктор на поверхность кремниевой платформы без металлического экрана и назвали его NGS (No Ground Shield).

Во втором варианте для экранировки магнитного поля спирали в направлении, противоположном подложке, был добавлен сплошной экран. Конструкция была названа SGS (Solid Ground Shield). В третьем варианте сплошной экран был заменён на узорчатый экран. Такая конструкция была названа PGS (Patterned Ground Shield). Две технологические конструкции, NGS и PGS, обнаружили частотные свойства индуктивности и добротности, которые принципиально отличались от частотных свойств индуктивности и добротности одиночных индукторов. Они давали растущие частотные зависимости индуктивности и добротности, которые достигали максимума на частоте около 2 ГГц и затем спадали к нулю на частотах около 7-8 ГГц. Как известно, нуль добротности соответствует нулю индуктивности.

Итальянскими технологами в 2002 г. в работе [8] была создана планарная индуктивность, которая своей цилиндрической геометрией отличалась от индуктивности, исследованной в [7]. В ней цилиндрическая

спираль была нагружена на слоистую цилиндрическую структуру, состоящую из модифицированных слоёв кремния, лежащего на проводящей медной подложке. Узорчатый экран имел радиальную структуру. Эксперименты не только подтвердили вид частотных зависимостей индуктивности и добротности, найденных в [7], но и обнаружили тот факт, что на гигагерцах индуктивность RPGS-индуктора (Radial Patterned Ground Shield) может обратиться в нуль, а на более высоких частотах даже стать отрицательной.

Другой вид частотных характеристик PGS-индуктора [7, 8] можно объяснить тем, что силовые линии его магнитного поля были нагружены на плёнку из модифицированных слоёв кремния, которая прилегала к спиральному индуктору. Ток индуктора в полупроводящем веществе создавал своё переменное магнитное поле и магнитное поле отклика, формируемое токами Фуко. Взаимодействие тока индуктора с суммарным магнитным полем изменяло частотную характеристику PGS-индуктора таким образом, что проблемы частоты среза в нём не возникало.

Ниже в монографии получен теоретический вид частотных характеристик индукторов, нагруженных на проводящую плёнку. Впервые объяснены также физические причины такого существенного изменения вида частотных характеристик различных PGS-индукторов.

Но термин «отрицательная индуктивность» оказался для технологов, работающих на СВЧ, таким фантастическим и непонятным, что измерения итальянцев многими технологами были поставлены под сомнение. Вероятно поэтому в своей монографии [9], выпущенной значительно позже, они совсем отказались от приоритета в собственном открытии и даже не упомянули о нём.

Причины такого отказа от приоритета в интереснейшем физическом явлении, возможно, кроются в том, что отрицательная индуктивность не вписывается в привычные понятия, которые формируются при использовании мощного вспомогательного средства расчёта СВЧ цепей. Речь идёт о диаграмме Смита, который бесконечную комплексную плоскость свернул с помощью конформного отображения в плоскость, ограниченную единичным кругом. Эта диаграмма позволяет рассчитывать комплексные сопротивления СВЧ цепей, которые могут быть представлены двухполюсниками или четырёхполюсниками. Такие расчёты импеданса и адмитанса (полной проводимости) позволяют создавать самые разнообразные активные и пассивные устройства, согласующие СВЧ генераторы с нагрузкой.

Обычно согласование СВЧ генератора с нагрузкой характеризуется комплексным коэффициентом отражения, который связан с входным сопротивлением и характеристическим сопротивлением линии передачи. Приведённое сопротивление позволяет выразить активную и реактивную части, используемые в диаграмме Смита, через параметры, которые часто

называют S-параметрами. Параметр S_1 характеризует приведённое активное сопротивление согласующей линии, а параметр S_2 – приведённое реактивное сопротивление согласующей линии.

Физическая трактовка приведённых коэффициентов Смита S_1 и S_2 позволяет различать комплексные сопротивления, которые носят либо ёмкостный, либо индуктивный характер. При ёмкостном характере $S_2 < 0$, а при индуктивном – $S_2 > 0$. Диаграмма Смита может включать в свою трактовку даже отрицательные активные сопротивления (S_1 может быть меньше 0), но не включает в свой арсенал физическое понятие «отрицательная индуктивность». По мнению прикладников, в этом случае индуктивность просто приобретает ёмкостный характер. Но термины «ёмкостный характер», «индуктивный характер», «индуктивность» и «ёмкость» описывают разные физические понятия.

Позднее американские технологи из штата Огайо снова натолкнулись на тот факт, что многослойная интегральная индуктивность, выполненная в виде спирали, нагруженной на сверхтонкие проводящие слои из алюминия и меди (толщиной больше 2 мкм), в мегагерцовом диапазоне частот может стать отрицательной. Они, в отличие от итальянских коллег, смело запатентовали способ формирования такого класса многослойных индуктивностей [4].

Микроскопическая негa-индуктивность (nega-inductance) может быть использована в новейших технологиях создания индуктивности, как в интегральных микросхемах, так и в системах на кристалле. Прежде всего, её можно использовать в качестве пассивного компенсатора паразитных индуктивностей радиотехнических цепей в ЧИПах и интегральных микросхемах. Негa-индуктивность может стать новым звеном активной или пассивной радио- или электротехнической цепи. В ближайшие 30–40 лет специалисты по микросхемотехнике и технологи будут исследовать проявление новых свойств отрицательной индуктивности.

В монографии впервые показано, что отрицательная индуктивность появляется только в том случае, когда силовые линии магнитного поля одиночного индуктора нагружены на проводящее или полупроводящее вещество. Индуктивность, проявляющая такие свойства, названа нами «вносимой». Частотная зависимость вносимой динамической индуктивности всегда имеет нули на двух характеристических частотах. Нули индуктивности делят весь частотный диапазон на три интервала: низкочастотный, среднечастотный и высокочастотный. В среднечастотном диапазоне индуктивность всегда отрицательна. Мы считаем, что её новые физические свойства объясняются частотно-зависимым магнетизмом токов Фуко.

Расчёты, выполненные для тонких плёнок из различных проводящих материалов, показывают, как можно перемещать первый ноль индуктивности внутри частотного диапазона от 1 МГц до 10 ТГц, изменяя

проводимость цилиндрической плёнки и её геометрические размеры. Отличительным свойством вносимой динамической индуктивности является то, что на очень высоких частотах она перестаёт зависеть от частоты, принимает постоянное положительное значение, равное одной трети от масштаба, и не имеет граничной частоты. Используя такую индуктивность, технолог будет иметь широкий набор значений разнообразных плёночных индуктивностей, выполненных по единой технологии и работающих на разных фиксированных частотах.

Чтобы убедиться в том, что индуктивность может принимать отрицательное значение не только в микроскопических размерах, но и в макроскопических, мы провели простые эксперименты. Были плотно намотаны медным проводом с диаметром 0,23 мм три разные катушки, на картонном каркасе радиусом 3,5 мм, в один слой. Первая катушка содержала 98 витков, вторая – 100 витков, а третья – 200 витков. Прибор В7-80 в режиме измерения индуктивности показал, что первая катушка имела индуктивность 19,7 мкГн, вторая – 22,1 мкГн, а третья – 44,9 мкГн. Расчёты по формулам для бесконечно длинного соленоида дали для первой катушки индуктивность 20,6 мкГн, для второй – 21,0 мкГн и для третьей – 42,0 мкГн. Они оказались очень близкими к измеренным значениям и укладывались в 7%-й диапазон погрешности измерений.

Затем в эти катушки был помещён латунный стержень диаметром 6,9 мм так, чтобы он заполнял всё внутреннее пространство каждой отдельной катушки. Силовые линии магнитного поля катушек оказались нагружены на латунь. Тем же прибором были замерены новые индуктивности. Они изменили свои значения. Первая катушка уменьшила индуктивность до 9 мкГн, вторая катушка – до 9,6 мкГн, третья катушка – до 19,8 мкГн. Как видно из приводимых значений, индуктивности всех катушек уменьшились. Этот факт можно объяснить только тем, что введение проводящего вещества – латуни – вносит отрицательную индуктивность. Легко вычислить её значение для этих катушек. Индуктивность латуни имела значение: для первой катушки – 0,7 мкГн; для второй катушки – 12,5 мкГн; а для третьей катушки – 25,1 мкГн.

Вычисление средней объёмной плотности отрицательной индуктивности латуни (на сто витков соленоида) даёт значение, достигнутое в проведённом эксперименте: $-13,5 \text{ Гн/м}^3$. Результаты эксперимента приводят к мысли, что отрицательная индуктивность – это не измерительный миф технологов, а проверенное исследователями в разное время и в разных местах земного шара доказательство того, что нега-индуктивность (nega-inductance) – обоснованная физическая реальность. В монографии предложены методы измерения объёмной и планарной отрицательной макроскопической индуктивности для проводников и полупроводников.

В настоящее время для аналоговых микросхем СВЧ-диапазона используют варианты интегральной индуктивности, выполненной в виде проводящих полосок прямоугольного поперечного сечения, которым придана круглая или прямоугольная форма спирали. Технология позволяет получать индуктивности от единиц до сотен микрогенри в масштабе занимаемой площади 500×500 мкм со многими слоями.

Уменьшение же геометрических размеров таких одиночных индукторов до квадрата 100×100 мкм в одном слое приводит к уменьшению достигаемых значений индуктивности от 1 до 10 нГн и с добротностью от 2 до 5. Подстройка индуктивностей может осуществляться запайкой перемычек контактных площадок, прилегающих к индуктору. Малые индуктивности (до единиц наногенри) выполняются в виде либо прямого проводника прямоугольного сечения малой длины, либо петли в форме круга или квадрата.

В 70-х гг. XX в. П.Л. Калантаров и А.А. Цейтлин разработали математические методы расчёта, которые базировались на геометрической теории индуктивности [10]. Эта теория исходила из положения, что индуктивность катушки любой геометрии с любым количеством витков зависит только от числа витков, её геометрии и занимаемого объёма. Предполагалось, что индуктивность не зависит от геометрии растекания тока в проводящем пространстве и на неё не влияет зависимость плотности тока от поперечных координат.

Так, например, индуктивность кольца описывается одной формулой, зависящей от геометрических размеров кольца. Недостаток формулы заключается в том, что в микрометрическом диапазоне геометрических размеров для некоторых колец можно получить отрицательные значения индуктивности. Они выпадают из определения индуктивности геометрической теорией.

Современные методы расчёта индуктивностей обычно сводятся к замене интегральной индуктивности схемой сегментации с сосредоточенными параметрами. В таком сегментировании возможно применение расширенных и компактных моделей, подгоночные параметры L , C и r которых подбираются при компьютерной оптимизации. При этом номиналы сопротивлений, индуктивностей и паразитных ёмкостей получают путём суммирования номиналов последовательно соединённых элементов. Такой метод расчёта требует применения программных симуляторов (Системы Автоматизированного Проектирования) электрических схем, таких как HSPICE или Touchstone.

Как было выяснено, построение модели на сосредоточенных параметрах – самый быстрый метод моделирования, применяемый на практике. Его большой недостаток – отсутствие учёта толщины микрополоскового проводника, который проявляется в том, что реактивные сопротивления катушки индуктивности могут иметь на определённых частотах расходящиеся значения.

За последние 40 лет появилось огромное число систем автоматизированного проектирования, позволяющих рассчитать интегральные индуктивности практически любых геометрий для любых частот. Конкуренция среди вычислительных технологий огромная. Мы не будем заниматься их сравнительными характеристиками. Скажем только, что для одной и той же индуктивности разные системы САПР дают разные результаты, которые совпадают с точностью от 20 до 50 %. Причина этого в том, что математические модели и расчётные методы, применяемые в разных САПР, существенно отличаются друг от друга.

Здесь следует упомянуть о самой мощной и очень развитой системе математического моделирования HFSS (High Frequency Structural Simulator) фирмы ANSYS Inc., которая применяется для проектирования встроенных в кристалл пассивных элементов, корпусов интегральных схем, разводки печатных плат, антенн и согласующих СВЧ-устройств. Она базируется на электродинамическом моделировании трёхмерных СВЧ-структур методом конечных элементов (МКЭ). МКЭ – численный метод решения дифференциальных уравнений в частных производных, а также интегральных уравнений, возникающих при решении задач прикладной физики. Широко используется также для решения задач электродинамики.

На наш взгляд, достоинство этого метода перед общеизвестными САПР заключается в том, что при расчёте интегральной индуктивности он учитывает влияние на конечное значение индуктивности геометрических размеров проводящего экранного (охранного) контура. Как известно, при проектировании пассивных элементов в малых размерах на кристалле необходимо их экранирование от воздействия электромагнитных полей соседних приборов.

В монографии [11] можно узнать о том, что интегральные индуктивности в типовом КМОП процессе для современных технологий систем на кристалле делают только в виде плоских квадратных спиральных катушек на основе верхних слоёв металла. При этом в расчётах таких катушек снова используют метод сосредоточенных параметров её эквивалентной схемы. В формулу для добротности такой катушки входит толщина скин-слоя и два подгоночных параметра, которые учитывают коэффициенты омических потерь и потерь на излучение. Влияние экранирующего проводящего контура на расчёты никак не учитывается. Как будто его там нет. Приводимая интегральная индуктивность на площади 110×110 мкм для частоты 2 ГГц, выполненная на пяти слоях, имеет величину 11,4 нГн и добротность 3,4.

Метод HFSS не идеален и имеет некоторые недостатки. К ним можно отнести тот факт, что при разбиении на конечные элементы используется только класс функций, которые на границе конечного элемента обращаются в нуль. Это позволяет стыковать конечные элементы друг с другом, но сильно сужает возможные классы функций, которые могут удовлетворять граничным условиям для тех же уравнений в частных производных. Они будут давать уже другие числовые результаты.

Второй недостаток заключается в том, что невозможно узнать, какие конкретные уравнения математической физики решаются в программе моделирования. Это ноу-хау программного обеспечения. Но ведь только из вида уравнений можно определить адекватность математической модели конкретному физическому процессу.

Ещё один недостаток метода заключается в том, что программы последних лет не учитывают в своих расчётах современные физические явления протекания тока на высоких частотах в проводниках, в которых может возникать не только скин-эффект, но и шнурование тока.

Несмотря на перечисленные недостатки, он является достаточно точным методом численного моделирования. В нашей монографии мы сравнивали полученные нами результаты аналитических вычислений некоторых индуктивностей высокой симметрии с результатами, полученными методом HFSS.

Как известно, в интегральных микросхемах СВЧ диапазона различают индуктивности с сосредоточенными и распределёнными параметрами. Считается, что элемент с сосредоточенными параметрами имеет максимальный геометрический размер длины l значительно меньший, чем длина волны λ в линии. В этом случае можно пренебречь фазовым сдвигом на длине элемента. В противном случае индуктивность считается элементом с распределёнными параметрами.

Характерный геометрический размер индуктивности в микросхемах и КМОП устройствах имеет верхнее значение около 250 мкм. Эти индуктивности работают на частоте порядка 1 ГГц. Длина волны, соответствующая этой частоте, равна 1,88 м. Она отличается от характерного геометрического размера микроскопической индуктивности в тысячи раз. Это указывает на то, что все микроскопические индуктивности относятся к элементам с сосредоточенными параметрами и фазовый сдвиг у них между током и потоком остаётся нулевым до частот порядка 1 ТГц. Этот факт мы и используем в наших расчётах.

3D микроиндуктивность, как интегральный элемент цепи, проявляет свои индуктивные свойства, которые обусловлены несколькими аспектами: топологией, геометрией, занимаемым объёмом индуктора, числом витков, геометрией растекания плотности тока в индукторе и, самое важное свойство, – нагружены ли силовые линии магнитного поля индуктора на вещество, которое может проявлять магнитные или проводящие свойства.

Для пояснения сказанного обсудим простой пример. На рис. 1 приведён полый проводящий цилиндр одиночного индуктора с аксиальным направлением плотности тока j_1 . Как показано в [10], его индуктивные свойства зависят от геометрических размеров цилиндра: внутреннего радиуса R_1 , внешнего радиуса R_2 и высоты цилиндра h . Но, в отличие от [10], такой полый цилиндр может иметь три разных статических значения индуктивности (в [10] приведено только одно).

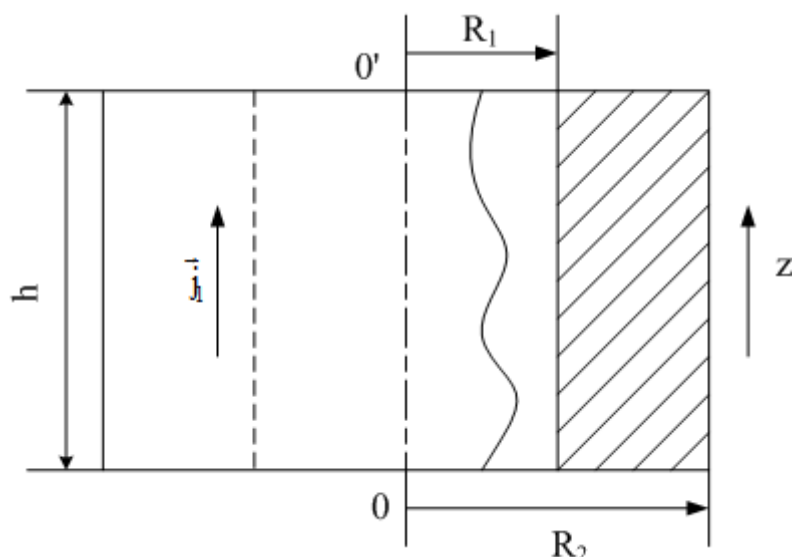


Рис. 1. Вид полого проводящего цилиндра

Это будет зависеть, в первую очередь, от направления протекания плотности тока в цилиндре. Первое значение индуктивности можно получить, если направить плотность тока по оси цилиндра $00'$ (совпадает с осью z цилиндрической системы координат). В этом случае реализуется аксиальная плотность тока $\vec{j}_1 = (0, 0, j_z)$. Ток входит в площадь круга, ограниченную радиусами R_1 и R_2 , и выходит из такой же площади.

Фундаментальное уравнение магнитостатики

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (1)$$

позволяет по заданному распределению аксиальной плотности тока в правой части вычислить распределение магнитного поля $\vec{B} = (0, B_\phi, 0)$ в пространстве, просчитать магнитный поток Φ , создаваемый этим полем, и из связи тока и потока определить статическую индуктивность. К её значению стремятся экспериментальные частотные характеристики любой СВЧ-индуктивности на низких частотах.

Как видно из (1), индуктивность такого протекания тока будет зависеть не только от направления вектора $\vec{j}$ в пространстве, но ещё и от того, по какому закону распределена плотность тока в пространстве.

На рис. 2 представлен вид сверху того же проводящего цилиндра, но с азимутальным направлением плотности тока $\vec{j}_2 = (0, j_\phi, 0)$. Для создания такого тока в цилиндре необходимо сделать разрез АВ, указанный на рис. 2, и подвести ток к плоскостям этого разреза. При таком вводе тока правая часть в (1) изменяется. Изменяется и направление возбуждаемого магнитного поля, а стало быть, и связанный с ним поток и само значение индуктивности.

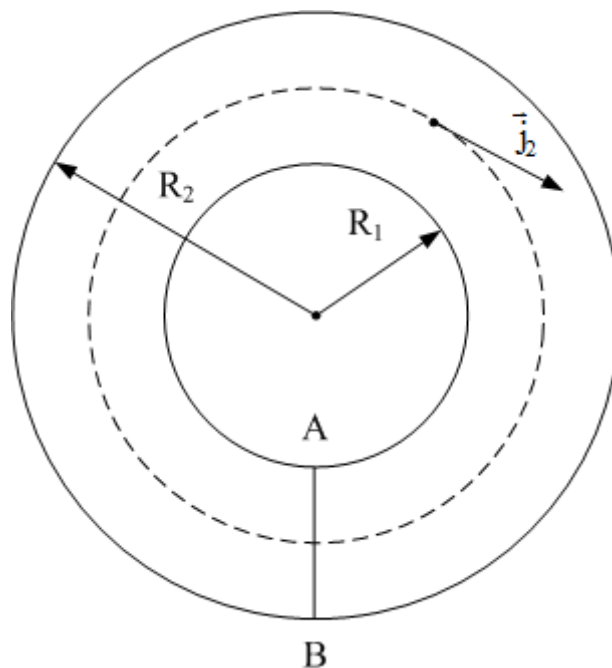


Рис. 2. Азимутальное направление плотности тока в цилиндре

На рис. 3 показан вид сверху проводящего цилиндра, в котором формируемая плотность тока имеет радиальное направление в пространстве $\vec{j}_3 = (j_r, 0, 0)$. Такой ток можно создать, подводя его к боковым поверхностям цилиндра. Это, в свою очередь, приведёт к формированию другого распределения магнитного поля, потока и, следовательно, индуктивности.

Здесь сразу нужно оговориться, что полученные различные математические соотношения для трёх индуктивностей уединённого цилиндра только будут давать правильный порядок величины индуктивности. Одна из причин этого в том, что при реализации технологии индуктивности в виде полого цилиндра, любой подвод тока может быть осуществлён только в определённую точку или конечную область на поверхности цилиндра. То же самое наблюдается при подключении индуктивностей других геометрий.

Растекание тока из точечного источника или области и втекание в точечный или распределённый приёмник будут создавать дополнительные компоненты плотности тока, учесть которые в расчётах не представляется возможным. Но они могут изменять значение индуктивности в разы от расчётных значений. В этом смысле предлагаемый метод позволяет рассчитывать либо уединённые индуктивности с высокой симметрией, либо такие же индуктивности, силовые линии магнитного поля которых нагружены на проводящий слой.

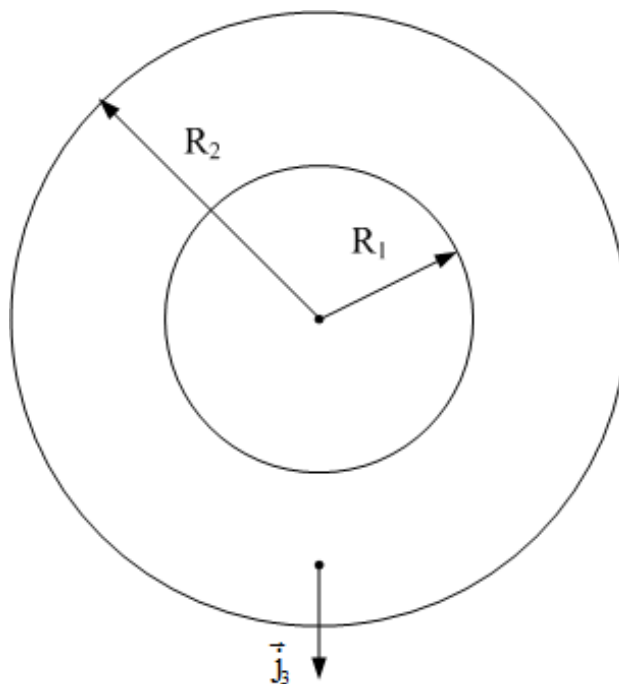


Рис. 3. Радиальное направление плотности тока в цилиндре

Но отмеченный недостаток метода можно превратить в достоинство, поскольку результат эксперимента теперь будет зависеть от положений точечных или распределённых вводов тока. Это позволит легко подстраивать точное значение получившейся индуктивности путём изменения положения точечных или распределённых вводов тока.

Если в такой проводящий цилиндр вставить какие-либо материалы, обладающие магнитными или проводящими свойствами, то индуктивность такого цилиндра, магнитные силовые линии которого нагружены на внесённое вещество, будет принципиально изменять свои частотные свойства. Индуктивность теперь будет зависеть не только от свойств и направления плотности тока в индукторе, но и от того, в каком месте и какой объём занимает внесённое вещество. Это вещество по отношению к переменным электрическим и магнитным полям может обладать линейными и нелинейными характеристиками, влияющими на конечную индуктивность.

Какую же нишу занимают предлагаемые нами методы расчётов и топологические принципы построения на этих методах класса интегральных индуктивностей с выявленными новыми свойствами? Прежде всего, методы не используют замену интегральной индуктивности секционными схемами с сосредоточенными параметрами.

Предлагаемые методы дополняют и развивают теорию магнитостатической и электродинамической интегральной индуктивности. Согласно А.Н. Матвееву [12], индуктивность контура может иметь два

определения. Первое определение связывает поток магнитной индукции Φ сквозь фиксированную неподвижную площадь с током i , который этот поток создаёт:

$$\Phi = L_1 i, \quad (2)$$

где L_1 – постоянный положительный коэффициент пропорциональности, не зависящий от силы тока и индукции магнитного поля. Этот коэффициент называется индуктивностью контура. Соотношение (2) справедливо для постоянного тока. Оно может сохранять свой вид и для переменного тока при условии, что фазовый сдвиг между током и потоком остаётся равным нулю.

В связи с этим индуктивность L_1 следует назвать статической. Как показано в монографии, она остаётся положительной только для индукторов с одним током. В системах с двумя независимыми токами в индукторе одной геометрии она начинает зависеть от отношения токов и позволяет предложить метод управления её значением в 3D-системах.

На определении (2) мы построили первый метод расчёта магнитостатической индуктивности. Он заключается в следующем:

1) по заданному геометрическому распределению плотности постоянного тока рассчитывается распределение магнитных полей, формируемых во внутреннем и внешнем пространствах, выбранных по отношению к проводнику;

2) определяется величина магнитного потока, сцепленного с внутренней областью;

3) определяется величина магнитного потока, сцепленного с внешней областью;

4) вычисляются потоковая и токовая части индуктивности;

5) находится частотная зависимость добротности, из которой определяются масштабы характеристических частот для индуктивности конкретной геометрии;

6) полученные для различных геометрий растекания тока значения индуктивности сравниваются с экспериментом и делаются выводы о соответствии предложенной физико-математической модели известным экспериментам.

Второе определение справедливо для индуктивности, которая проявляет свои электродинамические свойства. Оно следует из определения энергии магнитного поля W , которая создаётся силой тока i , текущим по контуру с индуктивностью L_2 :

$$W = L_2 i^2 / 2. \quad (3)$$

В связи с этим определение (3) следует назвать энергетическим определением индуктивности. На определении (3) мы строим метод расчёта динамической вносимой индуктивности. Для такого класса индуктивностей принятый ранее порядок расчёта был изменён:

1. Задаём внешнее переменное магнитное поле $\vec{B}$ высокой симметрии.

2. Направляем его в немагнитный проводящий цилиндр так, чтобы ось цилиндра и направление внешнего магнитного поля совпадали.

3. Записываем первое уравнение Максвелла, из которого по известной правой части определяем распределение вихревого электрического поля $\vec{E}_{rot}$.

4. Привлекая закон Ома в дифференциальной форме $\vec{j} = \vec{E}_{rot} / \rho$, находим пространственное распределение плотности вихревых токов.

5. Интегрируя распределение плотности тока через поперечную току площадь, получаем значение полного тока, возникающее в проводящем цилиндре.

6. Используя баланс энергий, поступающих в систему, для значений, усреднённых по периоду изменения поля, получаем вносимую индуктивность в случае, когда квадрат внешнего магнитного поля сократится в обеих частях равенства баланса энергий.

Предложенный метод расчёта оказывается справедливым для произвольного фазового сдвига между током и потоком. В монографии показано, что при анализе магнетизма токов Фуко, возникающего в проводящем веществе, внесённом в магнитное поле, энергетическая индуктивность в некотором диапазоне частот может быть и отрицательной.

С другой стороны, вычисление средней за полупериод потоковой индуктивности показывает, что она может быть частотно-независимой и как положительной, так и отрицательной. Это указывает на возможные проявления разных физических свойств токов Фуко: диамагнитных и парамагнитных. Проявление указанных свойств было блестяще подтверждено в экспериментальных исследованиях сверхтонких проводящих слоёв, проведённых в штате Огайо [4].

Мы предлагаем методы расчёта индуктивностей с высокой симметрией. Это одномерные (1D), двумерные (2D) и трёхмерные (3D) индуктивности. Они могут быть статическими; зависящими от частоты, а также частотно-независимыми для ограниченного диапазона частот. Друг от друга их отличает геометрия самой индуктивности, геометрия растекания тока, распределение плотности тока по поперечному сечению и вносимое в индуктивность проводящее вещество.

Одним из достоинств развиваемых аналитических методов является то, что они позволяют ввести важнейшие сравнительные технологические параметры для индуктивностей различной размерности. Под 1D-индуктивностью далее будем понимать индуктивность, в которой один из

пространственных размеров значительно больше двух других. Для 1D-индуктивности можно ввести параметр линейной плотности индуктивности (погонную индуктивность, Гн/м)

$$\tau_L = L / l. \quad (4)$$

Под 2D-индуктивностью далее будем понимать индуктивность, в которой два пространственных размера значительно больше третьего. Для 2D-индуктивности можно ввести параметр поверхностной плотности (Гн/м²)

$$\sigma_L = L / S. \quad (5)$$

Под 3D-индуктивностью далее будем понимать индуктивность, в которой все пространственные размеры оказываются величинами одного порядка. Для 3D-индуктивности можно ввести параметр объёмной плотности (Гн/м³)

$$\rho_L = L / V. \quad (6)$$

Три сравнительные характеристики позволяют выбрать для планарной технологии максимальное или минимальное значение перечисленных плотностей индуктивности, превысить или понизить которые не удастся никакими ухищрениями.

Удивительно, но и в современных технологиях создания планарной индуктивности, и в мощных системах САПР почему-то эти важнейшие параметры индуктивности даже не рассматриваются. Причина этого видится нам в том, что, в конечном итоге, проектировщики всегда рассматривают интегральную индуктивность как комплексное, не имеющее размеров, сосредоточенное сопротивление, действительная и мнимая части которого позволяют рассчитывать только частотные зависимости сосредоточенной индуктивности и добротности.

Несколько слов о различных математических представлениях индуктивности классического соленоида, имеющего N витков. Когда он намотан вплотную в один слой проводом диаметром d и имеет радиус каркаса R , то его индуктивность обычно представляется в виде (см., например, [12])

$$L = \mu_0 S N^2 / l = \mu_0 n^2 V, \quad (7)$$

где μ_0 – магнитная постоянная; $n=N/l$ – число витков на единицу длины соленоида; $l=N \cdot d$ – длина соленоида; S – площадь поперечного сечения; V – объём соленоида.

Из (7) следуют очевидные физические утверждения, что:

1) индуктивность соленоида при постоянном числе витков на единицу длины пропорциональна квадрату числа его витков;

2) индуктивность такого соленоида можно увеличить только увеличением его объёма.

Эти утверждения оказываются несостоятельными, если ввести масштаб индуктивности L_* и (7) представить в виде

$$\frac{L}{L_*} = \frac{R}{d} N, \quad (8)$$

где $L_* = \mu_0 \pi R$ – масштаб индуктивности классического соленоида.

Из (8) можно получить иные физические следствия:

1) индуктивность соленоида при $R/d = \text{const}$ линейная функция по числу витков N , а не квадратичная;

2) для одного и того же количества витков N можно реализовать две различные индуктивности, причём первая будет больше, а вторая меньше (предполагается, что условие отношения между диаметрами применяемых проводников $d_1 < d_2$ выполнено);

3) из этих двух индуктивностей большая индуктивность обладает меньшим объёмом, поскольку их отношение $V_1/V_2 = d_1/d_2 < 1$. Как показано в монографии, при одинаковом токе первая индуктивность получается больше вследствие увеличения продольной линейной плотности тока первой индуктивности по сравнению со второй.

Линейная зависимость индуктивности от числа витков, вытекающая из математического представления (8), была подтверждена в экспериментах, проводимых американскими технологами фирмы PARC с ленточными микро соленоидами [5]. Они имели одинаковое отношение $R/d \approx 1$ и различное количество витков N .

Приведённый пример указывает на то, что при получении аналитических формул индуктивности высокой симметрии в них всегда нужно выделять масштаб, который определяет исходная геометрия. Иначе можно сделать неправильные физические выводы. Масштаб позволяет определить границы диапазона изменения индуктивности в рассматриваемой физико-математической модели. Рассчитанные границы диапазона изменения индуктивности обычно всегда ограничены и не могут превышать значений, отличающихся на порядок больше или на порядок меньше масштаба индуктивности системы.

В первой главе монографии предложен аналитический метод расчёта статической планарной индуктивности для нулевого фазового сдвига, существующего между током и потоком. Исследованы магнитные и индуктивные свойства планарного токового 2D-кольца с азимутальной ориентацией в пространстве вектора плотности тока. Получены распределения магнитных полей внутри и вне кольца. Рассчитана потоковая часть индуктивности токового кольца с конечной радиальной толщиной и её добротность. Проведено моделирование частотных свойств индуктивности токового кольца в симуляторе HFSS – Ansoft, сделаны сравнения с результатами эксперимента, моделирования и аналитических вычислений.

Рассчитан коэффициент увеличения планарной индуктивности. Его можно достигнуть применением 2D-спиралей Архимеда и обобщённых спиралей. Для этого построена физико-математическая модель расчёта магнитного поля и индуктивности спиралей. Сделаны расчёты для различного числа витков и различных начальных и конечных радиусов спиралей.

В главе 2 разработаны алгоритмы расчёта погонных 3-D индуктивностей цилиндрической симметрии с аксиальным направлением в пространстве плотности тока. Для этого исследованы магнитные и индуктивные свойства полого и круглого цилиндрических проводников с током. Получены распределения магнитных полей и их индуктивность. Введён параметр обрезания поля. Рассчитана добротность индуктивности цилиндрического проводника.

Исследованы индукционные и индуктивные свойства коаксиального кабеля. Получены радиальные распределения векторного потенциала и индукции магнитного поля внутри коаксиального кабеля. Предложен метод управления индуктивностью коаксиального кабеля для сонаправленных и встречных токов в центральной жиле и оплётке.

В главе 3 разработаны аналитические методы расчёта интегральных индуктивностей для микросхем и систем на кристалле. Для этого исследованы индукционные и индуктивные свойства трубчатого проводящего цилиндра с азимутальным направлением в пространстве вектора плотности вихревого тока. Из энергетического баланса в системе получена частотная зависимость вносимой интегральной индуктивности трубчатого проводящего цилиндра. Рассчитаны основные физические параметры цилиндров с малой радиальной толщиной и приведены значения величины вносимой индуктивности проводящего цилиндра конечной толщины.

Выполнен учёт влияния магнитных свойств токов Фуко и омических потерь на значение вносимой токовихревой индуктивности сплошного немагнитного цилиндра. Выяснены его частотные свойства. Показано, что индуктивность такого цилиндра может быть положительной (проявляется парамагнетизм токов Фуко) и отрицательной в среднечастотной области (проявляется диамагнетизм токов Фуко). Исследовано влияние на частотную зависимость индуктивности радиальной составляющей магнитного поля отклика вещества.

В главе 4 проведены теоретические исследования физических свойств индуктивности ленточных микросоленоидов. Введены понятия эталонной индуктивности и индуктивностей с малым и большим потокоцеплением. Рассчитаны добротности и объёмные плотности индуктивности соленоида в микро- и наноразмерах. Предложен способ увеличения частоты среза ленточного микросоленоида.

В главе 5 исследованы проблемы получения больших, по сравнению с масштабом, значений интегральных индуктивностей планарного токового слоя для микронных технологий. Для этого исследованы индукционные и индуктивные свойства планарных токовых систем для однородного токового слоя. Вычислены индуктивность, добротность и объёмная плотность индуктивности планарного токового слоя. Проведены сравнения физических параметров токового слоя и известных индуктивных модификаций.

Выяснено влияние на частотные характеристики интегральной индуктивности распределения плотности переменного тока в проводящей среде. Для этого построена физико-математическая модель расчёта вихревого электрического поля проводника планарной и цилиндрической симметрии. Получены частотные зависимости индуктивности уединённого планарного токового слоя и цилиндрического токового шнура на СВЧ. Проведено сравнение с экспериментами.

В главе 6 обсуждаются технологические прототипы предложенных физико-математических моделей индуктивности высокой симметрии. Предложены четыре класса прототипов интегральной индуктивности: 1) индуктивность планарного токового слоя; 2) индуктивность цилиндрических токовых систем; 3) планарно-вырожденный отрезок коаксиального кабеля; 4) индуктивности на радиальной плотности тока.

В главе 7 предложены методы измерений положительной и отрицательной индуктивностей, обсуждаются известные и предложены оригинальные экспериментальные исследования интегральных индуктивностей высокой симметрии. Предложены методы измерений погонной индуктивности и индуктивности со значением, близким к 1 нГн.

Выбран метод измерения потоковой отрицательной индуктивности сплошного макроскопического проводящего цилиндра с азимутальным направлением в пространстве вектора плотности вихревого тока. Для этого конкретизированы физические свойства вносимой индуктивности латунного стержня и измерительного соленоида. Обсуждаются достоинства и недостатки методов измерения индуктивности на низкочастотных полосовых фильтрах первого и второго порядков. Обработаны результаты резонансных измерений отрицательной индуктивности латунного цилиндра.

В заключении обсуждаются результаты, полученные в монографии, представляющие интерес для микро- и нанотехнологий изготовления интегральной индуктивности.

1. МЕТОД РАСЧЁТА СТАТИЧЕСКОЙ ПЛАНАРНОЙ ИНДУКТИВНОСТИ ДЛЯ НУЛЕВОГО ФАЗОВОГО СДВИГА МЕЖДУ ТОКОМ И ПОТОКОМ

Одним из мощных методов расчёта магнитостатических полей по праву считается закон Био – Савара – Лапласа [12]. Он позволяет выяснить физические закономерности распределения магнитных полей, создаваемых простейшими токовыми системами. В современных математических обозначениях он записывается в виде:

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(\overrightarrow{dl} \times \overrightarrow{r})}{r^3}, \quad (1.1)$$

где $\overrightarrow{dB}$ – элементарная магнитная индукция поля, создаваемая элементом проводника с током $I\overrightarrow{dl}$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_H}{M}$ – магнитная постоянная; $\overrightarrow{dl}$ – элементарный вектор, равный по модулю элементарной длине dl проводника и совпадающий по направлению с током (элемент проводника); I – сила тока; $\overrightarrow{r}$ – радиус-вектор, проведённый от элемента проводника к точке наблюдения, в которой определяется магнитная индукция; ($\times$ – обозначение векторного произведения указанных векторов.

Взаимное расположение векторов формулы (1.1) в пространстве представлено на рис. 1.1.

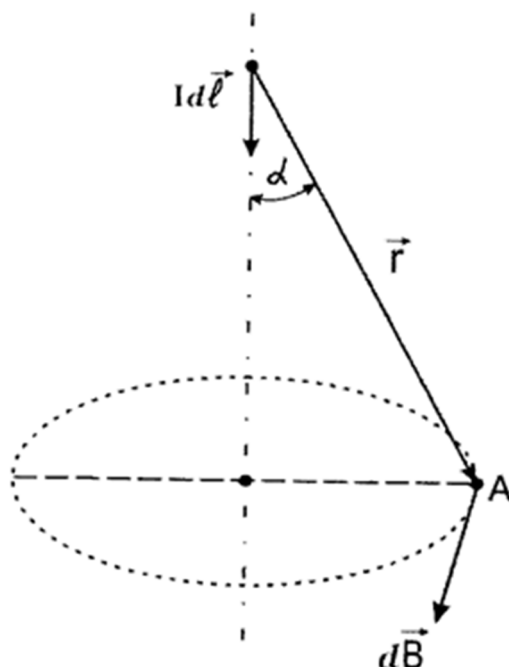


Рис. 1.1. Расположение векторов в формуле (1.1)

Здесь α – угол между векторами $Id\vec{l}$ и $\vec{r}$; радиус-вектор $\vec{r}$ совпадает с образующей конуса. Вектор $d\vec{B}$ начинается в точке наблюдения A , проводится по касательной к окружности, лежащей в основании конуса в плоскости, перпендикулярной направлению вектора $Id\vec{l}$. По свойству векторного произведения вектор $d\vec{B}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $Id\vec{l}$ и $\vec{r}$.

Используя принцип суперпозиции $\vec{B} = \int d\vec{B}$, с помощью (1.1) можно рассчитать распределения магнитных полей токов простейших конфигураций. Приведём примеры таких вычислений.

Пример 1. Магнитная индукция в центре кругового проводника с током [12]. Для вычисления сделаем чертёж, представленный на рис. 1.2.

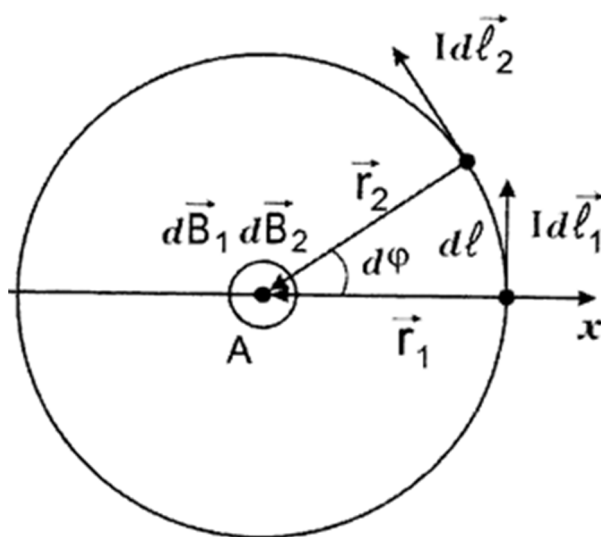


Рис. 1.2. Расположение основных векторов задачи

Из рис. 1.2 видно, что модули векторов равны друг другу $r_1 = r_2 = r$, где r – радиус окружности. Причина этого в том, что все элементарные токи равноудалены от центра окружности, расположенного в точке A . Вектор $Id\vec{l}$ в любой точке кольца направлен по касательной к окружности, и в любой точке положения элемента тока составляет угол $\alpha = \pi/2$ с радиус-вектором наблюдения. Векторы $d\vec{B}_1, d\vec{B}_2$ в точке наблюдения A перпендикулярны плоскости листа и направлены к нам.

Элементарная дуга окружности связана с радиусом окружности и элементарным углом поворота соотношением $dl = r \cdot d\varphi$, ($d\varphi$ – в радианах). Магнитные поля, создаваемые в центре витка (точка A) элементарными токами $Id\vec{l}$, находящимися на окружности, складываются по принципу суперпозиции, который запишем в виде:

$$\vec{B} = \oint_l d\vec{B} = \oint_l \frac{\mu_0(\vec{dl} \times \vec{r})}{r^3};$$

$$B = \oint_l \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} r d\varphi = \frac{\mu_0 I 2\pi r}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{2r}. \quad (1.2)$$

Интегрирование в (1.2) производится по замкнутому контуру тока. При получении (1.2) раскрыто векторное произведение и учтено, что $\sin \alpha = 1$; $r = \text{const}$; $\mu_0 = \text{const}$; $I = \text{const}$ (постоянные можно вынести из-под знака интеграла).

Индукция в центре кольцевого тока зависит только от величины тока и расстояния до проводника, по которому протекает ток. При этом для одного и того же тока поле в центре будет больше у кольца с меньшим радиусом.

Можно поставить резонный практический вопрос: а что, в рассматриваемом случае полученный результат не зависит от геометрических параметров самого проводника (площади поперечного сечения, или диаметра проводника)? Ответ простой: да, не зависит. В этом и заключается специфическая особенность закона Био – Савара – Лапласа. Проводник, о котором идёт речь, геометрически бесконечно тонкий, но в то же время пропускающий конечный ток.

Эта математическая особенность закона связала между собой два понятия, которые противоречивы с практической точки зрения. Существование особенности привело к тому, что в магнитостатике проводник с током, создающий магнитное поле, удовлетворяющее закону (1.1), называют линейным. На наш взгляд, более точный термин, подходящий к указанному проводнику, – геометрический проводник. Геометрический проводник – это такой проводник с током, диаметром которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием до точки наблюдения. Этот термин мы будем использовать далее по мере его применения.

Исходя из результата (1.2), можно сделать оценку для индуктивности одного витка в предположении однородности распределения магнитного поля внутри витка, т.е. поле в любой точке внутри витка равно значению индукции в центре $B(r) = B = \text{const}$. В этом приближении поток, создаваемый полем через площадь витка, равен:

$$\Phi_0 = B \cdot S = \frac{\mu_0 I}{2r} \cdot \pi r^2 = \frac{\mu_0 \pi r}{2} \cdot I. \quad (1.3)$$

Коэффициент, связывающий ток в витке с потоком, создаваемым этим током, называется индуктивностью

$$L_0 = \frac{\mu_0 \pi r}{2} = \frac{\mu_0 l}{4}, \quad (1.4)$$

где L_0 – оценочная индуктивность витка при однородном поле. Из (1.4) видно, что индуктивность витка, с точностью до постоянной величины,

оказывается совпадающей (совпадает) с длиной токового геометрического кольца. То есть индуктивность (1.4) – чисто геометрическая величина. Она тем больше, чем больше радиус кольца.

Оценки. Предположим, что в интегральной микросхеме максимальное значение радиуса r витка с током не может превышать значение 0,5 см. Тогда для миллиамперных токов в центре такого кольца создаётся магнитная индукция $B \approx 125,6$ нТл. При тех же условиях, но для радиуса витка $r = 0,5$ мм, поле в центре увеличивается на порядок.

Из (1.3) оценим значение магнитного потока для выбранных токовых колец. Для кольца $r = 0,5$ см

По этой же формуле для кольца $r = 0,5$ мм: $\Phi_{02} = 10^{-12}$ Вб. Из (1.4) оценим величину индуктивности L_0 :

$$L_0 = \frac{\mu_0 \pi r}{2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \pi r}{2} = 2 \cdot 10^{-6} r.$$

Тогда для кольца $r = 0,5$ см получим $L_0 = 10$ нГн. Для кольца с радиусом $r = 0,5$ мм оценочное значение индуктивности будет $L_0 = 1$ нГн.

Пример 2. Магнитная индукция, создаваемая прямолинейным участком геометрического проводника конечной длины [12].

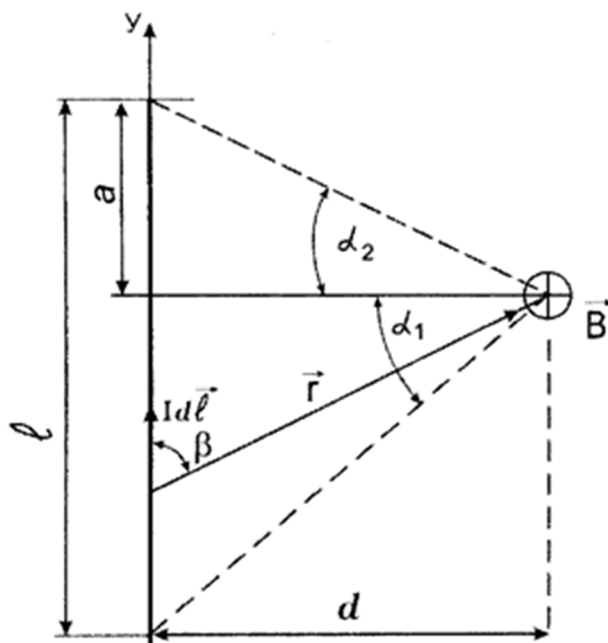


Рис. 1.3. Расположение основных векторов задачи

На рис. 1.3 представлены основные геометрические параметры задачи. Здесь l – длина прямолинейного участка тока; β – острый угол между векторами $\vec{dl}$ и $\vec{r}$; d – длина перпендикуляра, проведённого из точки наблюдения к проводнику; α_1 – угол, под которым из точки наблюдения

видна нижняя часть проводника; α_2 – угол, под которым из точки наблюдения видна верхняя часть проводника; a – длина верхней части проводника; ось y связана с проводником и направлена вверх по току.

Суммарный вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$, создаваемый всеми токовыми элементами проводника, направлен перпендикулярно плоскости чертежа и рассчитывается по закону (1.1). Тогда $|\vec{dl} \times \vec{r}| = dl \cdot r \cdot \sin(\vec{dl}, \vec{r}) = dl \cdot r \cdot \sin \beta = dl \cdot d = dy \cdot d_0$. Выражая подынтегральную функцию через переменную y , получим

$$B = \frac{\mu_0 I d}{4\pi} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(d^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \left\{ \frac{a}{(a^2 + d^2)^{1/2}} + \frac{l-a}{((l-a)^2 + d^2)^{1/2}} \right\} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2). \quad (1.5)$$

При интегрировании в (1.5) принято: 1) начало координат $y = 0$ находится в точке пересечения перпендикуляра и проводника; 2) $y_1 = -(l-a)$; $y_2 = a$; 3) использован табличный интеграл, приведённый в [12] для $n \neq 1$:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2 + a^2)^{n-1}} = + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}}. \quad (1.6)$$

С помощью (1.5) можно вычислить индукцию поля любого контура с током, состоящего из прямолинейных отрезков.

Когда точка наблюдения находится на больших расстояниях от проводника, т.е. выполнены условия $d \gg a$ и $d \gg l$,

$$\sin \alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_1 \approx \frac{a}{d}; \quad \sin \alpha_2 \approx \operatorname{tg} \alpha_2 \approx \frac{l-a}{d};$$

формула (1.5) упрощается и имеет вид

$$B = \frac{\mu_0 I l}{4\pi d^2}.$$

На больших расстояниях от геометрического проводника с током конечной длины магнитное поле убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до проводника.

Если точку наблюдения приблизить к геометрическому проводнику $d/l \rightarrow 0$, то $\sin \alpha_1 \rightarrow 1$; $\sin \alpha_2 \rightarrow 1$. В этом случае соотношение (1.5) переходит в формулу для магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным прямолинейным проводником с током

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}. \quad (1.7)$$

Магнитное поле бесконечно длинного прямого геометрического проводника с током имеет особенность $\sim 1/d$. Эта особенность обусловлена тем, что при $d \rightarrow 0$ точка наблюдения приближается к месту

расположения геометрического проводника. Неустраняемая особенность, существующая в математической модели, возникает вследствие физико-математического противоречия, заложенного в законе Био – Савара – Лапласа.

Пример 3. Определить индукцию магнитного поля на оси геометрического кругового тока I радиусом r_0 (рис. 1.4) (см. [12]).

Проинтегрируем закон (1.1):

$$\vec{B} = \oint_L d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (1.8)$$

где $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{h}$, $\vec{dl} \times \vec{r} = \vec{dl} \times \vec{r}_0 + \vec{dl} \times \vec{h}$. При интегрировании модуль $\vec{r}$ не изменяется, поэтому

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \cdot \left(\oint_L \vec{dl} \times \vec{r}_0 + \oint_L \vec{dl} \times \vec{h} \right). \quad (1.9)$$

Поскольку $\vec{h}$ – постоянный вектор, находим

$$\oint_L \vec{dl} \times \vec{h} = \left(\oint_L \vec{dl} \right) \times \vec{h} = 0,$$

так как $\oint \vec{dl} = 0$. Другой интеграл, входящий в (1.9), вычисляется следующим образом:

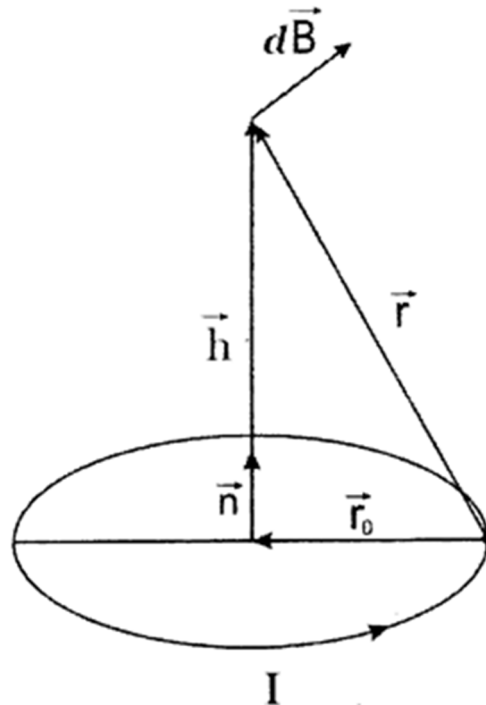


Рис. 1.4. Расположение основных векторов задачи

$$\oint_L \vec{dl} \times \vec{r}_0 = \oint_L \vec{n} r_0 \cdot d\vec{l} = \vec{n} r_0 \oint_L d\vec{l} = \vec{n} r_0 \cdot 2\pi r_0,$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, перпендикулярный плоскости, в которой протекает ток I .

Тогда

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{r_0^2}{(r_0^2 + h^2)^{3/2}} \cdot \vec{n}. \quad (1.10)$$

Если ввести приведённую координату $x = h/r_0$, то соотношение (1.10) можно представить в виде

$$\frac{B}{B_0} = (1 + x^2)^{-3/2}, \quad (1.11)$$

где $B_0 = \mu_0 I / 2r_0$ – индукция магнитного поля в центре витка. График зависимости (1.11) представлен на рис. 1.5. Из результатов расчёта и аналитического представления видно, что функция имеет столообразную характеристику.

При $x \ll 1$ её значения хорошо ложатся на зависимость (1.12)

$$\frac{B}{B_0} \approx 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{8}x^4 - \frac{35}{16}x^6 + 0(x^8). \quad (1.12)$$

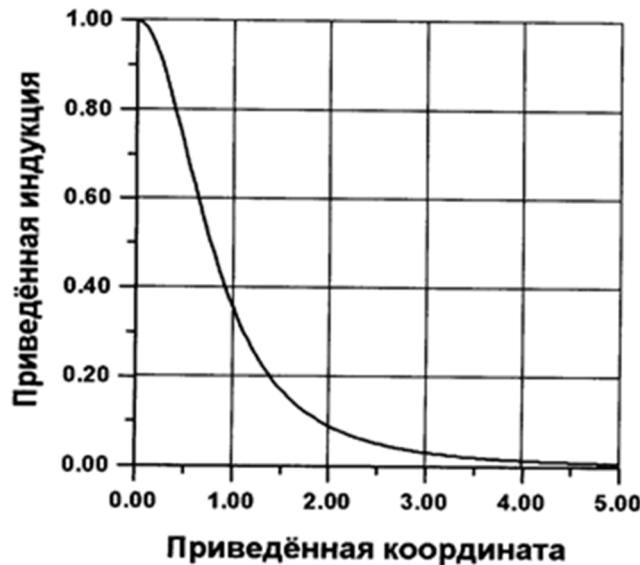


Рис. 1.5. Зависимость приведённой индукции на оси кольцевого тока в зависимости от приведённой координаты

На расстоянии $h = 0,1r_0$ от витка поле изменяется незначительно, так как $B \approx 0,985B_0$. Точка перегиба функции приходится на значение $x = h/r_0 = 1/2$; т.е. $h = r_0/1$. В этой точке поле кольца уменьшает значение индукции B/B_0 до 0,716.

При $h = r_0$ индукция магнитного поля снижается до значений $B/B_0 = 0,35$. При значении $x = h/r_0 = 10$ оно уже практически полностью исчезает, поскольку $B/B_0 = 0,01$.

Знание закона изменения индукции магнитного поля на оси кольцевого геометрического тока позволяет надёжно оценить габариты самых разнообразных трансформаторов на кольцах Гельмгольца. Это позволяет исключить их осевое взаимное влияние на постоянном и переменном токе при размещении колец на одной оси.

Основные интегральные и дифференциальные законы магнитостатики позволяют рассчитать распределение магнитного поля, создаваемого прямым круглым проводником конечной толщины с током. Покажем тремя способами вычислений, что эти законы будут одинаковыми. Исследуем поля сплошного прямого круглого проводника конечной толщины при постоянстве плотности тока по поперечному сечению.

Введём цилиндрическую систему координат (r, φ, z) и её ось z совместим с осью прямого круглого проводника. Ориентация основных осей и векторов указана на рис. 1.6.

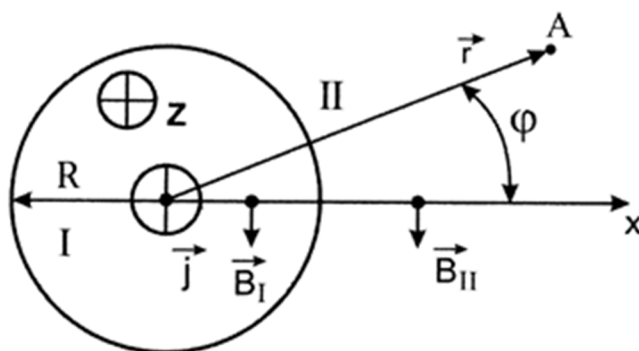


Рис. 1.6. Направление основных векторов в цилиндрической системе координат

При этом $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

На рис. 1.6 вектор плотности тока направлен по оси z . Будем считать, что вектор плотности тока имеет одну компоненту $\vec{j} = (0, 0, j_z)$ и $j_z = j_0 = \text{const}$ (постоянство плотности тока по поперечному сечению). Поверхность проводника, радиус которой R , разбивает всё пространство на две области: внутреннюю I (она ограничивает область протекания тока) и внешнюю, в которой тока нет. То есть: $j_I = j_0 = \text{const}$, а $j_{II} = 0$. Пользуясь правилом буравчика, определяем направление магнитного поля (указано на рис. 1.6) в области I и в области II. Из чего видно, что вектор магнитной индукции при бесконечной длине проводника имеет только одну

компоненту $\vec{B} = \{0, B_\phi, 0\}$, величина которой зависит только от радиуса $B_\phi = B_\phi(r)$. На рис. 1.6 радиус-вектор $\vec{r}$ соединяет ось проводника и точку наблюдения A .

Запишем интегральный закон полного тока

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^N i, \quad (1.13)$$

где μ_0 – магнитная постоянная. Он гласит: циркуляция вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру l определяется с точностью до постоянной величины μ_0 алгебраической суммой токов, охватываемых контуром l .

Применим этот закон к рис. 1.6. Во внутренней области I проведём замкнутую окружность радиусом $r < R$ длиной l , центр которой совмещён с осью проводника (см. рис. 1.7). Обход контура проводим по направлению силовых линий поля.

Во всех точках контура l векторы $\vec{B}_I$ и $d\vec{l}$ совпадают по направлению, т.е. $\vec{B} d\vec{l} = B_\phi \cdot dl$. На фиксированном значении r величина $B_\phi = \text{const}$, и её можно вынести из-под знака интеграла в (1.13)

$$B_\phi \cdot \oint_l dl = \mu_0 \sum_{i=1}^N i. \quad (1.14)$$

Интегрируя левую часть (1.14), получим:

$$B_\phi \cdot l = B_\phi \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum_{i=1}^N i. \quad (1.15)$$

В правой части (1.15) необходимо учесть только токи, охватываемые контуром l :

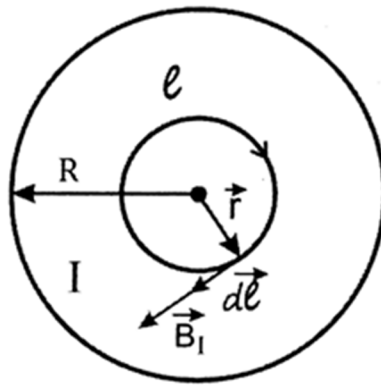


Рис. 1.7. Направления основных векторов задачи

$$\sum_{i=1}^N i = j_0 \cdot S = j_0 \cdot \pi r^2. \quad (1.16)$$

Подставляя (1.16) в (1.15), получим зависимость $B_\varphi(r)$ внутри проводника:

$$B_\varphi \cdot 2\pi r = \mu_0 j_0 \cdot \pi r^2.$$

Отсюда следует:

$$B_\varphi(I) = \frac{\mu_0 j_0 r}{2}. \quad (1.17)$$

Результат легко выразить через ток, текущий по проводнику,

$$B_\varphi(I) = \frac{\mu_0 j_0 \cdot r \cdot \pi R^2}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \cdot r.$$

При постоянной плотности тока внутри проводника индукция магнитного поля является линейной функцией радиуса в области $0 \leq r \leq R$. На оси тока $B_\varphi = 0$, а на поверхности проводника $B_\varphi(I) = \mu_0 j_0 R/2$.

Ответим на вопрос: как изменяется индукция магнитного поля во внешней области II ($r > R$)? Для этого во внешней области II проведём замкнутую окружность радиусом $r > R$ длиной l , центр которой совмещён с осью проводника (см. рис. 1.8). Обход контура совершаем по направлению силовых линия поля.

Во всех точках контура l векторы $\vec{B}_{II}$ и $\vec{dl}$ совпадают по направлению и $\vec{B} \vec{dl} = B_\varphi \cdot dl$, как и ранее. В области $r > R$ отсутствуют точки, порождающие магнитное поле. С учётом этого (1.14) перепишем в виде:

$$B_\varphi \cdot l = B_\varphi \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot j_0 \cdot \pi R^2. \quad (1.18)$$

В (1.18) учтены только токи, находящиеся в области I ($0 \leq r \leq R$). Отсюда следует

$$B_\varphi(II) = \frac{\mu_0 j_0 R^2}{2r}. \quad (1.19)$$

Результат легко выразить через ток, текущий по проводнику:

$$B_\varphi(II) = \frac{\mu_0 j_0 R^2 \cdot \pi}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r}.$$

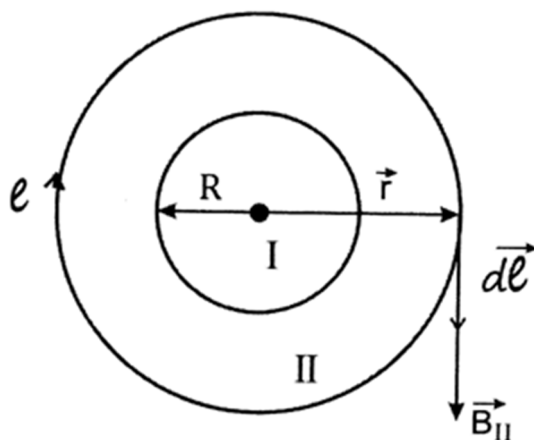


Рис. 1.8. Направления основных векторов задачи

Для оценки скорости спадания поля полученное соотношение приведём к безразмерному виду:

$$B_{\varphi}(II) = \frac{\mu_0 I \cdot R}{2\pi r \cdot R} = B_0 \cdot \frac{R}{r},$$

где $B_0 = \mu_0 I / 2\pi R$ – масштаб индукции поля.

Отсюда видно, что индукция магнитного поля убывает на порядок на расстоянии $R/r = 0,1$ или на десяти радиусах проводника.

При постоянной плотности тока вне проводника индукция магнитного поля убывает по закону $\sim 1/r$. На поверхности проводника при поле достигает конечного значения $B_{\varphi} = \mu_0 j_0 R / 2$, совпадающего со значением, даваемым решением внутренней задачи.

Приведём базовые дифференциальные законы магнитостатики [12]:

1. Первый закон утверждает, что статические магнитные поля бездивергентны:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (1.20)$$

Равенство (1.20) означает, что магнитные силовые линии вектора $\vec{B}$ не имеют источников. То есть в природе нет магнитных зарядов, которые создавали бы магнитное поле подобно тому, как электрические заряды создают электрическое поле. Магнитное поле порождает ток, или поток движущихся зарядов. Линии вектора $\vec{B}$ не имеют ни начала, ни конца. Они являются либо замкнутыми линиями, либо начинаются в бесконечности и уходят на бесконечность. Такие поля называют соленоидальными или вихревыми.

2. Вихревое магнитное поле, порождаемое постоянным током, описывается уравнением Максвелла, дополняющим уравнение (1.20)

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (1.21)$$

Решение уравнений (1.20) и (1.21) позволяет найти пространственное распределение всех трёх компонент поля $\vec{B} = \{B_x, B_y, B_z\}$ при заданном пространственном распределении всех трёх компонент плотности тока $\vec{j} = \{j_x, j_y, j_z\}$.

Число неизвестных скалярных величин в этих уравнениях равно трём (B_x, B_y, B_z), а общее число скалярных уравнений для их определения равно четырём. Таким образом, число уравнений больше, чем число неизвестных, однако это не делает систему переполненной.

С помощью уравнений (1.20) и (1.21) можно решать два класса задач.

1-й класс задач. Зная пространственное распределение индукции статического магнитного поля, найти законы распределения вектора плотности тока. Для этого нужно вычислить левую часть уравнения (1.21).

2-й класс задач. Зная законы пространственного распределения вектора плотности тока $\vec{j}$, найти законы пространственного распределения индукции статического магнитного поля, порождаемого этими токами. Этот класс задач сводится к решению трёх скалярных уравнений в частных производных первого порядка, следующих из (1.21).

Часто из-за сложности решаемых задач, для их упрощения, целесообразно ввести дополнительную величину, которая называется векторным потенциалом [12]. Известное из векторного анализа тождество $\text{div rot } \vec{A} = 0$ показывает, что уравнение (1.20) может быть представлено в виде:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad (1.22)$$

где $\vec{A}$ – векторный потенциал магнитного поля. Поле с заданной индукцией $\vec{B}$ может быть описано не каким-то одним векторным потенциалом, а различными наборами векторных потенциалов.

В магнитостатике доказывается, что если потенциал $\vec{A}$ описывает векторное поле с индукцией $\vec{B}$, то и другой потенциал, отличающийся от $\vec{A}$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } x, \quad (1.23)$$

произвольной функцией $x(\vec{r})$, описывает то же самое поле $\vec{B}$. Для доказательства вычислим индукцию поля $\vec{B}'$, описываемого потенциалом $\vec{A}'$:

$$\vec{B}' = \text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} + \text{rot}(\text{grad } x) = \text{rot } \vec{A} = \vec{B}, \quad (1.24)$$

поскольку $\text{rot}(\text{grad } x) = 0$.

Неоднозначность векторного потенциала аналогична неоднозначности скалярного потенциала в теории электростатического поля, только там потенциал был определён с точностью до производной постоянной, а здесь – с точностью до производной от некоторой скалярной функции.

Это свойство векторного потенциала отпугнуло многих физиков-теоретиков от решения магнитостатических задач, в которые входит векторный потенциал. На самом деле, как будет показано ниже, значение этой величины для магнитостатики трудно переоценить. Векторный потенциал позволяет легко понять симметрию исходных токовых распределений и построить доступные методы расчёта для магнитостатических полей самой разнообразной конфигурации.

Пользуясь неоднозначностью в выборе векторного потенциала, можно наложить на него определённое условие, которое называют условием калибровки векторного потенциала. В магнитостатике чаще всего оно выбирается в виде

$$\text{div } \vec{A} = 0. \quad (1.25)$$

Роль этого условия аналогична роли нормировки скалярного потенциала в электростатике. Следует понимать, что векторный потенциал в магнитостатике имеет лишь вспомогательное значение и не может быть измерен экспериментально, но, поскольку от законов изменения векторного потенциала легко перейти к законам распределения магнитной индукции, то этот недостаток не является существенным.

Получим уравнение для векторного потенциала. Подставим (1.22) в (1.21). Получим

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \mu_0 \vec{j}. \quad (1.26)$$

Из векторного анализа известно, что

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \text{grad}(\text{div}\vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}. \quad (1.27)$$

Поэтому (1.26) принимает вид

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (1.28)$$

где принята во внимание калибровка (1.25). Распишем уравнение (1.28) в декартовых координатах. Их три:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x; \nabla^2 A_y = -\mu_0 j_y; \nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z. \quad (1.29)$$

Из (1.29) видно, что каждая из компонент векторного потенциала подчиняется известному в электростатике уравнению Пуассона, которое имеет вид:

$$\nabla^2 \varphi = \rho / \varepsilon_0. \quad (1.30)$$

Как видно из (1.29) и (1.30), все уравнения представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных. Решения уравнения (1.30) хорошо исследованы при решении электростатических задач. Этим можно воспользоваться при решении простейших задач магнитостатики.

Рассчитаем распределение магнитного поля бесконечного круглого прямого тока с радиусом R , используя уравнение (1.9). Как показано на рис. 1.6, во внутренней и внешней областях поле $\vec{B}$ имеет одну составляющую B_φ , а плотность тока $j_z = j_0$ также имеет одну составляющую. Распишем уравнение (1.9) в цилиндрической системе координат (r, φ, z) :

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{B} &= \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot B_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_z = \\ &= \mu_0 (j_r \cdot \vec{e}_r + j_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + j_z \cdot \vec{e}_z), \end{aligned} \quad (1.31)$$

где введены обозначения $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ – единичные векторы цилиндрической системы координат. Для компонент B_φ и j_z (1.31) упрощается:

$$(\text{rot}\vec{B})_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \cdot B_\varphi) = \mu_0 j_z. \quad (1.32)$$

В уравнении (1.32) частные производные заменены на полные, поскольку $B_\varphi = B_\varphi(r)$. Легко проверить, что это поле бездивергентно

$$\text{div}\vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Это связано с тем, что единственная компонента B_φ не зависит от φ , т.е. $\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} = 0$, а все остальные отсутствуют.

Запишем уравнение (1.32) для двух областей. В I области $0 \leq r \leq R$ имеем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \cdot B_\varphi) = \mu_0 j_0 = \text{const} = c_1. \quad (1.33)$$

В области II при $r > R$ токи отсутствуют

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \cdot B_\varphi) = 0. \quad (1.34)$$

Интегрируя (1.21), получим в области I

$$B_\varphi = \mu_0 j_0 \frac{r}{2} + \frac{c_1}{r}. \quad (1.35)$$

Чтобы убрать особенность в нуле, выбираем произвольную постоянную $c_1 = 0$. Тогда получаем решение

$$B_\varphi(I) = \mu_0 j_0 \frac{r}{2} \text{ в области } 0 \leq r \leq R, \quad (1.36)$$

которое точно совпадает с решением (1.5).

Интегрируя (1.34), получим в области II

$$B_\varphi = \frac{c_2}{r}, \quad (1.37)$$

где c_2 – вторая произвольная постоянная. Выбираем значение c_2 , из условия равенства индукций магнитного поля на поверхности $r = R$

$$\mu_0 j_0 \frac{R}{2} = c_2 / R.$$

Тогда получим $c_2 = \mu_0 j_0 \frac{R^2}{2}$, отсюда следует изменение поля в области II

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 j_0 R^2}{2r}, \text{ при } r \geq R. \quad (1.38)$$

Выражение (1.38) точно совпадает с (1.7).

Рассчитаем ещё раз распределение магнитного поля бесконечного круглого прямого тока радиусом R , используя понятие векторного потенциала, и привлечём для этого уравнение (1.20). Запишем его в цилиндрических координатах с учётом того, что плотность тока $j_z = j_0$ порождает поле векторного потенциала, которое имеет одну компоненту A_z :

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z, \quad (1.39)$$

где $\nabla^2 A_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dA_z}{dr} \right)$, а индукция магнитного поля B_φ связана с A_z дифференциальным соотношением, которое следует из (1.10)

$$B_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r}. \quad (1.40)$$

Для внутренней области I ($0 \leq r \leq R$) уравнение (1.27) имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dA_1}{dr} \right) = -\mu_0 j_0. \quad (1.41)$$

Далее везде индекс z в векторном потенциале заменяем индексом 1 или 2, нумерующим область, к которой относится решение задачи. Поэтому для внешней области $r \geq R$ уравнение (1.39) запишется в виде

Решение уравнения (1.41) выражается через произвольные постоянные c_1 и c_2

$$A_1 = -\frac{\mu_0 j_0 r^2}{4} + c_1 \ln r + c_2 \text{ при } 0 \leq r \leq R, \quad (1.43)$$

а решение (1.42) – через произвольные постоянные c_3 и c_4

$$A_2 = c_3 \cdot \ln r + c_4 \text{ при } r > R. \quad (1.44)$$

По полученным решениям рассчитаем распределение поля $B_\varphi = B_\varphi(r)$. Для поля B_1 получаем

$$B_1 = \frac{\mu_0 j_0 r}{2} - \frac{c_1}{r} \text{ при } 0 \leq r \leq R. \quad (1.45)$$

Для поля B_2 имеем распределение

$$B_2 = -\frac{c_3}{r} \text{ при } r \geq R. \quad (1.46)$$

Требуя конечность поля B_1 при $r = 0$, из (1.45) заключаем, что $c_1 = 0$. Выбираем значение A_1 в центре $A_1(0) = 0$. Это даёт $c_2 = 0$. Поэтому выражение для A_1 и B_1 принимают вид:

$$A_1 = -\frac{\mu_0 j_0 r^2}{4} \text{ при } 0 \leq r \leq R, \quad (1.47)$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 j_0 r}{2} \text{ при } 0 \leq r \leq R. \quad (1.48)$$

Для определения произвольной постоянной c_3 воспользуемся условиями непрерывности для функции B_1 и B_2 : $B_1(R) = B_2(R)$. Тогда

$$\frac{\mu_0 j_0 R}{2} = -\frac{c_3}{R}. \quad (1.49)$$

Отсюда видно, что $c_3 = -\frac{\mu_0 j_0 R^2}{2}$. Для нахождения произвольной постоянной c_4 запишем условие непрерывности для функции A_1 и A_2 : $A_1(R) = A_2(R)$. Тогда

$$-\frac{\mu_0 j_0 R^2}{4} = -\frac{\mu_0 j_0 R^2}{2} \cdot \ln R + c_4.$$

$$\text{Отсюда } c_4 = -\frac{\mu_0 j_0 R^2}{4} + \frac{\mu_0 j_0 R^2}{2} \cdot \ln R.$$

Окончательные законы распределения векторного потенциала и индукции магнитного поля во внешней области $r \geq R$ имеют вид

$$A_2 = -A_* \left[\ln \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 1 \right], \quad (1.50)$$

где $A_* = \frac{\mu_0 j_0 R^2}{4}$ – масштаб векторного потенциала, и

$$B_2 = \frac{\mu_0 j_0 R^2}{2r}. \quad (1.51)$$

На рис. 1.9 представлено радиальное распределение векторного потенциала в координатах $-A/A_* = f(r/R)$, где $-A/A_*$ – приведённое значение векторного потенциала, взятое с противоположным знаком, а r/R – приведённая координата.

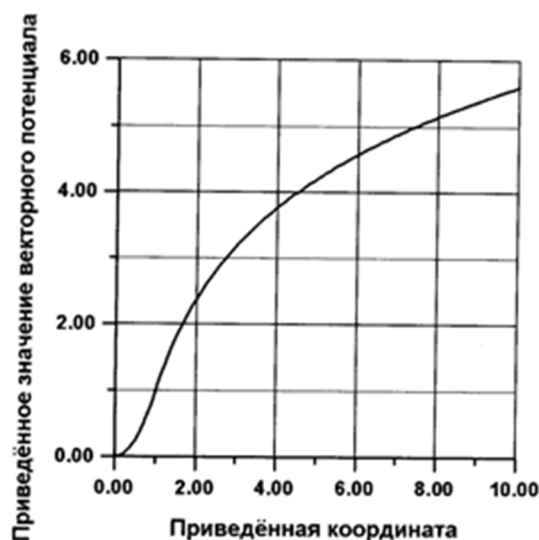


Рис. 1.9. Радиальное распределение приведённого значения векторного потенциала от приведённого радиуса

Из рис. 1.9 видно, что векторный потенциал отрицателен во всей области пространства $0 < r < \infty$. Это указывает на то, что его направление всегда противоположно вектору плотности тока. На поверхности $r/R=1$ потенциал однозначен и не имеет разрывов и скачков производной.

На рис. 1.10 представлено радиальное распределение индукции магнитного поля в координатах $B/B_* = f(r/R)$, где $B_* = \mu_0 j_0 R/2$ – масштаб индукции магнитного поля, B/B_* – приведённое значение индукции, r/R – приведённое значение координаты.

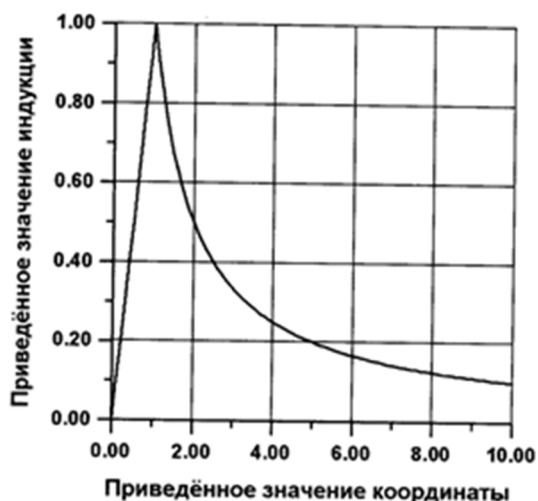


Рис. 1.10. Радиальное распределение индукции магнитного поля

Из рис. 1.10 видно, что индукция магнитного поля круглого проводника положительна во всей области изменения r/R . Её наибольшее значение $B = B_*$ достигается на поверхности проводника при $r/R=1$. На этой поверхности индукция магнитного поля испытывает скачок производной от положительного значения к отрицательному.

Из полученных соотношений (1.48) и (1.51) для индукции магнитного поля видно, что они точно совпадают с соотношениями и (1.36); (1.7) и (1.38), полученными ранее.

Оценки. Приведём оценки масштабов величин A_* и B_* для типичных токов микроэлектроники. Рассчитаем три пары значений масштабов.

1. При протекании тока $I=1$ мА по проводнику радиусом $R=1$ мм получим $A_* = 10^{-7}I = 10^{-10}$ Тл·м; $B_* = 0,2$ мкТл.

2. При протекании тока $I=1$ мкА по проводнику радиусом $R=1$ нм получим $A_* = 10^{-13}$ Тл·м; $B_* = 200$ мкТл.

3. При протекании тока $I=1$ мкА по проводнику радиусом $R=5$ мкм получим $A_* = 10^{-13}$ Тл·м; $B_* = 40$ нТл.

Индукция магнитного поля бесконечно длинного прямого тока конечного радиуса имеет скачок производной, но не имеет особенности на поверхности проводника при $r = R$.

Этим обстоятельством можно воспользоваться при вычислении радиального распределения поля методом Био – Савара – Лапласа, создаваемого геометрическим токовым кольцом.

1.1. Магнитные и индуктивные свойства планарного токового 2D-кольца с азимутальным направлением плотности тока

Рассчитаем радиальные распределения индукции магнитного поля внутри и вне плоского геометрического кольца с током.

1.1.1. Распределение магнитного поля внутри кольцевого тока

Расчёт радиального распределения магнитного поля внутри кольца с током будем проводить, используя закон Био – Савара – Лапласа (1.1). На рис. 1.11 представлены основные векторные построения задачи. Элементарный вектор $I\vec{dl}$ направлен по касательной к кольцевому току радиусом R . $\vec{R}$ – радиус-вектор окружности. $\vec{r}_B$ – радиус-вектор, соединяющий элементарный ток $I\vec{dl}$ и точку наблюдателя A , в которой определяется значение элементарного вектора $d\vec{B}_A$. $\vec{r}$ – радиус-вектор наблюдения соединяет центр окружности с точкой A .

Угол α – угол между вектором $I\vec{dl}$ и вектором $\vec{r}_B$. Угол φ – угол полярной системы координат, изменяющийся от 0 до 2π при интегрировании.

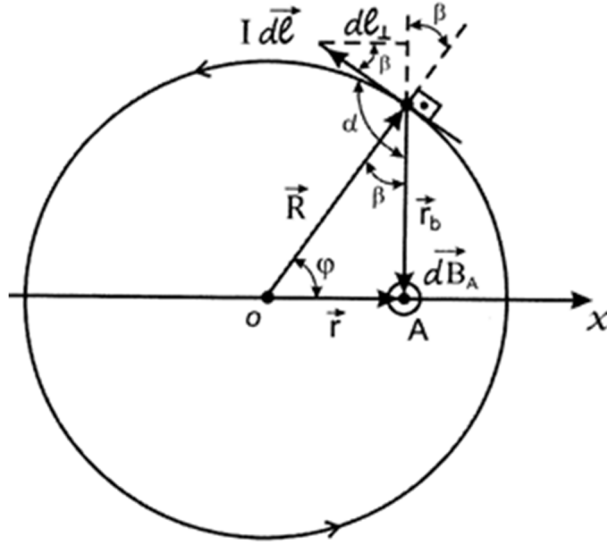


Рис. 1.11. Расположение основных векторов задачи

Из чертежа видно, что проекция вектора $\vec{dl}$, которая перпендикулярна $\vec{r}_B$, находится из соотношения

$$dl_{\perp} = dl \cdot \cos \beta. \quad (1.52)$$

Элемент тока $I\vec{dl}$ совпадает с направлением вектора плотности тока и создаёт в точке наблюдения A значение индукции магнитного поля $d\vec{B}_A$. Вектор $d\vec{B}_A$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежит кольцевой ток и смотрит на нас. Запишем закон Био – Савара – Лапласа (1.1) в принятых обозначениях

$$d\vec{B}_A = \frac{\mu_0 I (\vec{dl} \times \vec{r}_B)}{4\pi r_B^3}. \quad (1.53)$$

Для модуля вектора $d\vec{B}_A$ получим

$$dB_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dl \cdot r_B \cdot \sin \alpha}{r_B^3} = \frac{\mu_0 I dl \cdot \sin \alpha}{4\pi r_B^2}. \quad (1.54)$$

Из рис. 1.11 видно, что $dl \cdot \sin \alpha = dl \cdot \sin(\pi/2 + \beta) = dl \cdot \cos \beta = dl_{\perp}$. Для нахождения значения индукции $\vec{B}_A$ в точке A необходимо все переменные в выражении (1.54) выразить через постоянные величины и переменный угол φ . Для этого запишем равенство:

$$dl = R \cdot d\varphi. \quad (1.55)$$

Из векторного треугольника на рис. 1.11 получим

$$\vec{r} - \vec{R} = \vec{r}_B, \quad (1.56)$$

при этом модуль вектора r – расстояние от центра окружности O до точки наблюдения A , – постоянная величина. Возведём (1.56) в квадрат

$$r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{R} + R^2 = r_B^2. \quad (1.57)$$

Раскрывая в (1.57) скалярное произведение, получаем теорему косинусов

$$r^2 - 2r \cdot R \cdot \cos \varphi + R^2 = r_B^2. \quad (1.58)$$

Запишем теорему косинусов, в которую входит угол β

$$r^2 = R^2 + r_B^2 - 2R \cdot r_B \cdot \cos \beta. \quad (1.59)$$

Подставим (1.58) в (1.59) и выразим $\cos \beta$ через $\cos \varphi$

$$\cos \beta = \frac{R - r \cos \varphi}{r_B}. \quad (1.60)$$

Подставим (1.60) в (1.54)

$$dB_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{R \cdot d\varphi \cdot \cos \beta}{r_B^2} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \cdot \frac{(R - r \cos \varphi)}{r_B^3} d\varphi, \quad (1.61)$$

где $r_B^3 = (r^2 - 2r R \cos \varphi + R^2)^{3/2}$.

Применяя принцип суперпозиции, придём к интегрированию

$$B_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{(1 - t \cos \varphi) d\varphi}{(t^2 - 2t \cos \varphi + 1)^{3/2}}, \quad (1.62)$$

где через $t = r/R$ обозначен зафиксированный приведённый радиус точки наблюдения A . Выражение (1.62) позволяет рассчитать индукцию магнитного поля, создаваемую отрезком кольца, расположенном на дуге радиусом R , начинающейся под углом φ_1 и заканчивающейся под углом φ_2 .

Интегрирование (1.62) не удаётся провести в элементарных функциях. Его можно свести к комбинации полных эллиптических интегралов первого и второго родов при изменении угла φ в пределах: $\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = 2\pi$. Для получения конечного результата разделим обе части (1.62) на индукцию (величину индукции) магнитного поля в центре кольца радиусом R (см. 1.2).

$$\frac{2\pi \cdot B_A}{B_{\text{ц}}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(t^2 - 2t \cos \varphi + 1)^{3/2}} - t \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(t^2 - 2t \cos \varphi + 1)^{3/2}}. \quad (1.63)$$

Введём обозначения. Тогда (1.63) переписывается в виде:

$$\frac{2\pi \cdot B_A}{B_{\text{ц}}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^{3/2}} - t \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^{3/2}}. \quad (1.64)$$

Будем интересоваться значением индукции магнитного поля, создаваемого всем кольцом в точке A . В силу чётности подинтегральных функций имеем

$$\frac{2\pi \cdot B_A}{B_{\text{ц}}} = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^{3/2}} - 2t \int_0^{\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^{3/2}}. \quad (1.65)$$

Первый интеграл в (1.65) сводится к табличному [13]:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a-b\cos x)^3}} = \frac{2}{(a-b)\sqrt{a+b}} E(\Psi, k) \Big|_0^x \quad (1.66)$$

при $a > b > 0$ и $0 \leq x \leq \pi$. Второй интеграл также сводится к табличному после его разбиения на два интеграла

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{-2t \cos \varphi \, d\varphi}{(a-b\cos \varphi)^{3/2}} = \int_0^\pi \frac{(a-b\cos \varphi - a)d\varphi}{(a-b\cos \varphi)^{3/2}} = \int_0^\pi \frac{(a-b\cos \varphi)d\varphi}{(a-b\cos \varphi)^{3/2}} -$$

$$-a \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(a-b\cos \varphi)^{3/2}} = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(a-b\cos \varphi)^{1/2}} - a \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(a-b\cos \varphi)^{3/2}}. \quad (1.67)$$

Первый интеграл в последнем равенстве (1.67) также табличный [13]:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a-b\cos x)}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}} F(\Psi, k) \Big|_0^x, \quad (1.68)$$

при тех же ограничениях на переменные a , b и x . В (1.66) и (1.67) введены обозначения:

$$k = \sqrt{\frac{2b}{a+b}} \quad (1.69)$$

– модуль эллиптического интеграла первого $F(\Psi, k)$ и второго $E(\Psi, k)$ родов;

$$\Psi = \arcsin \sqrt{\frac{(a+b)(1-\cos x)}{2(a-b\cos x)}} \quad (1.70)$$

– верхний предел интегрирования, который при $x = \pi$ превращается в значение $\Psi = \pi/2$. Для этого предела интегрирования неполные эллиптические интегралы переходят в полные эллиптические интегралы $K(k) = F(\pi/2, k)$ – первого рода и $E(k) = E(\pi/2, k)$ – второго рода, интегральное представление которых имеет вид:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\Psi}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2 \Psi}}, \quad (1.71)$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2 \Psi} \cdot d\Psi. \quad (1.72)$$

С учётом всех обозначений конечный результат (1.64) преобразуется к виду

$$\frac{B_A}{B_{\text{ц}}} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{E(k)}{1-r/R} + \frac{K(k)}{1+r/R} \right], \quad (1.73)$$

где $k = 2 \cdot \sqrt{r/R} / (1 + r/R)$. При $r/R \rightarrow 0$ точка наблюдения A попадает в центр окружности. При этом значение $k \rightarrow 0$, а выражение (1.73) даёт правильный результат, поскольку $B_A/B_{\text{ц}} \rightarrow 1$, так как $E(k \rightarrow 0) \rightarrow \pi/2$; $K(k \rightarrow 0) \rightarrow \pi/2$ (см. [14]). При увеличении r/R поле в перемещаемой точке наблюдения A растёт и при $r/R \rightarrow 1$ имеет особенность. Раскроем вид особенности при $r/R \rightarrow 1$. Для этого введём параметр

$$\delta = R - r. \quad (1.74)$$

Точка наблюдения находится на расстоянии δ от геометрического проводника. При $r \rightarrow R$ параметр δ становится очень малой величиной. Определим, как изменяется модуль эллиптического интеграла в этом приближении

$$k = \frac{2\sqrt{1 - \delta/R}}{2 - \delta/R} \approx (1 - \delta/2R)(1 + \delta/2R) = 1 - \frac{\delta^2}{4R^2}. \quad (1.75)$$

Из (1.75) видно, что при $\delta/R \rightarrow 0$ модуль k мало отличается от значения 1.

Подставляя малое значение $\delta/R \ll 1$ в (1.73), видим, что выражение имеет особенность вида $\infty - \infty$. Раскрывая её по правилу Лопиталья, получим, что в этой точке возникает особенность вида $1/\delta$

$$\frac{B_A}{B_{\text{ц}}} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{R}{\delta}. \quad (1.76)$$

При раскрытии особенности учтено, что $E(1) = 1$ (см. [14]). Подставляя в (1.76) значение индукции в центре, получим

$$B_A(\delta \rightarrow 0) = \frac{\mu_0 I}{2 \pi \delta}. \quad (1.77)$$

Как видно из полученных результатов, радиальное распределение индукции магнитного поля геометрического токового кольца таково, что оно увеличивается внутри кольца при удалении точки наблюдения от центра окружности к внутреннему краю кольца (см. рис. 1.12).

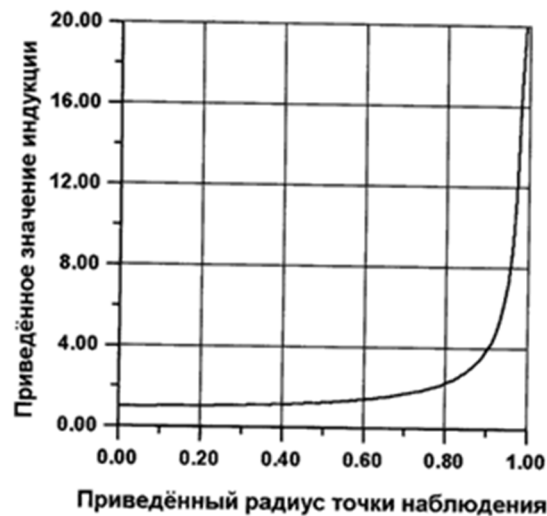


Рис. 1.12. Радиальное распределение магнитной индукции внутри кольца

Магнитное поле имеет особенность вида $1/\delta$, которая повторяет особенность длинного прямого геометрического проводника с током. Эта особенность обусловлена тем, что при $\delta \rightarrow 0$ точка наблюдения всё ближе подходит к месту расположения геометрического проводника.

На рис. 1.12 в координатах $B_A/B_{\text{ц}} = f(r/R)$, где $B_A/B_{\text{ц}}$ – приведённое значение индукции, а r/R – приведённый радиус точки наблюдения, представлено радиальное распределение индукции магнитного поля кольца, даваемое (представленное) формулой (1.73).

Проведённое численное моделирование формулы (1.73) указывает на то, что при малых значениях $r/R \ll 1$ индукция магнитного поля мало отличается от индукции в центре витка. Это позволяет разложить решение (1.73) в ряд по малому параметру $x = r/R$. Разложение имеет вид:

$$\frac{B_A(x)}{B_{\text{ц}}} \approx 1 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{15}{2}x^4 + 49x^5 - 175x^6 + 0(x^7). \quad (1.78)$$

Даже при $x = 0,1$ первые два члена ряда дают значение $B_A(x)/B_{\text{ц}} \approx 1.0075$, практически не отличающееся от машинного вычисления, приведённого в таблице 1.1.

В таблице 1.1 представлены результаты вычислений, выполненных с удвоенной точностью по формуле (1.73).

Т а б л и ц а 1.1

Результаты численного моделирования радиального распределения магнитной индукции внутри кольца

r/R	$B_A/B_{\text{ц}}$
.00000000	1.00000000
.01000000	1.00007501
.02000000	1.00030011
.03000000	1.00067557
.04000000	1.00120180
.05000000	1.00187941
.06000000	1.00270914
.07000000	1.00369196
.08000000	1.00482898
.09000000	1.00612150
.10000000	1.00757100
.11000000	1.00917917
.12000000	1.01094787
.13000000	1.01287917
.14000000	1.01497536
.15000000	1.01723892
.16000000	1.01967257

Продолжение табл. 1.1

.17000000	1.02227924
.18000000	1.02506213
.19000000	1.02802467
.20000000	1.03117054
.21000000	1.03450374
.22000000	1.03802850
.23000000	1.04174939
.24000000	1.04567129
.25000000	1.04979942
.26000000	1.05413935
.27000000	1.05869702
.28000000	1.06347878
.29000000	1.06849141
.30000000	1.07374212
.31000000	1.07923863
.32000000	1.08498914
.33000000	1.09100243
.34000000	1.09728784
.35000000	1.10385535
.36000000	1.11071563
.37000000	1.11788004
.38000000	1.12536077
.39000000	1.13317080
.40000000	1.14132406
.41000000	1.14983543
.42000000	1.15872090
.43000000	1.16799757
.44000000	1.17768382
.45000000	1.18779940
.46000000	1.19836554
.47000000	1.20940509
.48000000	1.22094270
.49000000	1.23300496
.50000000	1.24562061
.51000000	1.25882074
.52000000	1.27263905
.53000000	1.28711209
.54000000	1.30227961
.55000000	1.31818489
.56000000	1.33487511
.57000000	1.35240184
.58000000	1.37082152

Окончание табл. 1.1

.59000000	1.39019610
.60000000	1.41059364
.61000000	1.43208916
.62000000	1.45476551
.63000000	1.47871442
.64000000	1.50403773
.65000000	1.53084882
.66000000	1.55927428
.67000000	1.58945591
.68000000	1.62155307
.69000000	1.65574549
.70000000	1.69223663
.71000000	1.73125777
.72000000	1.77307290
.73000000	1.81798475
.74000000	1.86634222
.75000000	1.91854952
.76000000	1.97507760
.77000000	1.03647862
.78000000	1.10340427
.79000000	1.17662932
.80000000	1.25708225
.81000000	1.34588544
.82000000	1.44440877
.83000000	1.55434208
.84000000	1.67779465
.85000000	1.81743436
.86000000	1.97668637
.87000000	1.16002312
.88000000	1.37339901
.89000000	1.62492148
.90000000	1.92592374
.91000000	4.29275092
.92000000	4.74988276
.93000000	5.33572729
.94000000	6.11419657
.95000000	7.20014774
.96000000	8.82292044
.97000000	11.51674758
.98000000	16.88155294
.99000000	31.90191133

Результат (1.73) можно преобразовать к более простому виду

$$\frac{B_A(r/R)}{B_{\text{ц}}} = \frac{2}{\pi} \frac{E(k)}{(1-k^2)}, \text{ (при } r < R) \quad (1.79)$$

где $E(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода с модулем $k = r/R$. Разложение (1.79) по малому параметру $x = r/R \ll 1$ приводит к ряду с чётными степенями

$$\frac{B_A(x)}{B_{\text{ц}}} \approx 1 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{45}{64}x^4 + \frac{175}{256}x^6 + O(x^8). \quad (1.80)$$

Он также быстро сходится и может быть применён для значений $x \leq 0,1$. При $r/R \rightarrow 1$ (1.79) имеет ту же особенность, что и (1.73).

1.1.2. Распределение магнитного поля вне кольцевого тока

Расчёт радиального распределения магнитного поля вне кольца будем проводить, используя Закон Био – Савара – Лапласа (1.1). На рис. 1.13 представлены основные геометрические построения задачи. Точка A , в которой определяем индукцию магнитного поля $d\vec{B}_A$, находится вне кольца на расстоянии OA , отсчитываемом от центра кольца. При этом $OC = R$, а $AC = h$ – кратчайшее расстояние от точки A к(до) геометрическому(ого) проводнику(а).

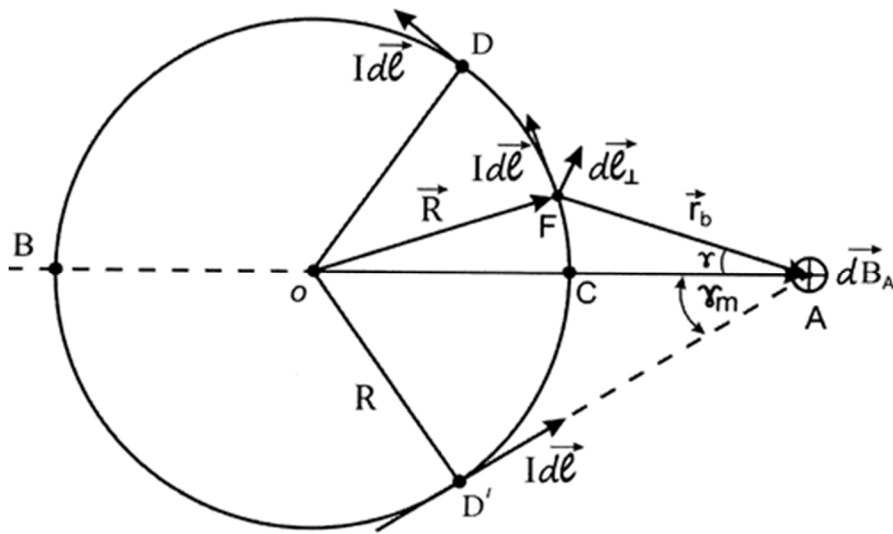


Рис. 1.13. Расположение основных векторов задачи

Ось OA делит кольцо пополам. (Здесь) $\vec{R}$ – радиус-вектор окружности; $\vec{r}_b$ – радиус-вектор, соединяющий текущее положение (точка F) элементарного тока $I d\vec{\ell}$ и точку наблюдения A , в которой определяется значение элементарного вектора $d\vec{B}_A$. Направление $d\vec{B}_A$ перпендикулярно плоскости витка и смотрит от нас.

Угол γ – текущий угол элементарного тока $I d\vec{l}$ представляет собой угол между осью симметрии OA и вектором $\vec{r}_B$. Угол при интегрировании изменяется в пределах от $-\gamma_m$ до γ_m . Эти углы определяются следующим образом: из точки A к кольцевому току проводятся две касательные, направления которых совпадают (либо противоположны) элементарному току $I d\vec{l}$ (точки D и D'). Тогда угол γ_m определяется соотношением

$$\sin \gamma_m = \frac{R}{R+h} = \frac{R}{OA}. \quad (1.81)$$

Перепишем закон (1.1) для обозначений, принятых на рис. 1.13

$$d\vec{B}_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(\vec{dl} \times \vec{r}_B)}{r_B^3}. \quad (1.82)$$

Для модуля вектора dB_A получим

$$dB_A = \frac{\mu_0 I dl \cdot \sin \alpha}{4\pi r_B^2}. \quad (1.83)$$

На рис. 1.13 угол α не указан. Но, поскольку

$$dl_{\perp} = dl \cdot \sin \alpha = r_B \cdot d\gamma, \quad (1.84)$$

то в (1.83) нужно перейти к переменной γ . Получим

$$dB_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\gamma}{r_B(\gamma)}. \quad (1.85)$$

Из треугольника OFA по теореме косинусов следует равенство

$$R^2 = (R+h)^2 + r_B^2 - 2(R+h) \cdot r_B \cdot \cos \gamma. \quad (1.86)$$

Из этого равенства, решая квадратное уравнение относительно r_B , можно найти зависимость $r_B(\gamma)$

$$r_{B_{1,2}} = (R+h) \cos \gamma \pm \sqrt{(R+h)^2 \cos^2 \gamma - h^2 - 2Rh}. \quad (1.87)$$

Выражение (1.87) указывает на наличие ветвления функции $r_B(\gamma)$. Это связано с тем, что кольцевой ток D и D' разбивается на два участка: первый участок $D C D'$ создаёт в точке A магнитное поле с направлением $d\vec{B}_A$ (выбирается знак «-» в (1.87)); второй – $D B D'$ – создаёт в точке A магнитное поле, противоположное направлению $d\vec{B}_A$ (выбирается знак «+» в (1.87)).

Тогда интегрирование для первого участка $D C D'$ может быть представлено в виде

$$B_{A1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{\gamma_m} \frac{d\gamma}{r_{B1}(\gamma)}. \quad (1.88)$$

При записи (1.88) учтена чётность функции относительно γ .

Разделим обе части (1.88) на поле в центре кольца (1.2)
 $B_{\text{ц}} = \mu_0 I / (2R)$

$$\frac{B_{A1}}{B_{\text{ц}}} = \frac{R}{\pi} \int_0^{\gamma_m} \frac{d\gamma}{r_{B1}(\gamma)}. \quad (1.89)$$

Введём обозначения

$$a = (R + h) \cdot \cos \gamma, \quad (1.90)$$

$$b = \sqrt{(R + h)^2 \cos^2 \gamma - h^2 - 2Rh}, \quad (1.91)$$

а интегрирование в (1.89) представим в виде

$$\frac{B_{A1}}{B_{\text{ц}}} = \frac{R}{\pi} \int_0^{\gamma_m} \frac{(a + b) d\gamma}{a^2 - b^2} \quad (1.92)$$

и разобьём его на два интеграла

$$\frac{\pi}{R} \frac{B_{A1}}{B_{\text{ц}}} = I_1 + I_2, \quad (1.93)$$

где

$$I_1 = \int_0^{\gamma_m} \frac{a d\gamma}{a^2 - b^2}; \quad I_2 = \int_0^{\gamma_m} \frac{b d\gamma}{a^2 - b^2}.$$

Интегрирование для второго участка $D B D'$ представим в виде, аналогичном (1.88), как и в (1.88):

$$B_{A2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{\gamma_m} \frac{d\gamma}{r_{B2}(\gamma)}. \quad (1.94)$$

Применяя те же операции и обозначения, как и в (1.88), получим, что интеграл в (1.94) может быть представлен в виде

$$\frac{\pi}{R} \frac{B_{A2}}{B_{\text{ц}}} = I_1 - I_2. \quad (1.95)$$

Учитывая направления полей B_{A1} и B_{A2} , подставляя (1.93) и (1.95), получим для результирующего поля

$$\frac{\pi}{R} \frac{B_A}{B_{\text{ц}}} = \frac{\pi}{R} \left(\frac{B_{A1}}{B_{\text{ц}}} - \frac{B_{A2}}{B_{\text{ц}}} \right) = 2I_2. \quad (1.96)$$

Решение задачи свелось к вычислению только одного интеграла I_2 , который можно привести к выражению

$$I_2 = \frac{R + h}{a^2 - b^2} \int_0^{\gamma_m} \sqrt{\sin^2 \gamma_m - \sin^2 \gamma} \cdot d\gamma. \quad (1.97)$$

Выделим из (1.97) интеграл

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\gamma_m} \frac{(\sin^2 \gamma_m - \sin^2 \gamma) \cdot d\gamma}{\sqrt{\sin^2 \gamma_m - \sin^2 \gamma}} = \\ &= \sin^2 \gamma_m \int_0^{\gamma_m} \frac{d\gamma}{\sqrt{\sin^2 \gamma_m - \sin^2 \gamma}} - \int_0^{\gamma_m} \frac{\sin^2 \gamma d\gamma}{\sqrt{\sin^2 \gamma_m - \sin^2 \gamma}}. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Вводя новую переменную интегрирования

$$\sin \xi = \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma_m} \quad (1.99)$$

с новыми пределами интегрирования $\xi_1 = 0, \gamma_1 = 0$ и $\xi_2 = \pi/2, \gamma_2 = \gamma_m$ и преобразуя (1.98) с учётом того, что

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \xi \sin^2 \gamma_m};$$

$$d\gamma = \frac{\cos \xi}{\cos \gamma} \sin \gamma_m d\xi = \frac{\cos \xi \cdot \sin \gamma_m \cdot d\xi}{\sqrt{1 - \sin^2 \xi \sin^2 \gamma_m}}; \quad (1.100)$$

придём к комбинации полных эллиптических интегралов [14]:

$$I_3 = E(k) - (1 - k^2)K(k), \quad (1.101)$$

где $k^2 = \sin^2 \gamma_m$ – квадрат модуля эллиптических интегралов первого и второго родов. Подставляя результат (1.101) в (1.96), получим

$$\frac{B_A}{B_{\text{ц}}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{R(R+h)}{h(2R+h)} \cdot [E(k) - (1 - k^2)K(k)]. \quad (1.102)$$

Соотношение (1.102) описывает радиальное распределение магнитного поля вне кольца в области $r > R$ или $h > 0$ для произвольных радиусов кольца R .

В таблице 1.2 представлены результаты вычислений с удвоенной точностью радиального распределения поля, выполненных по формуле (1.102).

Т а б л и ц а 1.2

Результаты численного моделирования радиального распределения магнитной индукции вне кольца

h/R	$B_A/B_{\text{ц}}$
.02000	14.97407
.03000	9.73797
.04000	7.13524
.05000	5.58294
.06000	4.55438
.07000	3.82426
.08000	3.28012
.09000	2.85962
.10000	2.52539
.11000	2.25374
.12000	2.02886
.13000	1.83985
.14000	1.67894
.15000	1.54043
.16000	1.42007
.17000	1.31460
.18000	1.22150
.20000	1.06485
.19000	1.13877

Продолжение табл. 1.2

.21000	.99843
.22000	.93848
.23000	.88412
.24000	.83466
.25000	.78947
.26000	.74805
.27000	.70998
.28000	.67488
.29000	.64243
.30000	.61236
.31000	.58444
.32000	.55844
.33000	.53420
.34000	.51155
.35000	.49035
.36000	.47046
.37000	.45179
.38000	.43423
.39000	.41768
.40000	.40208
.41000	.38735
.42000	.37341
.43000	.36022
.44000	.34772
.45000	.33586
.46000	.32460
.47000	.31389
.48000	.30370
.49000	.29400
.50000	.28475
.51000	.27592
.52000	.26750
.53000	.25945
.54000	.25175
.55000	.24439
.56000	.23734
.57000	.23058
.58000	.22410
.59000	.21789
.60000	.21192

Окончание табл. 1.2

.61000	.20619
.62000	.20068
.63000	.19539
.64000	.19030
.65000	.18539
.66000	.18067
.67000	.17612
.68000	.17173
.69000	.16750
.70000	.16342
.71000	.15948
.72000	.15568
.73000	.15201
.74000	.14846
.75000	.14502
.76000	.14170
.77000	.13849
.78000	.13538
.79000	.13237
.80000	.12946
.81000	.12663
.82000	.12389
.83000	.12124
.84000	.11867
.85000	.11617
.86000	.11375
.87000	.11140
.88000	.10911
.89000	.10690
.90000	.10474
.91000	.10265
.92000	.10062
.93000	.09864
.94000	.09672
.95000	.09485
.96000	.09303
.97000	.09126
.98000	.08953
.99000	.08785
1.00000	.08622

На рис. 1.14 в координатах $B_A/B_{\text{ц}} = f(h/R)$, где $B_A/B_{\text{ц}}$ – приведённое значение индукции, а h/R – приведённое значение координаты точки наблюдения A , отсчитываемой от геометрического проводника, представлено радиальное распределение индукции магнитного поля вне кольца, даваемое формулой (1.102).

Из рис. 1.14 и выражения (1.102) видно, что в начале координат магнитное поле имеет особенность, а при больших $h/R \gg 1$ быстро уменьшается. Уже на расстоянии $h/R = 1$ оно имеет значение $B(1) = 8,62\%$ от $B_{\text{ц}}$.

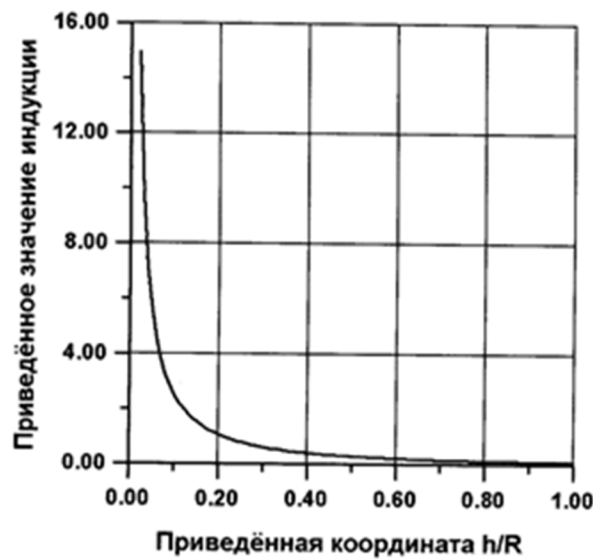


Рис. 1.14. Распределение индукции магнитного поля вне кольца

Проверим результаты численного моделирования выражения (1.102). Получим закон спадания поля при выполнении условия $h/R \gg 1$. При этом условии модуль эллиптических интегралов становится малой величиной ($k \ll 1$)

$$k^2 = \frac{R^2}{(R+h)^2} \approx \frac{R^2}{h^2} \ll 1. \quad (1.103)$$

Воспользуемся рядами разложения полных эллиптических интегралов при малом значении модуля $k < 1$:

$$E(k) \approx \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots \right]; \quad (1.104)$$

$$K(k) \approx \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right]. \quad (1.105)$$

Следует заметить, что приводимое на с. 404 в [14] разложение полных эллиптических интегралов ошибочно. В нём значение m следует заменить на k^2 . Запишем разложение функции в квадратных скобках (1.102), сохраняя два члена ряда:

$$K(k) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} \right), \quad (1.106)$$

$$E(k) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{k^2}{4} \right). \quad (1.107)$$

Тогда

$$f(k) = E(k) - (1 - k^2)K(k) \approx \frac{\pi}{2} \left(\frac{k^2}{2} + \frac{k^4}{4} \right). \quad (1.108)$$

Отбросив слагаемое со значением k^4 , получим

$$f(k) \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k^2}{2} = \frac{\pi R^2}{2 h^2}. \quad (1.109)$$

Учитывая, что разложение множителя перед $f(k)$ имеет вид $\approx 2R/(\pi h)$, получим закон изменения магнитного поля в дальней зоне при

выполнении условия $h/R \gg 1$

$$\frac{B(\infty)}{B_{\text{ц}}} = \frac{2R}{\pi h} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^2}{2h^2} = \frac{1}{2} \frac{R^3}{h^3}. \quad (1.110)$$

Из (1.110) следует, что поле в дальней зоне убывает очень быстро: обратно пропорционально кубу расстояния $\sim 1/(h/R)^3$. Это даёт возможность рассчитывать поле в дальней зоне, не прибегая к вычислению эллиптических интегралов. Уже при $h/R = 10^2$, значение поля

уменьшается до величины $B(h/R) = B_{\text{ц}} \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}$, то есть практически отсутствует. На расстоянии $h = 2R$ поле принимает значение $B(2) = B_{\text{ц}}/16 \approx 0,062 B_{\text{ц}}$.

Определим, какой вид особенности даёт (1.102) при выполнении условия $h/R \ll 1$. В этом пределе значение модуля немного меньше единицы

$$k^2 = \frac{1}{(1 + h/R)^2} \approx 1 - 2h/R. \quad (1.111)$$

Но при $k \rightarrow 1$ полный эллиптический интеграл первого рода имеет логарифмическую особенность [14]:

$$K(k) \approx \frac{1}{2} \ln \left(\frac{16}{1 - k^2} \right). \quad (1.112)$$

Вводя новую переменную $x = k$, определим предел, к которому стремится второе слагаемое в квадратных скобках в (1.102)

$$\lim_{x \rightarrow 1} y(x) = \frac{(x^2 - 1)}{2} \ln \left(\frac{16}{1 - x^2} \right) = 0. \quad (1.113)$$

Тогда с учётом того, что $E(1) \rightarrow 1$, получим

$$\frac{B_A}{B_{\text{ц}}} \approx \frac{2}{\pi} \cdot \frac{R}{2h} = \frac{R}{\pi h}. \quad (1.114)$$

Подставим в (1.114) значение $B_{\text{ц}}$ из (1.2)

$$B_A = \frac{R}{\pi h} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi h}. \quad (1.115)$$

Из (1.114) видно, что при малых значениях $h/R \ll 1$ магнитное поле у кольца имеет особенность $\sim 1/h$. Это такая же особенность, какую имеет бесконечно длинный прямой геометрический проводник. Как указывалось выше, особенность обусловлена тем, что точка наблюдения A всё ближе подходит к месту расположения геометрического проводника.

Проверим расчётную точку $h/R = 0,02$ по формуле (1.114): $B_A/B_{\text{ц}} = 1/(3,14 \cdot 0,02) \approx 15,91$. Полученное значение совпадает с табличным с погрешностью в 6 %. Какие выводы можно сделать из проделанных расчётов?

При малых значениях $h \ll R$ радиальное распределение магнитного поля вне кольца имеет такую же особенность, какую имеет длинный прямой геометрический проводник с током.

С увеличением расстояния h/R магнитное поле быстро спадает. Уже на расстоянии $h/R = 1$ оно имеет значение 8,62 % от индукции магнитного поля в центре кольца.

Индукция магнитного поля в дальней зоне убывает обратно пропорционально кубу расстояния, и уже на расстоянии $h = 2R$ оно принимает значение 6,2 % от индукции магнитного поля в центре кольца.

Радиальное распределение $B(r)$ магнитного поля кольца при переходе через точку изменяет свой знак на противоположный и имеет бесконечный разрыв.

Производная радиального распределения поля при $0 < r < R$ положительна и стремится к $+\infty$ при приближении к точке разрыва слева. В области $r > R$ производная распределения также положительна и стремится к $+\infty$ при приближении к точке разрыва $r = R$ справа.

1.1.3. Потокосая часть индуктивности токового кольца с конечной радиальной толщиной

Как было выяснено в разделе 1.1.1, при протекании тока по кольцу внутри него формируется неоднородное магнитное поле. Это поле через площадь кольца $S = \pi R^2$ создаёт собственный магнитный поток:

$$\Phi_c = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_*} B_A(r) \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi. \quad (1.116)$$

Если верхний предел интегрирования r_* приравнять к R , то интеграл (1.116) равен ∞ . Это связано с существованием особенности вида (1.77) у распределения магнитного поля $B_A(r)$ при $r \rightarrow R$.

Причина (возникновения) этой особенности заключается в том, что точка наблюдения A при $\delta \rightarrow 0$ всё ближе перемещается к месту расположения геометрического проводника.

В главе 1 показано решение дифференциальных уравнений, из которых следует, что распределение магнитного поля круглого прямого тока с конечным радиусом не имеет особенностей на поверхности проводника, а при больших r/R убывает обратно пропорционально r/R .

Этот факт позволяет обрывать распределение магнитного поля в (1.116) в точке $r_* = r$ и считать, что в формуле (1.74) параметр δ играет роль конечной радиальной ширины металлического покрытия токового кольца (см. рис. 1.15). В этом приближении далее вычислены основные физические параметры кольца.

Все ранее решённые задачи были одномерные, но относились к 2D типу геометрии, поскольку рассматривалось плоское кольцо, толщина которого H была значительно меньше внешнего радиуса кольца.

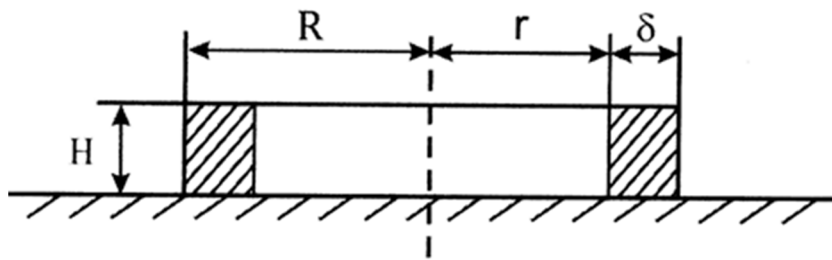


Рис. 1.15. Геометрические размеры цилиндрического токового кольца

Заменим в (1.116) r_* на r . Радиус r играет теперь роль радиуса полости кольца. Вводя безразмерную переменную $x = r/R$, приведём (1.116) к виду

$$\frac{\Phi_c}{\Phi_*} = \int_0^x \left[\frac{E(k)}{1-x} + \frac{K(k)}{1+x} \right] x \cdot dx,$$

где $k = 2\sqrt{x}/(1+x)$, $\Phi_* = \mu_0 i R$ – масштаб потока. При получении (1.117) в (1.116) было выполнено интегрирование по углу.

Индуктивность L по определению даётся соотношением

$$\Phi_c = L \cdot i.$$

В (1.118) индуктивность связывает ток в кольце и собственный поток, который этот ток создаёт. В связи с этим индуктивность в (1.118) удобно назвать потоковой индуктивностью. В неё не входит индуктивность, которая может возникать из-за взаимодействия тока в проводнике с потоком, создаваемым этим током внутри проводника.

Разделив обе части (1.118) на масштаб потока, получим

$$\frac{\Phi_c}{\Phi_*} = \frac{L \cdot i}{\mu_0 i R} = \frac{L}{L_*},$$

где $L_* = \mu_0 R$ – масштаб потоковой индуктивности кольца. Он линейен по радиусу и определяет масштаб индуктивности как геометрическую величину, связанную с радиусом кольца. Заметим, что его значение меньше в $2/\pi$ раз значения оценочной индуктивности кольца L_0 [см. (1.4)].

Формула (1.119) указывает на то, что и приведённый поток (1.117), и приведённое значение потоковой части индуктивности (1.119) совпадают друг с другом по величине и определяются значением интеграла, стоящего в правой части (1.117). Проинтегрировать (1.117) в аналитическом виде не удаётся.

Вычисление интеграла проводилось по формуле прямоугольников, и шаг интегрирования выбирался таким, чтобы была обеспечена точность вычислений вплоть до четвёртого знака после запятой. В таблице 1.3 представлены результаты вычислений с удвоенной точностью в виде зависимости приведённой индуктивности кольца L/L_* от приведённого параметра r/R .

Т а б л и ц а 1.3

**Численное моделирование зависимости
приведённой индуктивности кольца от приведённого радиуса**

r/R	L/L_*
.1000	.0049
.1100	.0060
.1200	.0071
.1300	.0084
.1400	.0097
.1500	.0112
.1600	.0127
.1700	.0144
.1800	.0162
.1900	.0181
.2000	.0201
.2100	.0221

Продолжение табл. 1.3

.2200	. 0244
.2300	.0267
.2400	.0291
.2500	.0316
.2600	. 0343
.2700	.0371
.2800	.0399
.2900	.0430
. 3000	.0461
.3100	.0493
.3200	.0527
.3300	.0562
.3400	.0598
.3500	.0636
.3600	.0675
.3700	.0715
. 3800	.0756
. 3900	. 0799
.4000	. 0844
.4100	.0890
.4200	.0937
.4300	.0986
.4400	.1036
.4500	.1088
.4600	.1142
.4700	.1197
.4800	.1254
.4900	.1313
.5000	.1374
.5100	.1436
.5200	.1500
.5300	.1567
. 5400	.1635
.5500	.1706
. 5600	.1778
. 5700	.1853
.5800	.1930
.5900	.2010
.6000	.2092

Окончание табл. 1.3

. 6100	.2177
.6200	.2264
. 6300	.2354
. 6400	.2448
. 6500	.2544
. 6600	.2644
.6700	.2747
. 6800	.2853
. 6900	.2964
.7000	.3078
.7100	.3196
.7200	.3319
. 7300	.3447
.7400	.3580
.7500	.3718
.7600	.3862
.7700	.4012
.7800	.4169
.7900	.4333
.8000	.4505
.8100	.4685
.8200	.4875
.8300	.5076
.8400	.5288
.8500	.5512
.8600	.5752
.8700	.6008
.8800	.6283
.8900	.6579
.9000	.6902
.9100	.7255
.9200	.7646
.9300	.8082
.9400	.8578
.9500	.9153
.9600	.9836
.9700	1.0683
.9800	1.1799
.9900	1.3451
.9950	1.4713

Как видно из табл. 1.3, значения приведённой индуктивности изменяются в пределах от 0,0049 при $r/R = 0,1$ до 1,4713 при $r/R = 0,995$. Из чего видно, что при малых значениях отверстия кольца r реализуется случай малых, по сравнению с масштабом, индуктивностей, а при $r \rightarrow R$ (большие значения отверстия кольца r) реализуется случай больших, по сравнению с масштабом, индуктивностей.

Представляет интерес рассмотреть эти предельные случаи аналитически. Для случая малых индуктивностей выполнено условие $r/R \ll 1$. Поэтому для их вычисления в (1.116) следует подставить решение (1.80) в виде ряда с чётными степенями, который быстро сходится

$$\begin{aligned} \frac{L_1}{L_*} &= \int_0^x \left(1 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{45}{64}x^4 + \frac{175}{250}x^6 + \dots \right) x dx \approx \\ &\approx \frac{x^2}{2} + \frac{3}{16}x^4 + \frac{45}{384}x^6 + \frac{175}{2048}x^8 + \dots \end{aligned} \quad (1.120)$$

Подставляя в (1.120) предельное значение $x/R = 0,1$, получим $L_1/L_* \approx 0,5018 \cdot 10^{-2}$, что очень близко к результату, приведённому в табл. 1.3.

Случай больших, по сравнению с масштабом, индуктивностей реализуется в приближении $\delta/R \ll 1$. В этом приближении точное подынтегральное выражение (1.117) можно заменить радиальным распределением магнитного поля (1.76). Вводя переменную $t = \delta/R$, интеграл (1.117) приведём к виду (1.121) и проинтегрируем

$$\frac{L_2}{L_*} \sim \int_t^1 \frac{(1-t)dt}{t} \approx \ln\left(\frac{R}{\delta}\right) - 1. \quad (1.121)$$

Из (1.121) видно, что оценочное соотношение для индуктивности кольцевого тока с бесконечно тонкой радиальной шириной имеет логарифмическую расходямость. Может показаться, что таким образом можно решить проблему большой индуктивности в малых геометрических размерах. На самом деле это не так.

Сделаем оценки диапазона индуктивностей, которые дают реальные размеры колец. Для радиуса кольца $R_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ м с радиусом полости $r = 50$ мкм (т.е. на два порядка ниже) вычислим параметр $x = r/R = 0,01$. Он малый, и мы попадаем в диапазон малых индуктивностей. Используя соотношение (1.120), получим $L_1/L_* = 0,5 \cdot 10^{-4}$. Величина $L_* = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 20\pi \cdot 10^{-10}$ Гн. Окончательное значение $L_1 = 0,5 \cdot 10^{-4} \times 20\pi \cdot 10^{-10} = 10\pi \cdot 10^{-14} = 3,14 \cdot 10^{-13}$ Гн = 0,314 пГн.

Если радиус полости этого кольца увеличить до значения $x = r/R = 0,99$, то $\delta/R = 0,01$, и мы попадаем в диапазон больших индуктивностей. Используя соотношение (1.121), получим $L_2/L_* = 3,6$ (кстати, табличное значение в 2,68 раза меньше). Поэтому оценочное

соотношение (1.121) лучше использовать для значений $\delta/R < 10^{-3}$. Сохраняя табличное значение $L_2/L_* = 1,345$, получим значение индуктивности $L_2 = 1,345 \cdot 20\pi \cdot 10^{-10} = 84,5 \cdot 10^{-10} = 8,45$ нГн.

Реальные значения индуктивности для кольца радиусом $R = 0,5$ см лежат в диапазоне значений от 0,314 пГн до 8,45 нГн при изменении радиальной ширины кольца в диапазоне от 4,95 мм до 50 мкм. Заметим, что оценочное значение индуктивности L_0 (см. 1.4) выше верхней границы диапазона.

Для радиуса кольца $R_2 = 5 \cdot 10^{-4}$ м с радиусом полости $r = 5$ мкм (т.е. на два порядка ниже) $x = r/R = 0,01$. Используя (1.120), получим $L_1/L_* = 0,5 \cdot 10^{-4}$; $L_* = 2\pi \cdot 10^{-10}$ Гн. Значение $L_1 = 0,0314$ пГн. Если радиус полости этого кольца увеличить до значения $x = r/R = 0,99$, то $L_2 = 0,845$ нГн.

Реальные величины индуктивности для кольца радиусом $R = 0,5$ мм сдвигаются к малым значениям и лежат в диапазоне от 0,0314 пГн до 0,845 нГн при изменении радиальной ширины кольца в пределах от 0,495 мм до 5 мкм.

Покажем, что расчётные формулы (1.117), (1.120) и (1.121) дают результаты того же порядка, что и экспериментальные. Так эксперименты, измеряющие зависимость значения индуктивности от радиуса витка (для радиусов 300, 400 и 600 мкм) и от его радиальной толщины, изменяющейся в пределах от 10 до 100 мкм, дают значения индуктивности витка, варьируемой в пределах от 1 до 3,5 нГн [15]. При этом, для всех индуктивностей, независимо от величины их основного радиуса, проявляется следующая закономерность: с ростом радиальной толщины напыления индуктивность кольца уменьшается.

Промоделируем по формуле (1.117) числовые значения индуктивностей с радиусами 300, 400 и 600 мкм при изменении радиальной ширины напыления δ в пределах от 10 до 100 мкм. В табл. 1.4 представлены результаты такого моделирования. В первой колонке дана в микронах радиальная ширина напыления δ , во второй колонке даны значения индуктивности в нГн для кольца радиусом 600 мкм, в третьей колонке – значения индуктивности для кольца радиусом 400 мкм, а в четвёртой – индуктивность для кольца радиусом в 300 мкм. Индуктивности рассчитаны с удвоенной точностью.

По таблице 1.4 была построена графическая зависимость индуктивностей $L = f(\delta)$ от радиальной ширины кольца и представлена на рис. 1.16 для трёх значений радиуса. Как видно из таблицы 1.4. и рис. 1.16, теория указывает на то, что с ростом радиальной ширины напыления индуктивность кольца уменьшается.

**Численное моделирование зависимости индуктивности колец
от радиальной ширины напыления**

δ , мкм	L_1 , нГн	L_2 , нГн	L_3 , нГн
1	2	3	4
10.000	.946	.573	.397
11.000	.926	.558	.386
11.000	.907	.545	.376
13.000	.890	.533	.366
11.000	.874	.522	.357
15.000	.859	.511	.349
16.000	.845	.501	.341
17.000	.831	.491	.334
18.000	.818	.482	.327
19.000	.806	.474	.320
20.000	.794	.465	.314
21.000	.783	.457	.308
21.000	.772	.450	.302
23.000	.761	.443	.296
21.000	.751	.436	.291
25.000	.742	.429	.286
26.000	.732	.422	.281
27.000	.723	.416	.276
28.000	.715	.410	.271
29.000	.706	.404	.267
30.000	.698	.398	.262
31.000	.690	.393	.258
31.000	.682	.388	.254
33.000	.675	.382	.250
31.000	.667	.377	.246
35.000	.660	.372	.242
36.000	.653	.368	.238
37.000	.647	.363	.235
38.000	.640	.358	.231
39.000	.634	.354	.228
40.000	.627	.350	.225
41.000	.621	.345	.221
41.000	.615	.341	.218
43.000	.609	.337	.215
41.000	.603	.333	.212
45.000	.598	.329	.209

Продолжение табл. 1.4

1	2	3	4
46.000	.592	.325	.206
47.000	.587	.322	.203
48.000	.581	.318	.201
49.000	.576	.314	.198
50.000	.571	.311	.195
51.000	.566	.307	.192
51.000	.561	.304	.190
53.000	.556	.301	.187
51.000	.551	.297	.185
55.000	.547	.294	.182
56.000	.542	.291	.180
57.000	.538	.288	.178
58.000	.533	.285	.175
59.000	.529	.282	.173
60.000	.524	.279	.171
61.000	.520	.276	.169
61.000	.516	.273	.166
63.000	.512	.270	.164
61.000	.508	.267	.162
65.000	.504	.265	.160
66.000	.500	.262	.158
67.000	.496	.259	.156
68.000	.492	.257	.154
69.000	.488	.254	.152
70.000	.484	.251	.150
71.000	.481	.249	.148
71.000	.477	.246	.146
73.000	.473	.244	.144
71.000	.470	.242	.143
75.000	.466	.239	.141
76.000	.463	.237	.139
77.000	.459	.234	.137
78.000	.456	.232	.136
79.000	.453	.230	.134
80.000	.449	.228	.132
81.000	.446	.225	.131
81.000	.443	.223	.129
83.000	.440	.221	.127
81.000	.436	.219	.126

1	2	3	4
85.000	.433	.217	.124
86.000	.430	.215	.123
87.000	.427	.213	.121
88.000	.424	.211	.120
89.000	.421	.209	.118
90.000	.418	.207	.117
91.000	.415	.205	.115
91.000	.412	.203	.114
93.000	.409	.201	.112
91.000	.407	.199	.111
95.000	.404	.197	.109
96.000	.401	.195	.108
97.000	.398	.193	.107
98.000	.396	.191	.105
99.000	.393	.190	.104
100.000	.390	.188	.103

Это ясно из физических соображений. При увеличении ширины напыления уменьшается площадь круга, через которую создаётся поток. Уменьшение площади круга приводит к уменьшению количества силовых линий, пронизывающих круг. Уменьшение потока эквивалентно уменьшению индуктивности.

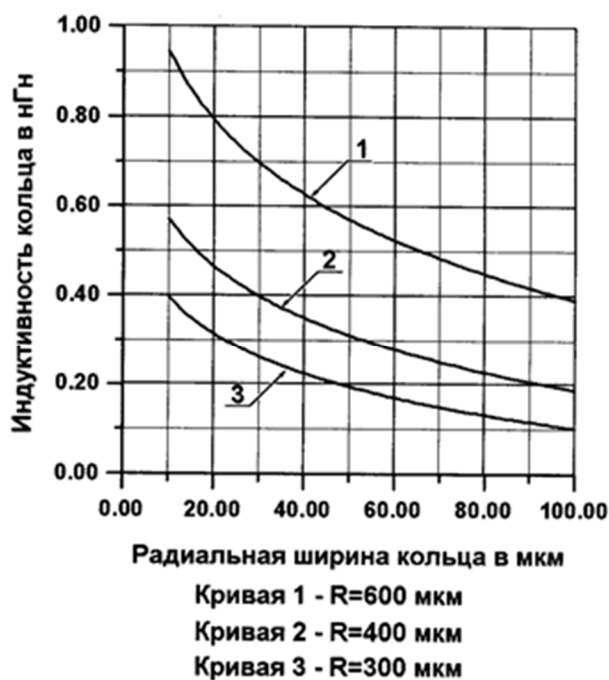


Рис. 1.16. Теоретические зависимости индуктивности кольца от его радиальной ширины

Представляет интерес точное сравнение полученных результатов с экспериментом. На рис. 1.17 приведены экспериментальные результаты измерений индуктивности кольца и её зависимость от ширины слоя покрытия [15].

На рис. 1.17 приняты следующие обозначения: ширина металлизированного слоя w совпадает с нашим δ ; D_n – значение внешнего диаметра кольца совпадает с удвоенным радиусом R . Из сравнения рис. 1.16 и рис. 1.17 видно, что для радиуса $R_1 = 600$ мкм при ширине слоя 10 мкм индуктивность кольца экспериментальная $L_э$ больше, чем теоретическая L_T , в 3,6 раза. На ширине слоя 100 мкм $L_э$ больше, чем L_T , в 5,13 раза.

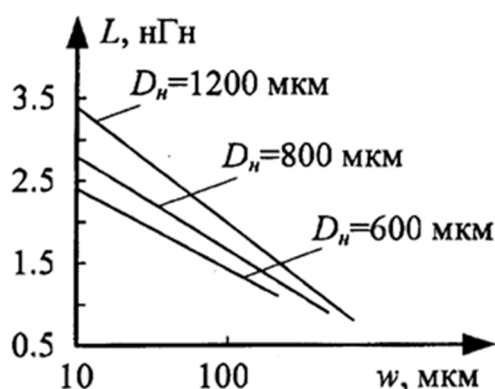


Рис. 1.17. Зависимость индуктивности кольца от ширины слоя напыления

То же самое можно сказать и о других индуктивностях. Для радиуса $R_3 = 300$ мкм это отличие ещё больше. При ширине слоя 10 мкм индуктивность $L_э$ больше, чем L_T , в 5,8 раза.

Чем можно объяснить такое существенное отличие?

1. При расчётах было принято, что основной вклад в индуктивность даёт её потоковая часть. Токовую часть индуктивности вычислить невозможно в связи с расходимостью потоковых интегралов на верхнем пределе интегрирования при $r_* \rightarrow R$ в (1.116).

2. При расчётах индуктивности кольца не принималась во внимание индуктивность проводника, подводящего ток в систему в месте контакта. Это несколько увеличит полученные теоретические значения.

3. В экспериментах также не учитывалось существование погонной индуктивности самих проводников, подводящих электрический ток к кольцу. Как показано ниже, она может в разы увеличить истинную индуктивность кольца.

4. Эксперименты проводились на высоких частотах, при которых уже проявляет себя скин-эффект.

1.1.4. Добротность потоковой части индуктивности

Теоретическое значение индуктивности (1.119) следует считать некоторым эталоном, рассчитанным для постоянного тока. Она остаётся неизменной и для переменного тока в той области частот, когда (где) фазовый сдвиг между током и потоком остаётся нулевым.

Для этой области частот статическая индуктивность (1.119) остаётся неизменной, т.е. частотно-независимой. Определим интервал частот, в котором можно получить приемлемые значения её добротности.

Реактивное сопротивление индуктивности (1.119) – линейная функция частоты

$$x_L = \omega L. \quad (1.122)$$

Как известно, добротность индуктивности вычисляется из соотношения

$$Q = \omega L / R_0, \quad (1.123)$$

где

$$R_0 = \rho l / S \quad (1.124)$$

– омическое сопротивление кольца, взятое по его средней линии l ; ρ – удельное сопротивление материала, из которого сделано кольцо; а S – площадь его поперечного сечения, которое совпадает с площадью поперечного сечения токового пучка.

Подставляя (1.124) в (1.123), получим (формулу) для добротности

$$Q = \frac{\omega L \delta H}{2\pi r_s \rho}, \quad (1.125)$$

где H – аксиальная толщина слоя металлизации,

$$r_s = R - \delta / 2 \quad (1.126)$$

– радиус средней линии кольца. Из (1.125) видно, что добротность потоковой индуктивности также оказывается линейной функцией частоты переменного тока.

Нижняя характеристическая частота следует из (1.125) при требовании $Q=1$

$$\omega_* = \frac{2\pi r_s \rho}{L \delta H}. \quad (1.127)$$

Как видно из (1.127), для одинаковых колец она будет тем выше, чем больше удельное сопротивление применяемого проводника.

Оценим её значение для кольца со следующими параметрами: радиус 600 мкм, толщина напыления меди ($\rho=16$ нОм·м) $H=5$ мкм, радиальная ширина $\delta=10$ мкм. Из оценки следует, что в рассматриваемом случае добротность индуктивности из меди будет больше единицы для частот $\nu > \nu_{j*} = 0,2$ ГГц. Это указывает на то, что такие кольца будут давать высокую добротность на частотах в десятки ГГц, что и наблюдается в экспериментах. Для того же кольца, выполненного из алюминия

($\rho=28$ нОм·м), нижняя характеристическая частота будет выше в 1,75 раза. Понижение нижней частоты возможно при увеличении толщины напыления H .

Оценим границу применимости полученных результатов на высоких частотах. Её можно получить, исследуя времена установления неоднородных магнитных полей в кольце. Будем считать, что эти времена связаны со скоростью передачи электромагнитных взаимодействий, т.е. со скоростью света. Тогда характерное время установления $\tau = R/c$, где R – радиус кольца, даёт значение верхней характеристической частоты $\nu_{h*} = 1/\tau = c/R$. Для того же кольца её значение получается 500 ГГц. На современном этапе развития интегральных технологий эти частоты пока не достигнуты.

1.1.5. Моделирование частотных свойств индуктивности токового кольца в симуляторе HFFS – Ansoft. Сравнение результатов с экспериментами

Моделирование индуктивных свойств уединённого планарного одновиткового медного кольца проводилось на симуляторе HFFS – Ansoft. Использовалась версия программы 2010 г. На рис. 1.18 представлена базовая конструкция планарной индуктивности (прототип). Как видно из рис. 1.18, индуктивность была выполнена из медной металлической плёнки (слой) с определённой толщиной металлизации, которая лежала на поверхности подложки. Внутренний радиус плёнки имел значение 500 мкм, а внешний – 750 мкм.

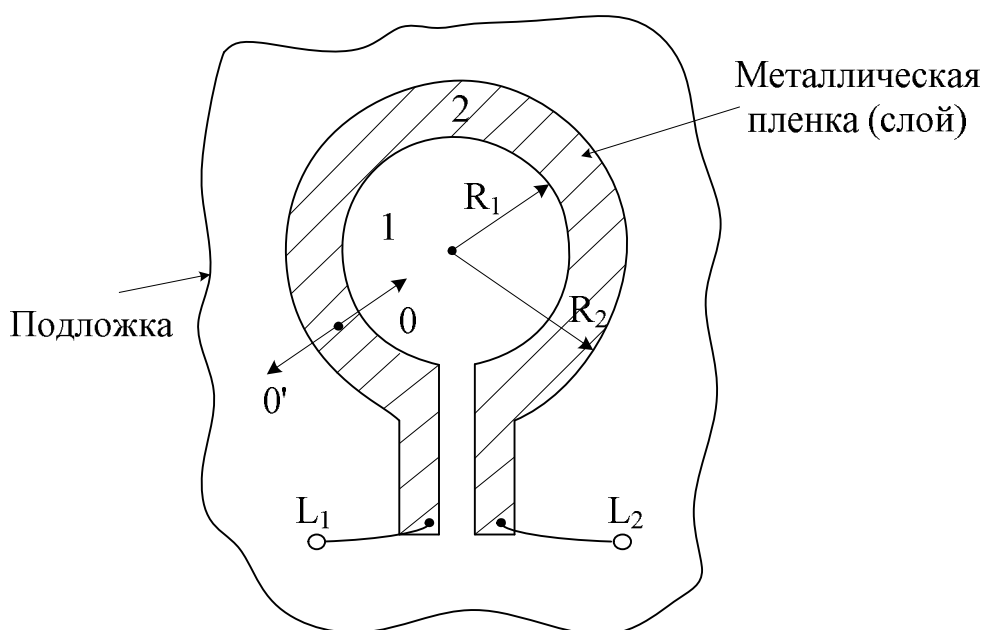


Рис. 1.18. Базовая конструкция планарной индуктивности кольца

На рис. 1.19 показан поперечный разрез модели кольцевой индуктивности с добавлением охранного земляного квадрата GND с размерами 2250×2250 мкм. На рисунке принято обозначение толщины металлизации (толщина слоя) буквой t . Как видно из рис. 1.19, плёнка была изолирована от металлической подложки и нагружена на вакуум ($E_r=1$).



Рис. 1.19. Поперечный разрез модели

На рис. 1.20 дано представление аксонометрической проекции модели индуктивности кольца в симуляторе HFFS – Ansoft. В ней один порт ввода (Port 1) вводит ток в интегральную индуктивность. Вывод тока осуществлялся вторым портом через соединение с «землём» идеальным проводником. Толщина слоя металлизации t изменялась в пределах от 10 до 100 мкм. Внизу рисунка вынесен масштаб длины.

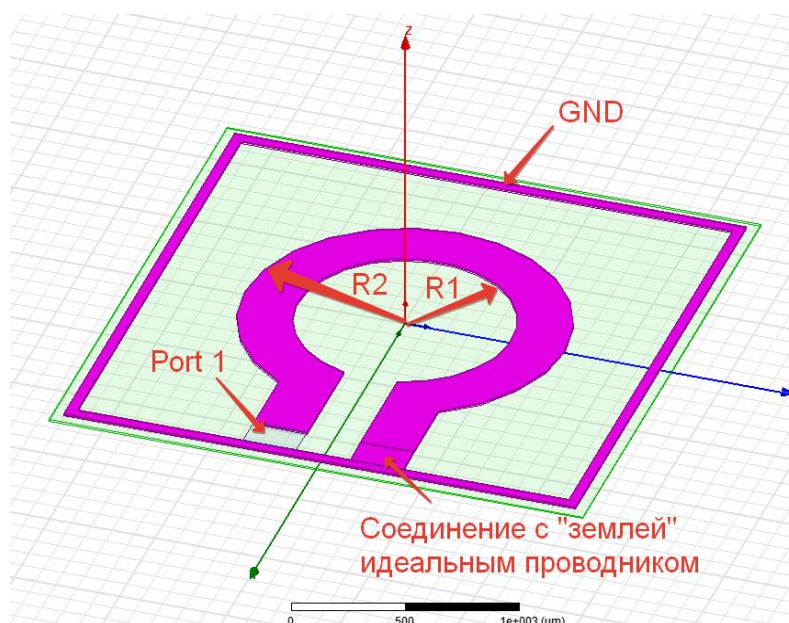


Рис. 1.20. Модель индуктивности кольца в симуляторе HFFS – Ansoft

Программа позволяет рассчитывать частотные зависимости индуктивности L и добротности Q кольца, которые находятся по формулам:

$$L = \text{imag}(Z_{in}) / 2\pi f \quad (1.128)$$

$$Q = \text{imag}(Z_{in}) / \text{real}(Z_{in}). \quad (1.129)$$

В формулах введено обозначение Z_{in} – комплексное сопротивление индуктивности.

На рис. 1.21 представлен первый результат моделирования – частотная зависимость индуктивности кольца с толщиной слоя металлизации 80 мкм в широком диапазоне частот от 0,75 до 20 ГГц. Отмечены контрольные точки m1 (частота 4 ГГц, индуктивность 1,706 нГн) и m2 (частота 17,1 ГГц, индуктивность 36,1 нГн). Эти контрольные точки указывают на возможность изменения индуктивности кольцевого тока в 21 раз при изменении частоты всего в 4,3 раза. В соответствии с диаграммой Смита, численное моделирование предсказывает на частоте 17,5 ГГц смену индуктивного характера комплексного сопротивления на ёмкостный.

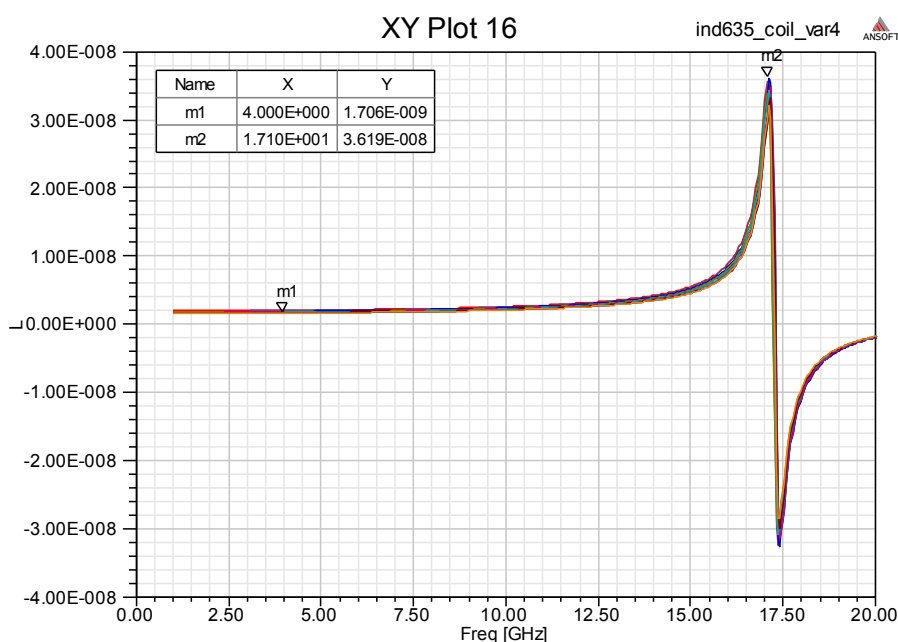


Рис. 1.21. Частотная зависимость индуктивности кольца с толщиной металлизации 80 мкм

На рис. 1.22 представлен второй результат моделирования, который показывает, как изменяется индуктивность кольцевого тока с изменением толщины металлизации. Из него видно, что уменьшение толщины металлизации от 100 до 10 мкм приводит к увеличению индуктивности кольца от 1,62 до 2,08 нГн на частоте 4 ГГц. Чем меньше толщина металлизации, тем больше значение индуктивности.

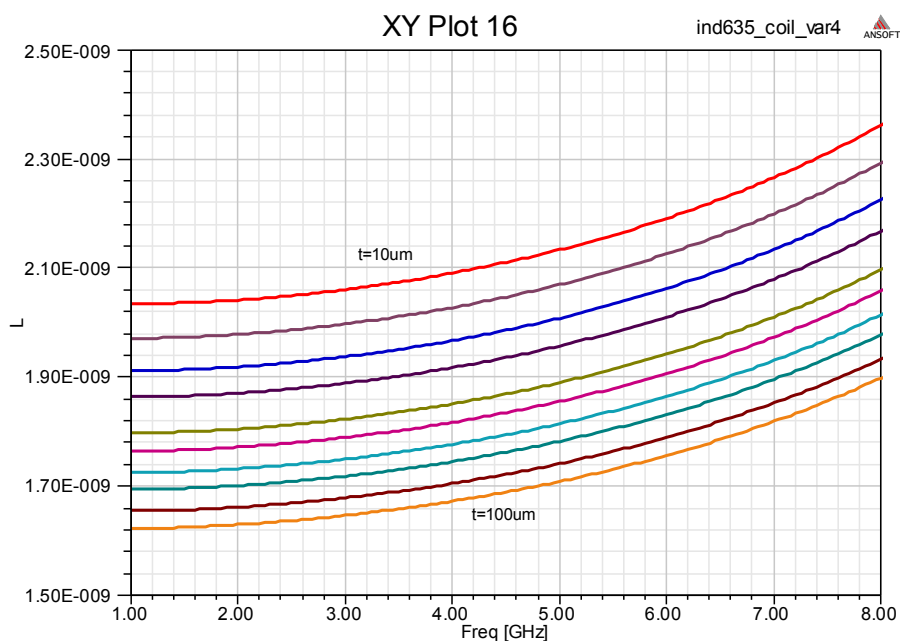


Рис. 1.22. Зависимость индуктивности кольца от толщины металлизации

На рис. 1.23 представлены частотные характеристики добротности колец с различной толщиной металлизации, изменяющейся от 10 до 100 мкм.

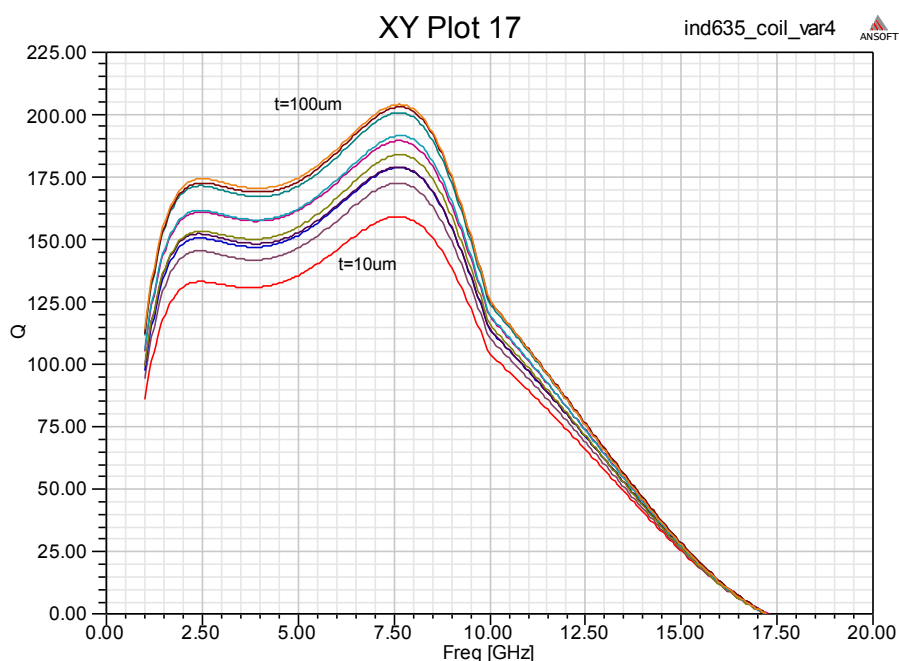


Рис. 1.23. Частотная зависимость добротности токового кольца

Как видно из рис. 1.23, добротность таких колец достигает очень больших значений, лежащих в диапазоне от 100 до 200. Это на один-два порядка больше, чем достигаемые значения в современных планарных

технологиях при формировании индуктивности с большим числом витков. Максимальные значения добротности индуктивности достигаются на большей толщине металлизации.

Добротность у всех индуктивностей достигает максимума на частотах около 7,5 ГГц, а затем уменьшается практически до нуля. Понижение добротности к нулю на частотах около 17 ГГц обусловлено переходом индуктивности с положительных значений в отрицательную область.

Частотные изменения индуктивности в программе моделирования обусловлены тем, что на частотах выше 1 ГГц уже начинает проявлять себя скин-эффект. Он приводит к уменьшению площади поперечного сечения токового шнура из-за его выталкивания на поверхность.

Для проведения сравнения мы добавим вычисление объёмной плотности индуктивности планарного токового кольца, пользуясь соотношением

$$\rho_L = L / [\pi(R_2^2 - R_1^2)h]. \quad (1.130)$$

В табл. 1.5 сведены основные параметры индуктивности исследуемого кольца, которые взяты из различных источников: результаты, полученные в HFSS Ansoft; результаты вычислений по формулам монографии; данные экспериментов, приведённые в работе [15].

Т а б л и ц а 1.5

**Сравнительные значения индуктивности
конкурирующих методов**

Наименование	Частота	Индуктивность	Толщина металлизации	Объёмная плотность индуктивности
HFSS-Ansoft	4 ГГц	2,08 нГн	10 мкм	285 Гн/м ³
Аналитика	100 МГц	0,26 нГн	10 мкм	35,6 Гн/м ³
Эксперимент	100 МГц	0,72 нГн	5 мкм	147 Гн/м ³

Как видно из табл. 1.5, значения магнитостатической индуктивности кольца, следующие (полученные) из аналитических расчётов для принятых выше геометрических размеров, дают значение индуктивности в восемь раз меньше, чем значения, полученные HFSS моделированием на частоте 4 ГГц при толщине металлизации 10 мкм. В то же время это значение оказывается всего в 2,8 раза меньше, чем значение индуктивности, полученное в экспериментах на 100 МГц.

HFSS-моделирование даёт значение объёмной плотности индуктивности выше экспериментального в два раза и выше аналитических расчётов – в восемь раз.

Сравнительное отличие в разы, а не на порядки, указывает на приемлемую степень адекватности и достоверности конкурирующих между собой методов исследования многогранных свойств интегральной индуктивности.

Выводы по разделу 1.1

Факт отсутствия особенности поля на поверхности проводника позволяет обрывать распределение магнитного поля на конечном расстоянии от геометрического проводника и считать параметр δ конечной радиальной шириной металлического покрытия токового кольца.

Полученное соотношение для потока даёт возможность рассчитать зависимость потоковой индуктивности от отношения радиальной ширины кольца δ к радиусу витка.

Аналитически исследованы случаи малой и большой, по сравнению с масштабом, индуктивности, которые реализуются при большой и малой радиальной ширине кольца.

Реальные величины индуктивности для кольца с радиусом $R_1 = 0,5$ мм сдвигаются к малым значениям по сравнению со случаем $R_2 = 0,5$ см и лежат в диапазоне от 0,0314 пГн до 0,845 нГн при изменении радиальной ширины кольца в пределах от 0,495 мм до 5 мкм.

Теория и эксперимент указывают на то, что с ростом радиальной ширины напыления индуктивность кольца уменьшается, что согласуется с физическим объяснением.

Точное сравнение расчётных результатов с экспериментальными (данными) показывает, что теоретические результаты занижены по сравнению с экспериментом.

Высказано предположение, что такое различие может быть связано с тремя причинами:

- 1) невозможностью вычисления токовой части индуктивности кольца;
- 2) наличию неучтённой погонной индуктивности проводников, подводящих переменный электрический ток к кольцу;
- 3) возможное увеличение экспериментальных значений индуктивности за счёт скин-эффекта.

Добротность потоковой части индуктивности оказывается линейной функцией частоты. Коэффициент линейности зависит от удельного сопротивления используемого проводника. Для одинаковых колец он тем больше, чем меньше удельное сопротивление применяемого проводника.

Диапазон частот, для которого можно рассчитывать индуктивность планарного токового кольца, относится к низкочастотному диапазону, в котором разность фаз между током и потоком остаётся равной нулю. Это диапазон частот (Ω_n), который не превышает значение частоты в 100 МГц.

Значения магнитостатической индукции кольца, следующие из аналитических расчётов, дают значение индуктивности в восемь раз меньше, чем значения, полученные HFSS-моделированием на частоте 4 ГГц при толщине металлизации 10 мкм. В то же время это значение оказывается всего в 2,8 раза меньше, чем значение индуктивности, полученное в экспериментах на 100 МГц.

1.2. О расчёте коэффициента увеличения планарной индуктивности 2D-спиралей Архимеда и обобщённых спиралей

В разделе 1.2 предлагается оригинальная методика расчётов спиральной индуктивности L высокой симметрии, исходящая из физического определения этого понятия как коэффициента пропорциональности между потоком Φ и током i , создающим этот поток

$$\Phi = Li. \quad (1.131)$$

В связи с этим предлагаемая последовательность расчёта индуктивности плоской токовой спирали заключается в следующем: 1) по заданному значению тока в кольце радиусом R рассчитывается значение магнитного поля B_* в центре кольца; 2) в это кольцо помещается спираль с заданным законом зависимости $r = r(\varphi)$ в полярных координатах, который ограничен по числу витков N двумя переменными: начальным значением угла φ_1 и радиусом r_1 и конечным значением угла φ_2 и радиусом R , совпадающим с радиусом кольца; 3) по закону Био – Савара – Лапласа рассчитывается новое значение индукции магнитного поля B , которое создаёт планарная спираль в центре кольца; 4) вычисляется коэффициент увеличения индукции магнитного поля α и находится связь значения индуктивности, формируемого спиралью, с коэффициентом увеличения α .

1.2.1. Физико-математическая модель расчёта

Для вычислений воспользуемся законом Био – Савара – Лапласа [12]. В современных математических обозначениях он записывается в виде:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(dl \times r)}{r^3}, \quad (1.132)$$

где $\overline{dB}$ – элементарная магнитная индукция поля, создаваемая элементом проводника с током $I d\vec{l}$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; $d\vec{l}$ – элементарный вектор длины, совпадающий по направлению с током (элемент проводника); I – сила тока; r – радиус-вектор, проведенный от элемента проводника к точке наблюдения A , в которой определяется магнитная индукция.

1.2.2. Магнитное поле тока и индуктивность спирали Архимеда

Расчёт магнитного поля в центре спирали будем проводить, используя закон (1.2). На рис. 1.24 представлено расположение векторов задачи в полярной системе координат. Направление векторов отмечено стрелками. Жирная кривая выделяет фрагмент спирали, которая начинается в точке $(0,0)$. Вектор $d\vec{l}$ направлен по касательной к

выделенной кривой и совпадает с направлением тока. Он имеет две компоненты: $d\vec{l}_{||}$ и $d\vec{l}_{\perp}$. Вектор $d\vec{l}$ составляет угол α с направлением радиус-вектора r . Вектор $d\vec{l}$ составляет угол α_1 с направлением другого вектора r_1 . Векторы r и r_1 – противоположны друг другу, но равны по модулю.

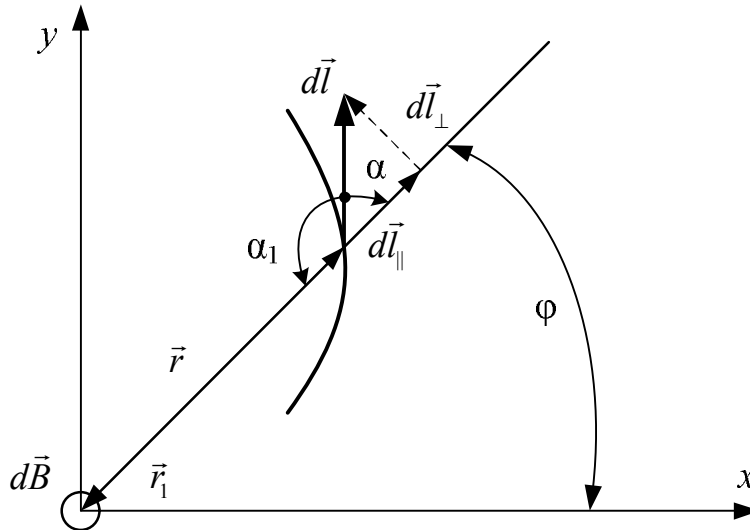


Рис. 1.24. Направления основных векторов задачи

На плоскости, представленной на рис. 1.24, закон (1.2) можно записать в скалярном виде

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha_1}{4\pi r_1^2}. \quad (1.133)$$

Затем в (1.133) произведём замену

$$dl \sin \alpha_1 = dl \sin \alpha = r d\varphi. \quad (1.134)$$

Она указывает на то, что поперечная составляющая вектора dl вносит вклад в формирование индукции магнитного поля в начале координат, а продольная составляющая – не вносит. Тогда формула для расчёта элементарной индукции магнитного поля в центре спирали имеет вид

$$dB = \frac{\mu_0 I d\varphi}{4\pi r(\varphi)}. \quad (1.135)$$

Из (1.135) следует общая формула для расчёта индукции в начале координат для любых спиралей, имеющих закон $r = r(\varphi)$,

$$B = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 I d\varphi}{4\pi r(\varphi)}. \quad (1.136)$$

Рассчитаем коэффициент увеличения индукции в центре спирали Архимеда. Уравнение спирали Архимеда имеет вид

$$r = a\varphi, \quad (1.137)$$

где a – постоянная. Как известно, спираль Архимеда описывает движение светящейся точки, которая имеет две компоненты скорости – постоянную радиальную скорость движения v_r и постоянную угловую скорость ω . Постоянная a связана с этими переменными соотношением $a = v_r / \omega$.

Предположим, что начальное положение спирали Архимеда находится в точке $r=r_1$ и имеет угол $\varphi_1=\pi/1$. Тогда начальный и конечный радиусы, и начальный и конечный угол спирали связаны соотношением

$$\frac{R}{r_1} = 1 + 4N = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \quad (1.138)$$

где N – целое количество витков спирали.

Интегрируя в этих пределах выражение (1.136), получим выражение для коэффициента увеличения индукции поля α

$$\frac{B}{B_*} = \alpha = (1 + 4N) \ln(1 + 4N) / 4, \quad (1.139)$$

где $B_* = \mu_0 I / (2R) \quad (1.140)$

– индукция, создаваемая в центре кольца тем же током.

В таблице 1.6 представлена зависимость коэффициента увеличения индукции и отношения конечного радиуса к начальному радиусу от числа витков спирали Архимеда.

Т а б л и ц а 1.6

**Зависимость коэффициента увеличения индукции
от числа витков спирали Архимеда**

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20
α	4,94	8,33	12,04	15,98	20,12	24,41	28,85	33,40	38,06	89
R/r_1	9	13	17	21	25	29	33	37	41	81

Из таблицы 1.6 видно, что увеличение числа витков от 2 до 20 позволяет увеличить индукцию магнитного поля в центре спирали Архимеда от 5 до 90 раз.

1.2.3. Магнитное поле тока и индуктивность обобщённой спирали

Для обобщённых спиралей вида

$$r = a\varphi^n, \quad (1.141)$$

где n – любое число, кроме единицы, возможны следующие классы спиралей. Класс спиралей отрицательных порядков $n < 0$ (класс закручивающихся спиралей), класс спиралей дробных положительных порядков ($0 < n < 1$) и класс спиралей положительных порядков ($1 < n < \infty$). Последние два класса относятся к классу раскручивающихся спиралей.

Подставляя (1.141) в интеграл (1.136), получим для коэффициента увеличения индукции поля

$$\frac{B}{B_*} = \alpha = \frac{(1 + 4N)^n}{4(1 - n)} [(1 + 4N)^{1-n} - 1]. \quad (1.142)$$

Связь начальных и конечных переменных получается в виде

$$\frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right)^n = (1 + 4\pi N)^n. \quad (1.143)$$

В таблице 1.7 представлены зависимости коэффициента увеличения индукции в центре обобщённой спирали для разных индексов n . Первые две строки рассчитаны для $n=1/2$, вторые две строки – для $n=3/2$, а последние две строки – для $n=1$.

Т а б л и ц а 1.7

**Зависимость коэффициента увеличения индукции
от числа витков обобщённых спиралей для (при) разных n**

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20
$\alpha(n_1)$	3,0	4,7	6,5	8,2	10,0	11,8	13,6	15,5	17,3	36,0
R/r_1	3,0	3,6	4,1	4,6	5,0	5,4	5,7	6,1	9,0	27,0
$\alpha(n_2)$	9,0	16,9	26,5	37,6	50,0	63,6	78,3	94,0	110	324
R/r_1	27	46,9	70,0	96,2	125	156	190	225	262	729
$\alpha(n_3)$	18	39	68	105	150	203	264	333	410	1620
R/r_1	81	169	289	441	625	841	1089	1369	1681	6561

Из табл. 1.7 видно, что наиболее перспективными являются раскручивающиеся спирали с показателем $n > 1$. Для рассчитанных значений полученные коэффициенты увеличения индукции значительно больше, чем у спирали Архимеда. Но, с другой стороны, эти коэффициенты можно получить только путём увеличения площади, занимаемой обобщённой спиралью.

Считая, что среднее значение потоков индукции в кольце и спирали можно рассчитывать по значениям индукции в центре, получим оценочное соотношение для коэффициента увеличения индуктивности, который совпадает с коэффициентом увеличения индукции

$$L = \alpha L_*, \quad (1.144)$$

где
$$L_* = \mu_0 \pi R / 2 \quad (1.145)$$

– масштаб индуктивности исследуемой системы. Как видно из (1.145), масштаб индуктивности связан с внешним радиусом спирали.

Проведём оценку для $N=10$ витков спиральной индуктивности, начальный радиус которой 10 мкм. Для спирали Архимеда конечный радиус 410 мкм (см. табл. 1.6), масштаб индуктивности 0,81 нГн, а

увеличение индуктивности происходит почти в 40 раз до значений 30,8 нГн. Для спирали с $n=2$ получим конечный радиус 16,8 мм (см. табл. 1.7), масштаб индуктивности 33,2 нГн, а увеличение индуктивности происходит почти в 1680 раз до значений 55, 8 мкГн.

По разделу 1 опубликованы работы [16–18].

Выводы по разделу 1.2

Предложен оценочный метод расчёта планарной индуктивности спирального вида.

Метод базируется на законе Био – Савара – Лапласа, который позволяет в полярных координатах рассчитывать индукцию в центре для любых видов спиралей.

Проведена сравнительная оценка значений спиральной индуктивности для спиралей Архимеда и обобщённых спиралей.

Показано, что применение спиралей с количеством витков $N=10$ может увеличивать значение их индуктивности, по сравнению с кольцевой, от 40 до 1500 раз.

2. АЛГОРИТМЫ РАСЧЁТА ПОГОННЫХ 3D-ИНДУКТИВНОСТЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ С АКСИАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ТОКОВ И МЕТОД УПРАВЛЕНИЯ ИХ ЗНАЧЕНИЕМ

Сохраняя идеологию методики расчёта, предложенной в главе 1, рассчитаем погонную индуктивность цилиндрических проводников с аксиальной плотностью тока.

2.1. Магнитные и индуктивные свойства полого и круглого цилиндрических проводников

2.1.1. Распределение магнитных полей бесконечно длинного круглого проводника с током

Расчёт будем проводить исходя из фундаментального уравнения магнитостатики, записанного для векторного потенциала

$$\Delta A = -\mu_0 j, \quad (2.1)$$

с калибровкой

$$\operatorname{div} A = 0. \quad (2.2)$$

Связь индукции магнитного поля с векторным потенциалом находится из соотношения

$$B = \operatorname{rot} A. \quad (2.3)$$

Запишем (2.1) в цилиндрических координатах с учётом того, что плотность тока имеет только одну аксиальную компоненту, направленную по оси z : $j = (0, 0, j_z)$. Она порождает поле векторного потенциала, имеющего также только одну компоненту $A = (0, 0, A_z)$

$$\Delta A_z = -\mu_0 j_z. \quad (2.4)$$

Оператор Лапласа для декартовой компоненты векторного потенциала, зависящей от радиуса, имеет вид

$$\Delta A_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_z}{dr} \right) = -\mu_0 j_z. \quad (2.5)$$

Предположим, что в (2.5) плотность тока однородна по поперечному сечению $j_z = j_0 = \text{const}$, а проводник имеет конечный радиус R .

Такое поле векторного потенциала порождает индукцию магнитного поля с одной компонентой

$$B_\varphi = -\frac{dA_z}{dr}. \quad (2.6)$$

Цилиндрическая поверхность проводника, имеющего радиус R , делит всё пространство, в котором возбуждено статическое магнитное поле, на две области: внутреннюю область ($0 \leq r \leq R$), в которой есть ток; и внешнюю область ($r > R$), где тока нет. Поставленная задача очень похожа на задачу электростатики для уравнения Пуассона (внутренняя краевая задача).

Тогда для внутренней области (потенциал отмечен индексом «1») уравнение (2.5) имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_1}{dr} \right) = -\mu_0 j_0, \quad (2.7)$$

а во внешней области (потенциал отмечен индексом «2») –

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_2}{dr} \right) = 0. \quad (2.8)$$

В уравнении (2.5) перейдём к новой функции $y(\xi) = A_z / A_*$, где $\xi = r / R$, а

$$A_* = \mu_0 j_0 R^2 / 4 \quad (2.9)$$

– масштаб векторного потенциала.

Решение для внутренней области (2.7) имеет вид

$$y_1 = -\xi^2 + c_1 \ln \xi + c_2, \quad (2.10)$$

а для внешней области (2.8)

$$y_2 = c_3 \ln \xi + c_4, \quad (2.11)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – произвольные постоянные. В решении (2.10) убираем особенность в нуле и выбираем нуль потенциала на оси системы $y_1(0) = 0$. В этом заключается принципиальное отличие поставленной краевой магнитостатической задачи от электростатической задачи. С учётом этого, получаем $c_1 = c_2 = 0$.

Постоянные c_3 и c_4 определяем из условия непрерывности функции и её производной на границе областей $\xi = 1, c_3 = -2, c_4 = -1$. Окончательно решения (2.10) и (2.11) примут вид

$$\begin{aligned} y_1 &= -\xi^2, \text{ в обл. } 0 \leq \xi \leq 1. \\ y_1 &= -\xi^2, \text{ в обл. } \xi \geq 1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Радиальное распределение индукции находим из (2.6)

$$B_\varphi = -B_* \frac{dy}{d\xi}, \quad (2.13)$$

где $B_* = A_* / R$ – масштаб индукции поля. Индукция растёт линейно во внутренней области

$$B_\varphi = 2B_* \xi, \quad (2.14)$$

а во внешней области убывает по закону

$$B_\varphi = 2B_* / \xi. \quad (2.15)$$

2.1.2. Индуктивность сплошного цилиндрического проводника с током. Параметр обрезания поля

Наличие двух областей, в которых магнитное поле распределено по разным законам указывает на то, что индуктивность прямолинейного круглого тока складывается из двух частей. Первая часть соответствует индуктивности, которая связана с потоком магнитного поля во внутренней области. В ней силовые линии магнитного поля поперечны линиям плотности тока. В связи с этим её удобно назвать токовой частью индуктивности.

Вторая часть соответствует индуктивности, которая связана с магнитным потоком, находящимся во внешней области. Её удобно назвать потоковой частью индуктивности.

Если цилиндрический проводник разрезать по оси (см. рис. 2.1), то видна область, по которой следует интегрировать при вычислении потока во внутренней области. На рис. 2.1 крестиками указано направление магнитных силовых линий при условии, что плотность тока направлена вдоль оси z . Ось проводника обозначена OO' , а элементарная площадка интегрирования dS – заштрихована.

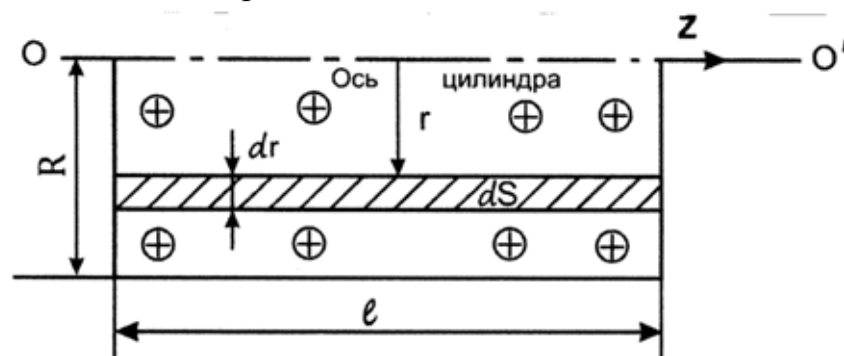


Рис. 2.1. Площадка интегрирования при вычислении потока во внутренней области

Вычисляя внутренний поток, получим

$$\Phi_1 = \int_S B dS = l \int_0^R B(r) dr = \Phi_*, \quad (2.16)$$

где $\Phi_* = A_* l$ – масштаб потока. Учитывая соотношение (2.9) и связь $i = j_0 \pi R^2$, получим для погонной токовой части индуктивности выражение

$$\frac{L_c}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} = \text{const} = 1 \text{ нГн/см}. \quad (2.17)$$

Как видно из (2.17), она не зависит от радиуса проводника и с точностью до константы совпадает с магнитной постоянной.

Проводя аналогичные вычисления во внешней области, получим погонную потоковую индуктивность

$$\frac{L_2}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(r_0 / R). \quad (2.18)$$

При вычислении (2.18) введён радиус обрезания магнитного поля $r_0 > R$. Из (2.18) видно, что потоковая погонная индуктивность также не зависит от радиуса проводника, но имеет логарифмическую расходимость при $r_0 / R \rightarrow \infty$.

Полная погонная индуктивность, выраженная через токовую индуктивность, имеет вид

$$\frac{L_f}{l} = \frac{L_c}{l} + \frac{L_2}{l} = \frac{L_c}{l} [1 + 2 \ln(r_0 / R)] \quad (2.19)$$

и также имеет логарифмическую расходимость при $r_0 / R \rightarrow \infty$.

Зависимость полной погонной индуктивности цилиндрического проводника L_f / L_c от приведённого радиуса обрезания поля $\xi_0 = r_0 / R$ представлена на рис. 2.2.

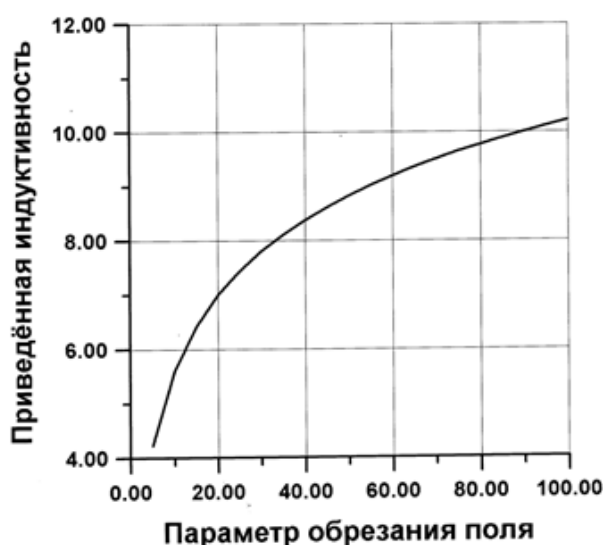


Рис. 2.2. Зависимость приведённой индуктивности от параметра обрезания поля

Из рис. 2.2 видно, что при изменении параметра ξ_0 в интервале от 5 до 100 приведённая полная индуктивность изменяется в пределах $4,22 \leq L_f / L_s \leq 10,2$. Это говорит о том, что полная погонная индуктивность может в несколько раз превышать токовую индуктивность того же проводника.

Причина, по которой проявляется логарифмическая расходимость полной индуктивности, прозрачна. Решение поставленной задачи удаётся

найти для бесконечно длинного проводника (отсутствует зависимость полей от переменной z). Все реальные проводники, используемые в планарных технологиях, имеют конечную длину. Поэтому точное значение параметра обрезания поля и его зависимость от радиуса и длины проводника ждёт своего экспериментального определения.

2.1.3. Распределение магнитных полей бесконечно длинного трубчатого проводника с током

Для нахождения распределения магнитных полей трубчатого проводника воспользуемся уравнением (2.5). На рис. 2.3 представлена геометрия внешней краевой задачи.

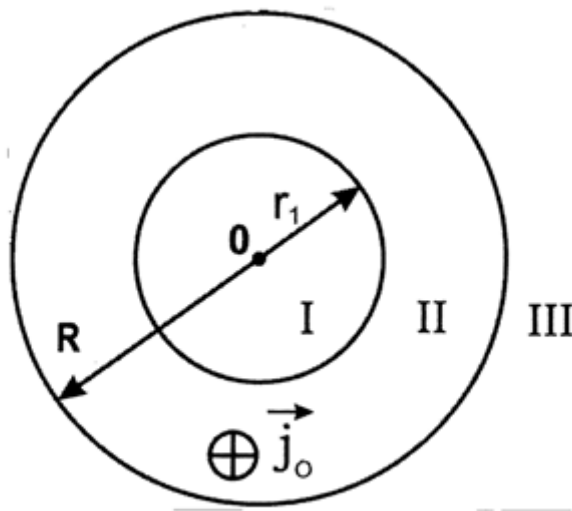


Рис. 2.3. Геометрические параметры поперечного сечения трубчатого проводника

Предположим, что в (2.5) плотность тока однородна по поперечному сечению $j_z = j_0 = \text{const}$ в проводящей области II, ограниченной неравенством $r_1 \leq r \leq R$. На рис. 2.3 r_1 – радиус полости, R – внешний радиус проводящей области, а направление вектора плотности тока обозначено крестиком.

Тогда для областей I и III, в которых нет тока, уравнение (2.5) приводится к виду

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_{1,3}}{dr} \right) = 0, \quad (2.20)$$

а в области II, где течёт ток

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_2}{dr} \right) = -\mu_0 j_0. \quad (2.21)$$

Сохраняя те же значения масштабов векторного потенциала A_* и индукции магнитного поля B_* , выпишем решение для области I

$$y_1 = c_1 \ln \xi + c_2, \quad (2.22)$$

для области II

$$y_2 = -\xi^2 + c_3 \ln \xi + c_4, \quad (2.23)$$

и для области III

$$y_3 = c_5 \ln \xi + c_6. \quad (2.24)$$

В (2.22) – (2.24) $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ – произвольные постоянные. В решении (2.22) убираем особенность на оси и задаём нулевое значение потенциала $y_1(0) = 0$.

С учётом этого, получаем $c_1 = c_2 = 0$. Постоянные c_3 и c_4 определяем из условия непрерывности функции и её производной на первой границе $\xi = \xi_1$: $c_3 = 2\xi_1^2$, $c_4 = \xi_1^2 - 2\xi_1^2 \ln \xi_1$. Постоянные c_5 и c_6 определяем из подобных условий на границе $\xi = 1$: $c_5 = 2\xi_1^2 - 2$, $c_6 = \xi_1^2 - 2\xi_1^2 \ln \xi_1 - 1$.

Радиальные распределения индукции находим из решений, полученных для потенциала (2.22) – (2.24) с учётом (2.13)

в области I: $B_1 / B_* = 0, \quad (2.25)$

в области II: $B_2 / B_* = 2(\xi - \xi_1^2 / \xi), \quad (2.26)$

в области III: $B_3 / B_* = 2(1 - \xi_1^2) / \xi. \quad (2.27)$

Графики радиального распределения приведённой индукции B/B_* от приведённой радиальной координаты ξ для трёх значений приведённого радиуса полости $\xi_1 = 0,2$ (кривая 1); $\xi_2 = 0,5$ (кривая 2); $\xi_3 = 0,75$ (кривая 3) представлены на рис. 2.4.

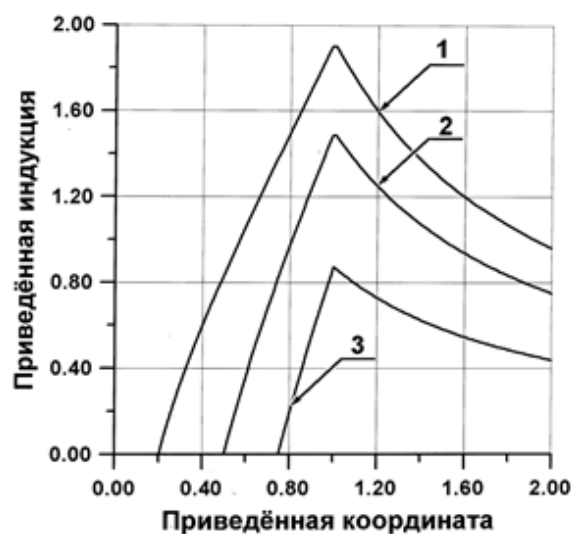


Рис. 2.4. Радиальное распределение приведённой индукции магнитного поля от приведённой координаты

Из рис. 2.4 видно, что магнитное поле внутри полости отсутствует, а производная индукции магнитного поля при переходе через внешнюю границу раздела испытывает скачок от значения $2(1 + \xi_1^2)$ до значения $-2(1 - \xi_1^2)$.

2.1.4. Индуктивность трубчатого проводника.

Параметр обрезания поля

Наличие трёх областей, в которых магнитное поле распределено по разным законам, указывает на то, что индуктивность прямолинейного трубчатого тока также складывается из двух частей. Первая часть индуктивности, определяемая областью II, является токовой. Вторая часть индуктивности, связанная с магнитным потоком во внешней области, – потоковая.

Вычисляя потоки в соответствующих областях, получим

$$\text{в области II:} \quad \Phi_2 = \Phi_* (1 - \xi_1^2 + 2\xi_1^2 \ln \xi_1), \quad (2.28)$$

$$\text{в области III:} \quad \Phi_3 = 2\Phi_* (1 - \xi_1^2) \ln \xi_0. \quad (2.29)$$

В (2.29) по аналогии с (2.18) введено обозначение $\xi_0 = r_0 / R > 1$ – приведённый радиус обрезания магнитного поля в области III.

Вычисляем соответствующие потокам погонные индуктивности:

$$\frac{L_2}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(1 - \xi_1^2 + 2\xi_1^2 \ln \xi_1)}{(1 - \xi_1^2)} - \quad (2.30)$$

токовая индуктивность;

$$\frac{L_3}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \xi_0 - \quad (2.31)$$

потоковая индуктивность.

Полная индуктивность единицы длины трубчатого проводника имеет вид

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{(1 - \xi_1^2 + 2\xi_1^2 \ln \xi_1)}{(1 - \xi_1^2)} + 2 \ln \xi_0 \right]. \quad (2.32)$$

Графики зависимости приведённой погонной токовой индуктивности (2.30) трубчатого проводника $\frac{4\pi L_2}{\mu_0 l}$ от приведённого радиуса полости ξ_1

приведены на рис. 2.5. Из графика видно, что при малых значениях приведённого радиуса полости ξ_1 её значение совпадает со значением (2.17), полученным для круглого проводника.

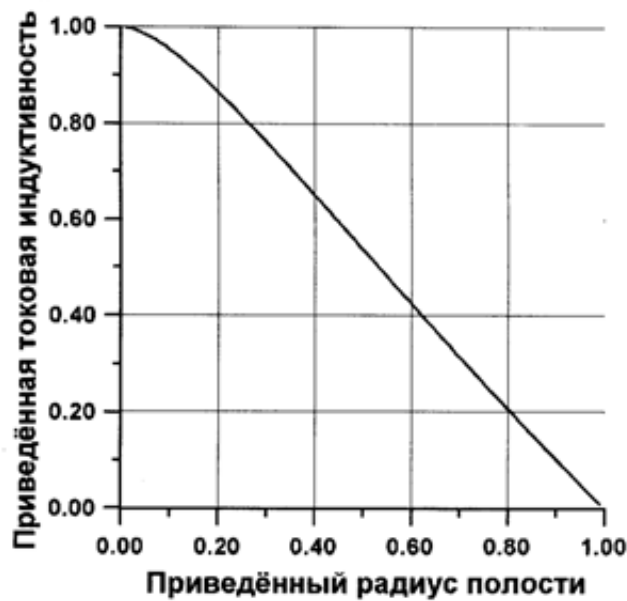


Рис. 2.5. Зависимость погонной токовой индуктивности от радиуса полости

Поскольку функция (2.30) не может быть разложена в ряд по малому параметру ξ_1 , то для этой области малых значений занесём значения приведённой индуктивности с точностью до пятого знака после запятой в табл. 2.1.

Т а б л и ц а 2.1

Численное моделирование зависимости приведённой индуктивности от малого приведённого параметра полости

ξ_1	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
L_2 / L_c	0,99908	0,99687	0,99368	0,98968	0,98498
ξ_1	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
L_2 / L_c	0,97967	0,97381	0,96746	0,96067	0,95348

Введём параметр толщины стенки трубчатого проводника

$$\delta = R - r_1. \quad (2.33)$$

Для проводника с тонкой стенкой (реализуются малые значения приведённой толщины трубки $t = \delta / R \ll 1$) значения индуктивности можно вычислять из ряда по t , который быстро сходится:

$$\frac{4\pi L_2}{\mu_0 l} \approx t + t^2 / 6 - t^4 / 30 + O(t^5). \quad (2.34)$$

Из соотношения (2.34) видно, что значение токовой индуктивности становится линейной функцией приведённой толщины трубки при выполнении условия $t = \delta / R \ll 1$. Отсюда следует: чем меньше толщина трубчатого проводника, тем меньше значение его погонной токовой индуктивности

$$L_2 \approx L_c \delta / R. \quad (2.35)$$

Как следует из (2.32), полная погонная индуктивность трубчатого проводника также имеет логарифмическую расходимость по параметру обрезания поля $\xi_0 = r_0 / R \rightarrow \infty$. В этом случае точное значение параметра обрезания и его зависимость от радиуса и длины проводника ждёт своего экспериментального определения.

2.1.5. Добротность индуктивности цилиндрического проводника

Теоретическое значение индуктивности (2.32) следует считать индуктивностью на постоянном токе. Она остаётся неизменной для переменного тока в той области частот, где фазовый сдвиг между током и потоком равен нулю. Для этой области частот такая индуктивность не зависит от частоты.

Рассчитаем зависимость добротности индуктивности от частоты и определим интервал частот, в котором она имеет приемлемые значения

$$Q = \omega L / R_0, \quad (2.36)$$

$$\text{где} \quad R_0 = \rho l / (\pi R^2 - \pi r_1^2) \quad (2.37)$$

омическое сопротивление участка трубчатого проводника длиной l , ρ – удельное сопротивление проводника. Подставляя (2.37) в (2.36), получим

$$Q = \frac{\omega}{\Omega_*} [1 - \xi_1^2 + 2\xi_1^2 \ln \xi_1 + 2(1 - \xi_1^2) \ln \xi_0], \quad (2.38)$$

$$\text{где} \quad \Omega_* = \frac{4\rho}{\mu_0 R^2} \quad (2.39)$$

– масштаб характеристической частоты.

Как видно из (2.38), добротность полной индуктивности цилиндрического проводника не зависит от длины проводника, но зависит от частоты, приведённого радиуса полости, и имеет логарифмическую расходимость по параметру обрезания поля при $\xi_0 = r_0 / R \rightarrow \infty$.

Нижняя характеристическая частота следует из (2.38) при $Q=1$

$$\omega_l = \frac{\Omega_*}{1 - \xi_1^2 + 2\xi_1^2 \ln \xi_1 + 2(1 - \xi_1^2) \ln \xi_0}. \quad (2.40)$$

Добротность токовой индуктивности также зависит от частоты и приведённого радиуса полости ξ_1 :

$$Q_c = \frac{\omega}{\Omega_*} (1 - \xi_1^2 + 2\xi_1^2 \ln \xi_1). \quad (2.41)$$

Нижняя характеристическая частота токовой индуктивности имеет вид

$$\omega_{lc} = \frac{\Omega_*}{1 - \xi_1^2 + 2\xi_1^2 \ln \xi_1}. \quad (2.42)$$

Как видно из (2.42), она, для одинаковых трубчатых проводников, будет тем выше, чем больше её удельное сопротивление.

Оценим добротность и нижнюю характеристическую частоту токовой индуктивности для круглого полого цилиндрического проводника со следующими параметрами: внешний радиус 5 мкм, удельное сопротивление 16 нОм·м (медь), радиус полости 1 мкм. Из оценки следует, что добротность токовой индуктивности из меди будет больше единицы для частот $\nu = \omega / 2\pi > \nu_{lc} = 0,38$ ГГц, что по порядку величины сходится со значением нижней характеристической частоты для медного кольца. Для полого проводника с $\xi_1=0,5$ значение нижней характеристической частоты увеличивается в два раза.

Оценим границу применимости полученных результатов на высоких частотах. Её можно получить, исследуя времена установления неоднородных магнитных полей в трубчатом проводнике. Будем считать, что эти времена связаны со скоростью передачи электромагнитных взаимодействий – скоростью света. Тогда характерное время установления $\tau = R/c$, где R – внешний радиус проводника, даёт значение верхней характеристической частоты $\nu_{h*} = 1/\tau = c/R$. Вычисленное её значение для проводника радиусом 5 мкм получается $60 \cdot 10^{12}$ Гц. К сожалению, на современном этапе развития интегральных технологий эти частоты пока не достигнуты.

Выводы по разделу 2.1

Предложен аналитический метод расчёта статических магнитных полей круглого и полого цилиндрических проводников с аксиальной плотностью тока.

Радиальное распределение магнитного поля внутри проводника с током таково, что его индукция изменяется от нулевых и достигает конечных значений на внешней поверхности проводника.

Радиальное распределение магнитного поля вне проводника с током таково, что оно всегда убывает при перемещении точки наблюдения от поверхности проводника наружу.

Производная индукции магнитного поля при переходе через внешнюю границу раздела испытывает скачок.

Теория показывает, что погонная индуктивность цилиндрического проводника состоит из двух составляющих: токовой погонной индуктивности и потоковой.

Погонная токовая индуктивность трубчатого проводника становится линейной функцией приведённой толщины проводника при выполнении условия $t = \delta / R \ll 1$.

При малых значениях приведённого радиуса полости погонная токовая индуктивность совпадает со значением 1 нГн/см .

Погонная потоковая индуктивность любого цилиндрического проводника имеет логарифмическую расходимость при параметре обрезания поля $\xi_0 = r_0 / R \rightarrow \infty$.

Точное значение параметра обрезания поля и его зависимость от радиуса и длины круглого и трубчатого проводника ожидает своего экспериментального определения.

Добротность токовой индуктивности цилиндрического проводника не зависит от длины, а зависит от частоты и приведённого радиуса полости.

Помимо этого, добротность токовой индуктивности имеет приемлемые значения только в некотором частотном диапазоне, ограниченном характеристическими частотами системы.

С ростом приведённого радиуса полости трубчатого проводника нижняя характеристическая частота увеличивается.

Увеличение погонной индуктивности цилиндрического проводника при увеличении параметра обрезания поля необходимо учитывать при измерении индуктивности кольцевого тока. Как показывают вычисления, для определённых значений параметра кольца она может быть и значительно меньше индуктивности длинных подводящих проводов.

2.2. О методе управления погонной индуктивностью коаксиального кабеля с аксиальной плотностью токов

2.2.1. Физико-математическая модель расчёта

Расчёт будем проводить исходя из фундаментального уравнения магнитостатики, записанного для векторного потенциала

$$\Delta A = -\mu_0 j, \quad (2.43)$$

с калибровкой

$$\text{div} A = 0. \quad (2.44)$$

Связь индукции магнитного поля с векторным потенциалом находится из соотношения

$$B = \text{rot} A. \quad (2.45)$$

Запишем (2.43) в цилиндрических координатах с учётом того, что плотности тока в коаксиальном кабеле имеют только одну аксиальную компоненту, направленную по оси z : $j = (0, 0, j_z)$, а сама плотность тока складывается из двух составляющих: плотности тока, текущего в центральной жиле j_0 , и тока, текущего по оплётке j_1 . Они порождают поле векторного потенциала, имеющего также только одну компоненту $A = (0, 0, A_z)$

$$\Delta A_z = -\mu_0 j_z. \quad (2.46)$$

Оператор Лапласа для декартовой компоненты векторного потенциала, зависящей от радиуса, имеет вид

$$\Delta A_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_z}{dr} \right) = -\mu_0 j_0 - \mu_0 \sigma j_1, \quad (2.47)$$

где σ – знаковый множитель. Для со-направленных токов он принимает значение $+1$, а для токов противоположного направления -1 .

Предположим, что в (2.47) обе плотности токов однородны по поперечному сечению, коаксиальный кабель имеет внешний радиус R , а геометрия его поперечного сечения представлена на рис. 2.6.

На рис. 2.6 введены обозначения: r_1 – внешний радиус первой области (радиус проводника центральной жилы), r_2 – внешний радиус второй немагнитной области, R – внешний радиус оплётки коаксиального кабеля, r – текущий радиус цилиндра. Всегда выполнено условие, что $r_1 < r_2 < R$.

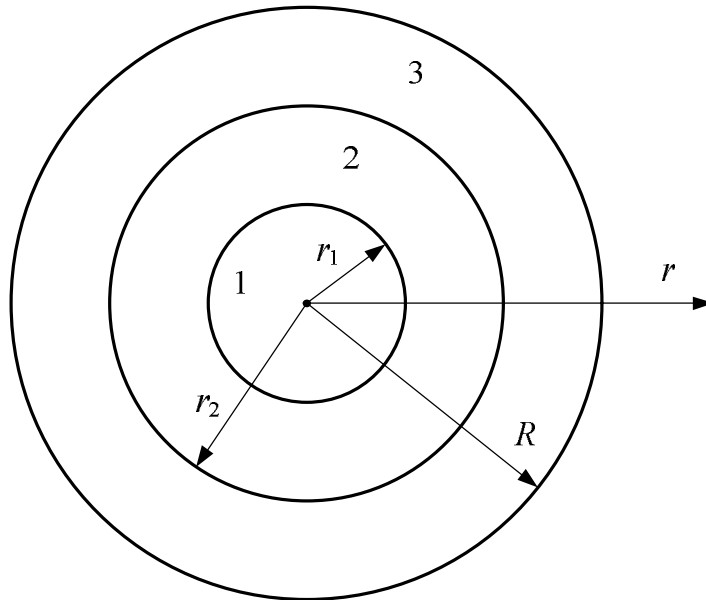


Рис. 2.6. Поперечное сечение коаксиального кабеля

Из (2.45) следует, что такое поле векторного потенциала в каждой области коаксиального кабеля порождает индукцию магнитного поля с одной компонентой

$$B_{\varphi} = -\frac{dA_z}{dr}. \quad (2.48)$$

2.2.2. Распределение векторного потенциала внутри коаксиального кабеля

Цилиндрическая поверхность коаксиального кабеля, имеющего внешний радиус R , содержит внутри себя области, в которых возбуждено статическое магнитное поле (см. рис. 2.6). Их три: область 1 ($0 \leq r \leq r_1$), в которой есть ток j_0 ; внутренняя область 2, в которой $r_1 \leq r \leq r_2$ и токов нет; и внешняя область 3 ($r_2 \leq r \leq R$), где есть ток j_1 . Поставленная задача очень похожа на задачу электростатики для уравнения Пуассона (внутренняя краевая задача с тремя границами).

Тогда для области 1 (потенциал и индукция далее отмечены индексом «1») уравнение (2.47) имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_1}{dr} \right) = -\mu_0 j_0, \quad (2.49)$$

а во второй области на рис.1 (потенциал отмечен индексом «2») –

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_2}{dr} \right) = 0. \quad (2.50)$$

В уравнении (2.47) перейдем к новой функции $y_1(\xi) = A_z / A_*$, где $\xi = r / R$ в области $0 \leq \xi \leq \xi_1$, а

$$A_* = \mu_0 j_0 R^2 / 4 \quad (2.51)$$

– масштаб векторного потенциала, одинаковый во всех областях.

Решение (2.49) для области 1 имеет вид

$$y_1 = -\frac{u_0}{4} \xi^2 + c_1 \ln \xi + c_2, \quad (2.52)$$

где

$$u_0 = j_0 / j_*, \quad (2.53)$$

а

$$j_* = A_* / (\mu_0 R^2)$$

– масштаб плотности тока. Калибруя векторный потенциал по условию $y_1(0) = 0$, а тогда $c_1 = c_2 = 0$, приходим к решению в области 1, имеющему вид

$$y_1 = -\frac{u_0}{4} \xi^2. \quad (2.54)$$

Решение уравнения (2.50) для области 2 ($\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$) имеет вид

$$y_2 = c_3 \ln \xi + c_4, \quad (2.55)$$

где c_3, c_4 – произвольные постоянные. Распределение векторного потенциала в области 3 ($\xi_2 \leq \xi \leq 1$) получается из решения уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_3}{dr} \right) = -\mu_0 \sigma j_1,$$

которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{1}{\xi} (\xi y')' = -\sigma u_1, \quad (2.56)$$

где u_1 связано с масштабом плотности тока соотношением

$$u_1 = j_1 / j_*. \quad (2.57)$$

Решение (2.56) в области 3 ($\xi_2 \leq \xi \leq 1$) имеет вид

$$y_3 = -\frac{\sigma u_1}{4} \xi^2 + c_5 \ln \xi + c_6, \quad (2.58)$$

где c_5, c_6 – произвольные постоянные. Все произвольные постоянные должны быть определены в процессе решения граничной задачи.

2.2.3. Распределение индукции магнитного поля внутри коаксиального кабеля

Радиальное распределение индукции в трёх областях находим из (2.48)

$$B_\varphi = -B_* \frac{dy}{d\xi}, \quad (2.59)$$

где

$$B_* = A_* / R = \mu_0 j_0 R / 4 \quad (2.60)$$

– масштаб индукции магнитного поля.

В первой области $0 \leq \xi \leq \xi_1$ получим

$$\frac{B_1}{B_*} = -y'_1 = u_0 \xi / 2. \quad (2.61)$$

Из (2.61) следует, что вектор индукции магнитного поля в области $0 \leq \xi \leq \xi_1$ сонаправлен с $\vec{e}_\varphi$ (единичный азимутальный вектор) и из нулевых значений линейно нарастает с радиусом r системы.

Во второй области $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$ получим

$$\frac{B_2}{B_*} = -y'_2 = -c_3 / \xi. \quad (2.62)$$

Из (2.62) следует, что вектор индукции магнитного поля в области $0 \leq \xi \leq \xi_1$ так же сонаправлен с $\vec{e}_\varphi$ и либо убывает, либо нарастает, с ростом радиуса r системы в зависимости от знака c_2 .

В области 3 $\xi_2 \leq \xi \leq 1$ получим

$$\frac{B_3}{B_*} = -y'_3 = \sigma u_1 \xi / 2 - c_5 / \xi. \quad (2.63)$$

Из (2.63) следует, что вектор индукции магнитного поля в области $\xi_2 \leq \xi \leq 1$ может быть со-направлен с $\vec{e}_\varphi$ при $\sigma=-1$, а может быть противоположного направления с $\vec{e}_\varphi$ при $\sigma=+1$. Уточнение распределения индукции и векторного потенциала магнитного поля коаксиального кабеля также зависит от знака c_5 и может быть проведено после определения произвольных постоянных на трёх границах системы.

Постоянные c_3 и c_4 определяем из условия непрерывности функции потенциала и её производной на границе областей $\xi = \xi_1$

$$c_3 = -u_0 \xi_1^2 / 2, \quad (2.64)$$

$$c_4 = u_0 \xi_1^2 (2 \ln \xi_1 - 1) / 4. \quad (2.65)$$

Постоянную c_5 определяем из требования равенства нулю индукции магнитного поля на внешнем радиусе R

$$c_5 = \sigma u_1 / 2. \quad (2.66)$$

Постоянную c_6 определяем из равенства потенциалов на границе ξ_2

$$c_6 = \frac{u_0 \xi_1^2}{4} [2 \ln(\xi_1 / \xi_2) - 1] + \frac{\sigma u_1}{4} (\xi_2^2 - 2 \ln \xi_2). \quad (2.67)$$

Как видно из значений найденных произвольных постоянных, индукция магнитного поля в первой области положительная и линейно нарастающая. Во второй области она положительна, но всегда убывающая. Затем при переходе через границу раздела ξ_2 индукция испытывает скачок. Скачок может быть со сменой знака, а может быть и без смены знака индукции. При значении знаковой функции $\sigma=+1$ (оба тока в кабеле одинакового направления) индукция становится отрицательной, и с ростом ξ она стремится к нулю. При значении знаковой функции $\sigma=-1$ (токи кабеля имеют разные направления) она остаётся положительной. При равных токах ($i_0=i_1$) скачка индукции нет. При неравных токах индукция испытывает либо положительный ($i_0<i_1$), либо отрицательный скачок ($i_0>i_1$), и с ростом ξ стремится к нулю.

2.2.4. Управление индуктивностью коаксиального кабеля для сонаправленных и встречных токов

Полная индуктивность коаксиального кабеля складывается из трёх индуктивностей: токовой, которая возникает в области 1; потоковой, которая характеризует область 2; и снова – токовой, которая возникает в области 3; а именно,

$$L = L_1 + L_2 + L_3. \quad (2.68)$$

Поясним, что мы под этим понимаем. Наличие трёх областей, в которых магнитное поле распределено по разным законам, указывает на то, что индуктивность прямолинейного круглого тока складывается из трёх частей. Первая часть соответствует индуктивности, которая связана с потоком магнитного поля в области 1. В ней силовые линии магнитного поля поперечны линиям плотности тока. В связи с этим её удобно назвать первой токовой частью коаксиальной индуктивности.

Вторая часть соответствует индуктивности, которая связана с магнитным потоком, находящимся в области 2. В этой области нет тока, поэтому её удобно назвать потоковой частью коаксиальной индуктивности.

Третья часть соответствует индуктивности, которая связана с потоком магнитного поля в области 2. В ней силовые линии магнитного поля снова поперечны линиям плотности тока. В связи с этим её удобно назвать второй токовой частью коаксиальной индуктивности.

Если цилиндрический коаксиальный кабель разрезать по оси (см. рис. 2.7), то видна область, по которой следует интегрировать при вычислении потока в области 1. Ось проводника обозначена $00'$, а элементарная площадка интегрирования dS – заштрихована. Для областей 2 и 3 площадка dS перемещается в соответствующую область.

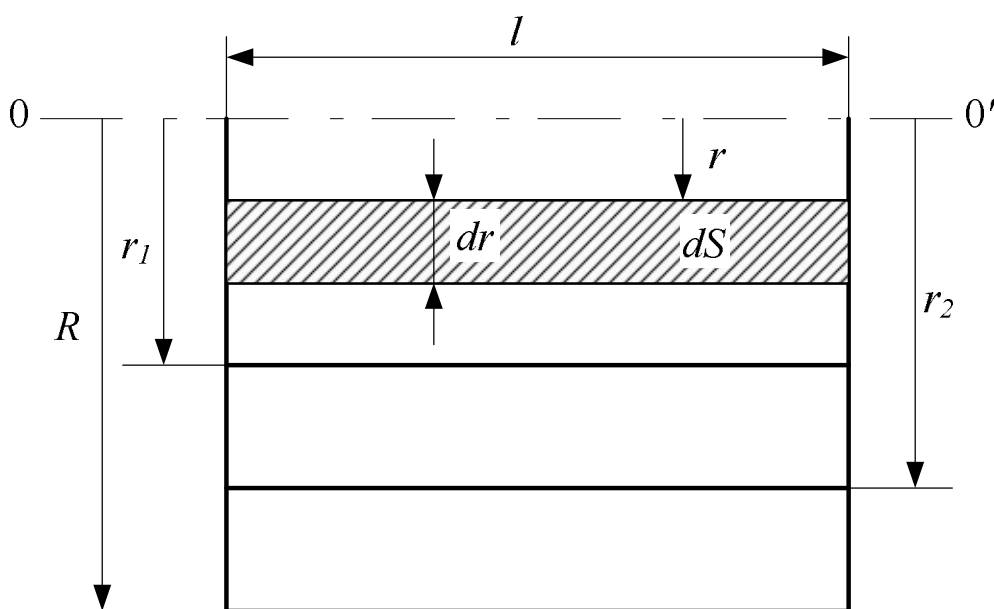


Рис. 2.7. Площадка интегрирования при вычислении потока в области 1

Вычисляя магнитный поток в области 1, получим

$$\Phi_1 = \int_S B dS = \int_S B_\varphi dS_\varphi = \int_0^l dz \int_0^{r_1} B_1(r) dr = \Phi_* \xi_1^2 / 2, \quad (2.69)$$

где $\Phi_* = A_* l u_0 / 2$ – масштаб потока. Между током в области 1 и потоком существует базовая связь

$$\Phi_1 = L_1 i_1, \quad (2.70)$$

где L_1 – первая токовая коаксиальная индуктивность. Подставляя в (2.70) ток, выраженный через плотность тока и площадь области 1, получим погонную индуктивность в виде

$$\frac{L_1}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} = \text{const}. \quad (2.71)$$

Как видно из (2.71), она с точностью до постоянной величины совпадает с магнитной постоянной.

Рассуждая аналогично для области 2, получим

$$\Phi_2 = \int_S B dS = \int_S B_\varphi dS_\varphi = \int_0^l dz \int_{r_1}^{r_2} B_2(r) dr = \Phi_* \xi_1^2 \ln(\xi_2 / \xi_1). \quad (2.72)$$

Применяя (2.70) для тока i_1 и потока Φ_2 , получим для второй коаксиальной потоковой погонной индуктивности, величину, зависящую от расположения границ системы

$$\frac{L_2}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(\xi_2 / \xi_1). \quad (2.73)$$

Вычисление третьей токовой погонной индуктивности сводится к вычислению потока, в котором индукция, а стало быть, и поток, в области интегрирования может быть и отрицательной

$$\Phi_3 = \int_S B dS = \int_S B_\varphi dS_\varphi = \int_0^l dz \int_{r_2}^R B_3(r) dr = \Phi_* \sigma \left[(1 - \xi_2^2) / 2 + \ln \xi_2 \right], \quad (2.74)$$

где масштаб потока

$$\Phi_* = A_* l u_1 / 2. \quad (2.75)$$

Значение магнитного потока Φ_3 будет положительно (токи текут в разные стороны), если $\sigma = -1$, и отрицательно, если токи в коаксиальном кабеле текут в одном направлении.

Ток i , создающий поток Φ_3 , есть арифметическая полусумма из всех токов, протекающих в системе

$$2i = i_0 + i_1 = j_0 \pi r_1^2 + j_1 \pi (R^2 - r_2^2). \quad (2.76)$$

Учитывая связь (2.70) между Φ_3 и (2.76), получим для второй токовой погонной индуктивности кабеля соотношение

$$\frac{L_3}{L_*} = \frac{4\pi L_3}{\mu_0 l} = \frac{2\sigma u (1 - \xi_2^2 + 2 \ln \xi_2)}{[\xi_1^2 + u(1 - \xi_2^2)]}, \quad (2.77)$$

где

$$L_* = \mu_0 l / (4\pi) \quad (2.78)$$

– масштаб индуктивности,

$$u = \frac{i_1}{i_0} \frac{\xi_1^2}{(1 - \xi_2^2)} \quad (2.79)$$

– параметр, связанный с отношением токов, протекающих в коаксиальном кабеле, и зависящий от относительных значений внутренней и внешней границ системы.

В таблице 2.2 приведены значения второй токовой индуктивности в зависимости от отношения токов. Её значения вычислены при следующих предположениях: токи направлены противоположно ($\sigma = -1$); вторая строка рассчитана для значений $\xi_1 = 0,6$; $\xi_2 = 0,8$, а третья строка – для значений $\xi_1 = 0,25$; $\xi_2 = 0,75$.

Т а б л и ц а 2.2

Приведённые значения второй токовой индуктивности при ($\sigma = -1$)

i_1/i_0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
L_3/L_*	0,24	0,32	0,36	0,38	0,4	0,41	0,42	0,43	0,43	0,44
L_3/L_*	0,32	0,42	0,47	0,50	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57	0,57

Как видно из табл. 2.2, вторая токовая индуктивность положительная и достигает насыщения при больших отношениях токов. При смене направления токов, но с сохранением отношения токов она принимает точно такие, но отрицательные значения. Физические причины этого заключаются в том, что при смене направления токов значение магнитного потока (2.74) изменяется на противоположное. Для второй строки таблицы динамический диапазон перестройки можно оценить в 1,8 раза при изменении отношения токов в десять раз.

Полная индуктивность кабеля (2.68) для выбранных расчётных значений оказывается всегда положительной величиной. В таблице 2.3 приведены её значения в зависимости от отношения токов. Значения второй строки вычислены при следующих предположениях: $\xi_1 = 0,25$, $\xi_2 = 0,75$, токи имеют противоположное направление ($\sigma = -1$), а значения третьей строки вычислены для токов одного направления и тех же радиусов.

Т а б л и ц а 2.3

Приведённые значения полной индуктивности кабеля

i_1/i_0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
L/L_*	3,512	3,617	3,670	3,701	3,722	3,737	3,749	3,757	3,764	3,770
L/L_*	2,882	2,777	2,725	2,693	2,672	2,657	2,646	2,637	2,630	2,624

Как видно из табл. 2.3, динамический диапазон изменения полной индуктивности кабеля укладывается от 7 до 9 % и зависит от направления токов.

В связи с тем что рассчитанная индуктивность коаксиального кабеля является статической, то при переходе к работе на переменном токе для достижения эффекта однонаправленных токов следует применять синфазные токи, а для достижения эффекта с противоположными токами необходимо применять противофазные токи.

По разделу 2 опубликованы работы [19–21].

Выводы по разделу 2.2

Предложен аналитический метод расчёта радиального распределения векторного потенциала и индукции магнитного поля в бесконечно длинном коаксиальном кабеле.

Уравнение магнитостатики, записанное для векторного потенциала, решается для трёх областей коаксиального кабеля, на которых сформулированы граничные условия.

Шесть произвольных постоянных определяются из граничных условий.

Радиальное распределение вектора магнитной индукции таково, что в первой области она положительна и линейно нарастает с увеличением радиуса.

Во второй области магнитная индукция убывает с ростом радиуса, оставаясь положительной.

При переходе через границу раздела между второй и третьей областями индукция испытывает скачок при отсутствии равенства токов.

Скачок может быть со сменой знака, а может быть и без смены знака индукции.

Когда оба тока в кабеле имеют одинаковые направления, то индукция в третьей области становится отрицательной и с ростом радиуса стремится к нулю (скачок со сменой знака).

Когда оба тока в кабеле имеют разные направления, индукция магнитного поля в этой области остаётся положительной, но испытывает либо положительный ($i_1 > i_0$), либо отрицательный скачок ($i_1 < i_0$) и с ростом радиуса стремится к нулю.

Полная индуктивность коаксиального кабеля складывается из трёх погонных индуктивностей: двух токовых, которые возникают в областях 1 и 3, и одной потоковой, которая формируется в области 2.

Вычисление первой токовой индуктивности показывает, что её значение с точностью до постоянной величины совпадает с магнитной постоянной.

Вычисление второй потоковой индуктивности указывает на то, что её значение оказывается пропорциональной логарифму отношения граничных радиусов первой и второй областей.

Вычисление второй токовой индуктивности указывает на то, что она может быть управляема отношением и направлением токов в центральной жиле и оплётке.

При совпадении направлений обоих токов она отрицательна и может быть управляема отношением токов. Её значение не может изменить положительный характер полной индуктивности.

При токах разных направлений эта часть индуктивности положительна и может быть управляема отношением токов.

Динамический диапазон изменения второй потоковой индуктивности может быть в 1,8 раза при изменении отношения токов в десятки раз.

Динамический диапазон изменения полной индуктивности для разных направлениях токов лежит в интервале от 7 до 9 %.

3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЁТА ТОКОВИХРЕВЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ИНДУКТИВНОСТЕЙ ДЛЯ МИКРОСХЕМ И СИСТЕМ НА КРИСТАЛЛЕ

3.1. Индукционные и индуктивные свойства проводящего цилиндра с азимутальной плотностью вихревого тока

В главе 3 найден подход к решению задач цилиндрической геометрии, в которых между током и потоком может существовать конечный фазовый сдвиг. Этот подход объединяет в себе возможности двумерных и трёхмерных задач, решение которых запланировано в монографии и не ограничивает возможный диапазон изменения частоты переменного тока.

Для расчёта другого класса индуктивностей, названных нами вносимыми, можно обратиться принятый ранее порядок расчёта:

- задаём внешнее переменное магнитное поле $\vec{B}$ высокой симметрии;
- направляем его в немагнитный проводящий цилиндр так, чтобы оси цилиндра и направления внешнего магнитного поля совпадали;
- записываем первое уравнение Максвелла, из которого по известной правой части определяем распределение вихревого электрического поля $\vec{E}_{\text{rot}}$;
- привлекая закон Ома в дифференциальной форме $\vec{j} = \vec{E}_{\text{rot}} / \rho$, находим пространственное распределение плотности вихревых токов;
- интегрируя распределение плотности тока через поперечную току площадь, получаем значение полного тока, возникающее в проводящем цилиндре;
- используя баланс энергий, поступающих в систему, для значений, усреднённых по периоду изменения поля, получаем вносимую энергетическую индуктивность в том случае, если квадрат внешнего магнитного поля сократится в обеих частях равенства баланса энергий.

3.1.1. Физико-математическая модель расчёта. Две ориентации силовых линий вихревого электрического поля

Физико-математическая модель расчёта базируется на решении первого уравнения Максвелла, которое в физике иногда называют дифференциальной формой записи закона электромагнитной индукции Фарадея [12]

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.1)$$

Она описывает закон порождения вихревого электрического поля $\vec{E}$ в некоторой точке пространства за счёт изменения во времени вектора магнитной индукции $\vec{B}$ в той же точке пространства.

Представим себе, что в некоторой области свободного пространства внешними токами создано однородное $\vec{B}_0 = \text{const}$ переменное магнитное поле с зависимостью от времени

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos \omega t. \quad (3.2)$$

При этом предполагается, что вектор $\vec{B}$ не изменяет своё выделенное направление в пространстве, а изменяет свой модуль только во времени со скоростью

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\omega \vec{B}_0 \sin \omega t. \quad (3.3)$$

На рис. 3.1 представлена ориентация силовых линий (указаны стрелками) однородного магнитного поля по отношению к сплошному немагнитному проводящему цилиндру, который помещён в это однородное поле. На рис. 3.1 введены обозначения: $00'$ – ось сплошного цилиндра; R – радиус цилиндра; h – высота цилиндра. Вектор $\vec{B}$ направлен по оси z , которая совпадает с осью цилиндра. В дальнейшем будем использовать естественную для исследуемой модели правую ортогональную систему цилиндрических координат $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$. Символами e_r, e_φ, e_z обозначены единичные орты направления соответствующих осей.

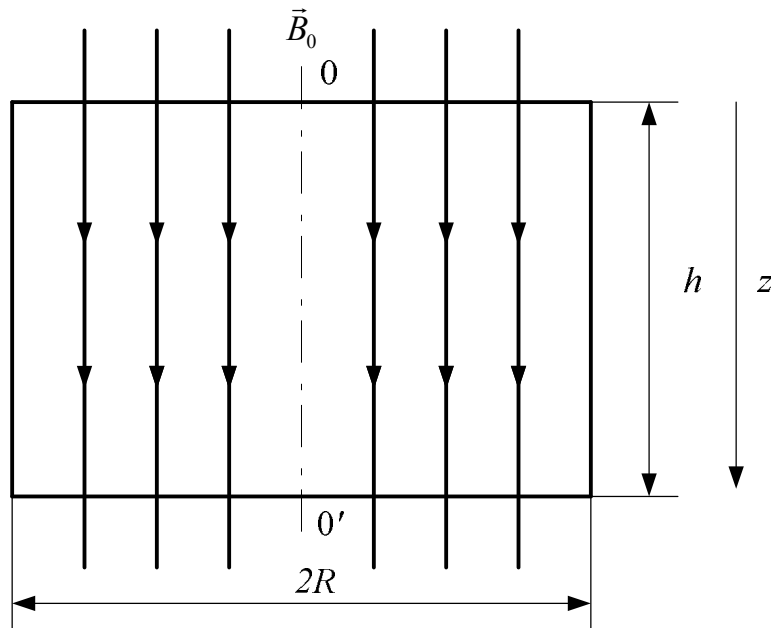


Рис. 3.1. Ориентация силовых линий магнитного поля по отношению к проводящему цилиндру

Подставляя (3.3) в (3.1), получим

$$\text{rot} \vec{E} = \omega \vec{B}_0 \sin \omega t. \quad (3.4)$$

Существует несколько возможных ориентаций силовых линий вихревого электрического поля в свободном пространстве. На рис. 3.2 представлен выделенный фрагмент свободного пространства для первой ориентации вихрей электрического поля. На рис. 3.2 направление вектора $\vec{B}_0$ за лист обозначено крестиком в кружочке. Взято четыре силовые линии вектора $\vec{B}_0$ (обозначены крестиками). Силовые линии вихревого поля $\vec{E}$ отмечены стрелками и нарисованы в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}_0$. Картина нарисована для момента времени, который находится в интервале времени убывания вектора $\vec{B}_0$. Тогда индукционные токи, совпадающие по направлению с силовыми линиями вектора $\vec{E}$, создают своё индукционное магнитное поле, которое сонаправлено с вектором $\vec{B}_0$.

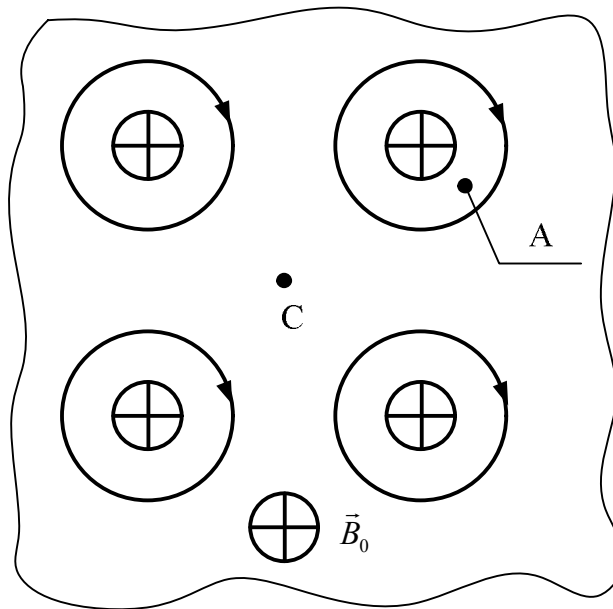


Рис. 3.2. Фрагмент первой ориентации силовых линий вихревого электрического поля

Выбор начала цилиндрической системы координат в точке А или в точке С (см. рис. 3.2) приводит к тому, что в этой плоскости вихревое электрическое поле всегда имеет две компоненты E_r и E_φ . В связи с этим проекция равенства (3.4) на ось z цилиндрической системы координат имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = \omega B_z \sin \omega t. \quad (3.5)$$

На рис. 3.3 представлена другая возможная ориентация силовых линий вихревого электрического поля в свободном пространстве. Направление вектора $\vec{B}_0$ обозначено крестиком в кружочке. Взято пять силовых линий вектора $\vec{B}_0$. Силовые линии вихревого поля $\vec{E}$ отмечены стрелками и нарисованы в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}_0$. Картина нарисована для того же момента времени.

Её принципиальное отличие от силовых линий напряжённости вихревого поля, представленного на рис. 3.2, заключается в том, что эти силовые линии находятся на концентрических окружностях. При такой ориентации вихревое электрическое поле $\vec{E}$ имеет одну компоненту E_φ , а E_r – обращается в нуль. Для этого начало цилиндрической системы координат следует совместить с точкой, лежащей на оси OO' сплошного цилиндра, а направление оси z выбрать совпадающим с осью цилиндра OO' .

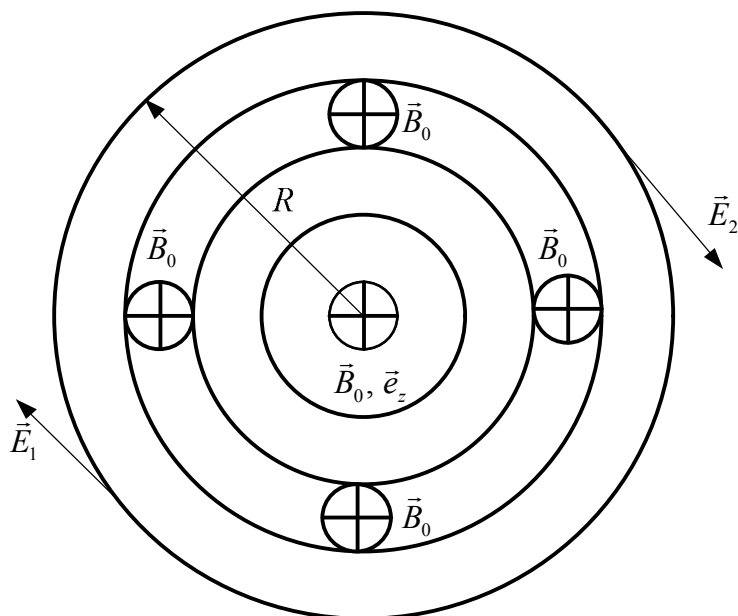


Рис. 3.3. Фрагмент второй ориентации силовых линий вихревого электрического поля

Впервые экспериментальное доказательство существования такой возможной ориентации вихревого электрического поля было обнаружено при создании бетатронов – индукционных ускорителей электронов. В них как раз ускорение электронов и осуществляется вихревым электрическим полем, силовые линии которого представляют собой концентрические окружности, представленные на рис. 3.3. Они формируются электромагнитом специальной формы [22].

Поскольку в бетатроне это поле нагружено плотностью тока азимутального направления из электронов, то предположим, что именно такое вихревое поле формируется в сплошном проводящем цилиндре, объём которого пересекается силовыми линиями однородного переменного магнитного поля $\vec{B}_0$.

На рис. 3.4 представлена ориентация проводящего кольца по отношению к направлению поля B_z . Радиус отверстия кольца обозначен через r_1 , а произвольная толщина кольца (или цилиндра) обозначена через h .

Предполагая, что вихревое электрическое поле совпадает по фазе со скоростью изменения магнитного поля

$$E_\phi = E_0(r) \sin \omega t, \quad (3.6)$$

из уравнения (3.4) получим уравнение, связывающее $E_0(r)$ и B_0

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_0(r)) = \omega B_0. \quad (3.7)$$

Его решение для $E_0(r)$ имеет вид

$$E_0(r) = \omega B_0 r / 2 + C_1 / r. \quad (3.8)$$

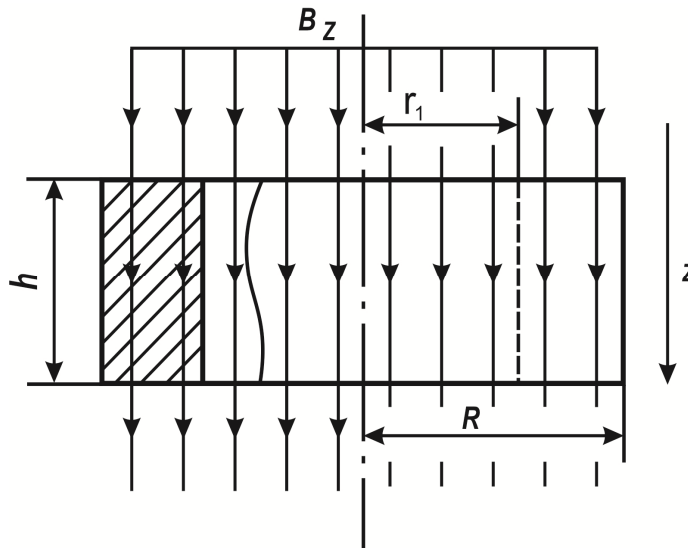


Рис. 3.4. Ориентация проводящего кольца по отношению к осевому магнитному полю

В решении (3.8) выберем постоянную $C_1=0$ из условия, что при $B_0=0$; $E_0=0$. Из (3.8) видно, что азимутальная компонента вектора напряженности вихревого электрического поля – линейная функция радиуса с масштабом

$$E_* = \omega B_0 R / 2 = \pi \nu B_0 R. \quad (3.9)$$

Представим (3.8) с учётом (3.9) в виде

$$\frac{E_0(r)}{E_*} = \frac{r}{R}. \quad (3.10)$$

Средняя по радиусу напряжённость вихревого поля зависит от отношения r_1/R

$$\langle E_0(r) \rangle_r = \frac{1}{R - r_1} \int_{r_1}^R E_* \frac{r}{R} dr = \frac{E_*}{2} (1 + r_1 / R) \quad (3.11)$$

Распределение вихревого поля в однородном проводящем кольце создаёт вихревые токи Фуко, плотность тока которых имеет такое же направление в пространстве и рассчитывается из локального закона Ома

$$j_\varphi = E_\varphi / \rho, \quad (3.12)$$

где ρ – удельное сопротивление кольца.

Из (3.12) видно, что плотность тока Фуко в однородной проводящей среде $\rho = \text{const}$ также является линейной функцией радиуса и также зависит от времени, как и E_φ

$$j_\varphi = j_0(r) \sin \omega t, \quad (3.13)$$

где $j_0(r)$ связано с масштабом плотности тока

$$j_* = \pi \nu B_0 R / \rho, \quad (3.14)$$

соотношением

$$j_0(r) = j_* r / R. \quad (3.15)$$

Поскольку внутри кольца есть полость радиусом r_1 , то плотность тока (3.15) внутри кольца изменяется от наименьшего значения на границе полости

$$j_0(r_1) = j_* r_1 / R, \quad (3.16)$$

до наибольшего значения $j_0(R) = j_*$, совпадающего с масштабом плотности тока.

Средняя по радиусу плотность тока зависит от отношения r_1/R также как и средняя по радиусу напряжённость поля

$$\langle j_0(r) \rangle_r = \frac{1}{R - r_1} \int_{r_1}^R j_0(r) dr = \frac{j_*}{2} (1 + r_1 / R). \quad (3.17)$$

Из соотношения (3.14) для масштаба плотности тока видно, что при прочих равных условиях он может достигать очень больших значений на высоких частотах для проводящей среды с малым значением удельного сопротивления ρ . Это будет приводить к существенному нагреву проводящих колец на высоких частотах.

Удельная тепловая мощность, выделяемая в локальной области проводника при протекании токов Фуко, рассчитывается из закона Джоуля Ленца:

$$p_v = \rho j_\varphi^2 = p_* \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \omega t, \quad (3.18)$$

$$\text{где} \quad p_* = \rho j_*^2 = \pi^2 \nu^2 B_0^2 R^2 / \rho \quad (3.19)$$

– масштаб объёмной плотности тепловой мощности.

Как видно из (3.19), масштаб плотности уже пропорционален квадрату частоты и для проводящей среды с произвольным значением удельного сопротивления оказывается наиболее значительным на внешней границе кольца. Это будет приводить к его выгоранию, что и наблюдается в экспериментах.

Средняя по радиусу удельная тепловая мощность зависит от отношения r_1/R

$$\langle p_v \rangle_r = \frac{1}{R - r_1} \int_{r_1}^R p_* \frac{r^2}{R^2} dr = \frac{p_*}{3} \left(1 + \frac{r_1}{R} + \frac{r_1^2}{R^2} \right). \quad (3.20)$$

Поскольку напряжённость вихревого поля E_ϕ зависит линейно от радиуса, то элементарная электродвижущая сила (ЭДС) индукции также будет зависеть от радиуса, момента времени и значения угла интегрирования (см. рис. 3.5)

$$d\varepsilon = \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_\phi r d\phi = \frac{E_* r^2 d\phi}{R} \sin \omega t. \quad (3.21)$$

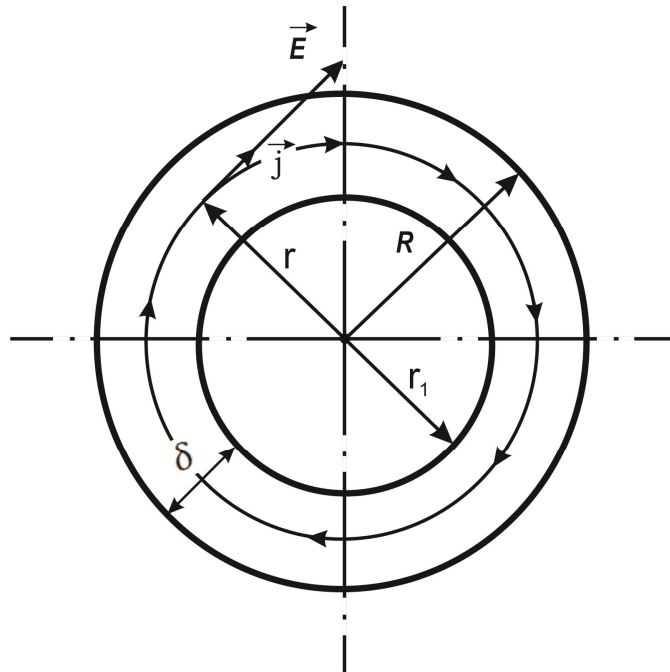


Рис. 3.5. Направление напряжённости вихревого поля и плотности тока в кольце

На одной замкнутой силовой линии вихревого поля электродвижущая сила индукции зависит от её радиуса

$$\varepsilon(r, t) = \varepsilon_* \frac{r^2}{R^2} \sin \omega t, \quad (3.22)$$

$$\text{где} \quad \varepsilon_* = 2\pi R E_* \quad (3.23)$$

– масштаб электродвижущей силы.

Как видно из (3.22), значение индукции достигает значения масштаба на границе кольца для моментов времени $t = \pi/(2\omega) + 2\pi m/\omega$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Усреднённое по радиусу значение ЭДС сохраняет ту же зависимость от времени

$$\langle \varepsilon \rangle_r = \frac{1}{R - r_1} \int_{r_1}^R \varepsilon_* \frac{r^2}{R^2} \sin \omega t dr = \frac{\varepsilon_*}{3} \left(1 + \frac{r_1}{R} + \frac{r_1^2}{R^2} \right) \sin \omega t. \quad (3.24)$$

Как видно из (3.24), закон изменения $\langle \varepsilon \rangle_r \dots$ совпадает с законом изменения $\langle p_v \rangle_r$.

График зависимости приведённого значения средней по радиусу ЭДС индукции $\langle \varepsilon \rangle_r / \varepsilon_*$ от приведённого радиуса полости r_1/R представлен на рис. 3.6. Из него видно, что она изменяется от 1/3 при $r_1 \rightarrow 0$ до наибольшего значения индукции, совпадающего с масштабом, и достигаемого в тонких кольцах, у которых $r_1/R \rightarrow 1$.

Полный ток, индуцированный в кольце и пересекающий площадь поперечного сечения

$$S = h(R - r_1), \quad (3.25)$$

где h – толщина кольца, может быть вычислен из интегрирования для фиксированного момента времени

$$i = \int_S \vec{j} d\vec{s} = i_* \left(1 - \frac{r_1^2}{R^2} \right) \sin \omega t, \quad (3.26)$$

$$\text{где} \quad i_* = j_* h R / 2 = \pi \nu B_0 h R^2 / (2\rho) \quad (3.27)$$

– масштаб индукционного тока.

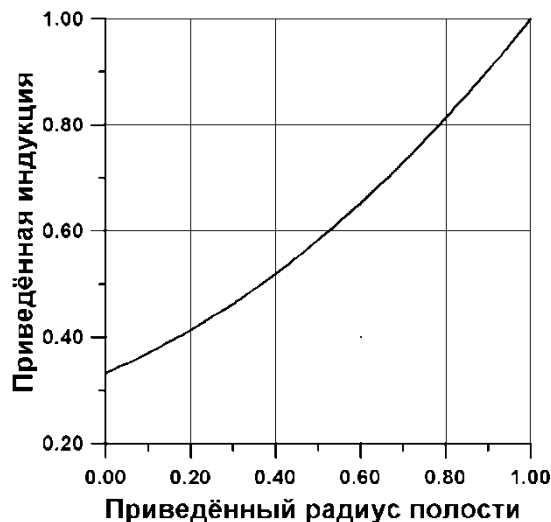


Рис. 3.6. Зависимость приведённого значения ЭДС индукции от приведённого радиуса полости

На рис. 3.7 представлена графическая зависимость приведённого тока индукции от приведённого радиуса полости r_1/R . Из него видно, что приведённый ток индукции изменяется от 1 при $r_1 \rightarrow 0$ до очень малых значений в тонких кольцах, реализующихся при $r_1/R \rightarrow 1$.

Соотношения (3.26) и (3.24) позволяют определить независящее от времени усреднённое значение интегрального омического сопротивления кольца индукционному току

$$\langle R \rangle = \frac{\langle \varepsilon \rangle_r}{i} = R_* \frac{(1 + r_1/R + r_1^2/R^2)}{(1 - r_1^2/R^2)}, \quad (3.28)$$

$$\text{где} \quad R_* = \varepsilon_*/(3i_*) \quad (3.29)$$

— масштаб омического сопротивления кольца.

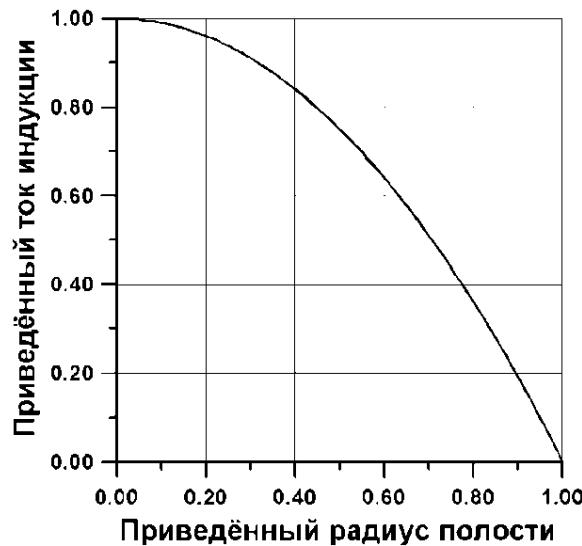


Рис. 3.7. Зависимость приведённого тока индукции от приведённого радиуса полости

На рис. 3.8 представлен график зависимости приведённого омического сопротивления $\langle R \rangle/R_*$ от приведённого радиуса полости r_1/R . Из него видно, что приведённое усреднённое значение омического сопротивления при $r_1 \rightarrow 0$ совпадает с единицей, а для тонких колец при $r_1/R \rightarrow 1$ стремится к $+\infty$.

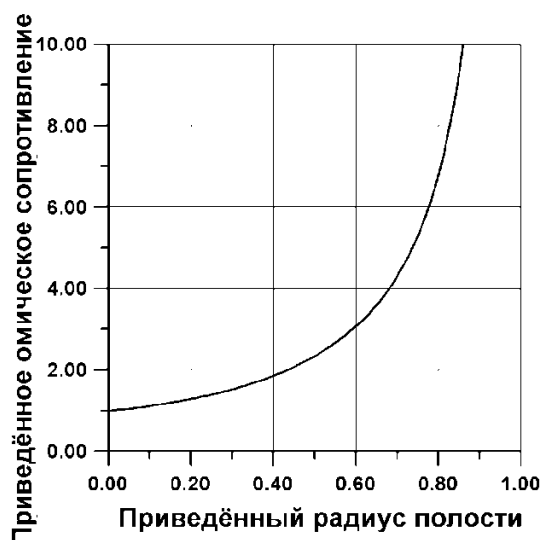


Рис. 3.8. Зависимость приведённого омического сопротивления от приведённого радиуса полости

Это свойство усреднённого интегрального омического сопротивления позволит при реализации тонких колец или цилиндров искусственно уменьшать тепловое энерговыделение проводника на высоких частотах.

Тепловая мощность, выделяемая во всём кольце, находится из (3.16) интегрированием для фиксированного момента времени

$$P = \int_V p_v dv = \int_V p_v(r, \varphi, z) r dr dz d\varphi = P_* \left(1 - r_1^4 / R^4\right), \quad (3.30)$$

где $P_* = p_* \pi R^2 h / 2$ (3.31)
 – масштаб тепловой мощности.

На рис. 3.9 представлена зависимость приведённой тепловой мощности P/P_* от приведённого радиуса полости r_1/R .

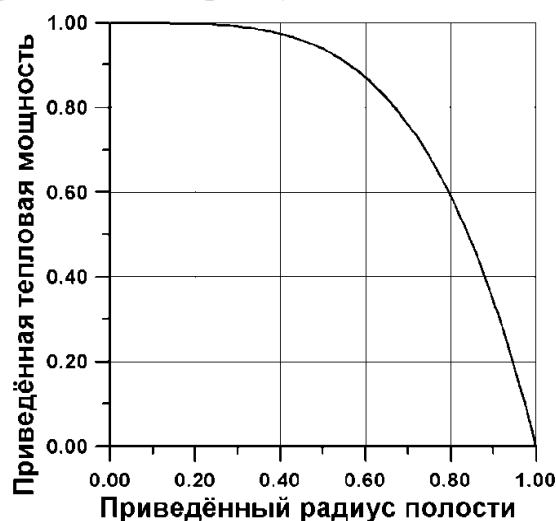


Рис. 3.9. Зависимость приведённой тепловой мощности от приведённого радиуса полости

Как видно из рисунка, она быстро изменяется от 1 при $r_1 \rightarrow 0$ до нуля для случая тонких колец, когда $r_1 / R \rightarrow 1$.

Соотношение (3.30) также указывает на уменьшение выделения тепловой мощности на высоких частотах при реализации радиально тонких колец или цилиндров для случая $r_1 / R \rightarrow 1$.

Наличие фазового сдвига по времени между индукционным током кольца и магнитным потоком не позволяет использовать формулу для определения индуктивности в виде

$$\Phi = Li. \quad (3.32)$$

Это нельзя сделать и для переменного тока, используя соотношение для ЭДС индукции

$$\varepsilon_s = -L \frac{di}{dt}, \quad (3.33)$$

поскольку и в этом случае между ЭДС и скоростью изменения тока существует ненулевой фазовый сдвиг.

3.1.2. Энергетический баланс в системе

Рассчитаем значение вносимой индуктивности из энергетических соображений (см. определение (3) во введении). Силовые линии магнитного поля B_z пронизывают весь объём кольца и вносят в него магнитную энергию W , значение которой зависит от времени

$$W(\vec{r}, t) = \int_V \frac{B_z^2}{2\mu_0} dV. \quad (3.34)$$

При усреднении за период изменения поля эта энергия имеет конечное значение:

$$\langle W \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T W(\vec{r}, t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt \int_V \frac{B_0^2}{2\mu_0} dV = \frac{B_0^2 \pi R^2 h}{4\mu_0}. \quad (3.35)$$

Поскольку эта же энергия магнитного поля создаёт вихревое электрическое поле, которое формирует индукционный ток, будем считать, что усреднённое значение магнитной энергии (3.35) совпадает с усредненным за период значением энергии, запасённой индуктивностью

$$\langle W \rangle_T = \frac{L}{2} \langle i^2 \rangle_T, \quad (3.36)$$

где под $\langle i^2 \rangle_T$ понимается усреднение, выполненное за такой же период изменения тока

$$\langle i^2 \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T i_*^2 \left(1 - r_1^2 / R^2\right)^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{i_*^2}{2} \left(1 - \frac{r_1^2}{R^2}\right)^2. \quad (3.37)$$

3.1.3. Частотная зависимость вносимой интегральной индуктивности трубчатого проводящего цилиндра

Подставляя в (3.36) соотношения (3.35) и (3.37), получим для вносимой индуктивности выражение

$$L = L_* \left(1 - r_1^2 / R^2\right)^{-2}, \quad (3.38)$$

где

$$L_* = 4\rho^2 / (\mu_0 \nu^2 V) \quad (3.39)$$

– масштаб индуктивности, а

$$V = \pi R^2 h \quad (3.40)$$

– полный объём кольца.

Как видно из (3.39), масштаб индуктивности может варьироваться в широких пределах при изменении параметров трёх физических величин: квадрата удельного сопротивления, квадрата частоты и полного объёма, занимаемого кольцом.

Отметим также важное обстоятельство. Масштаб токовихревой индуктивности впервые перестаёт быть чисто геометрической величиной. Из (3.39) видно его странное свойство: чем меньше объём, тем больше масштаб. Как будет показано дальше, это свойство токовихревой индуктивности наиболее сильно проявляет себя для наноразмерных эффектов, при которых толщина h имеет масштаб нанометров.

На рис. 3.10 представлена зависимость приведённой индуктивности L/L_* от приведённого радиуса полости r_1/R .

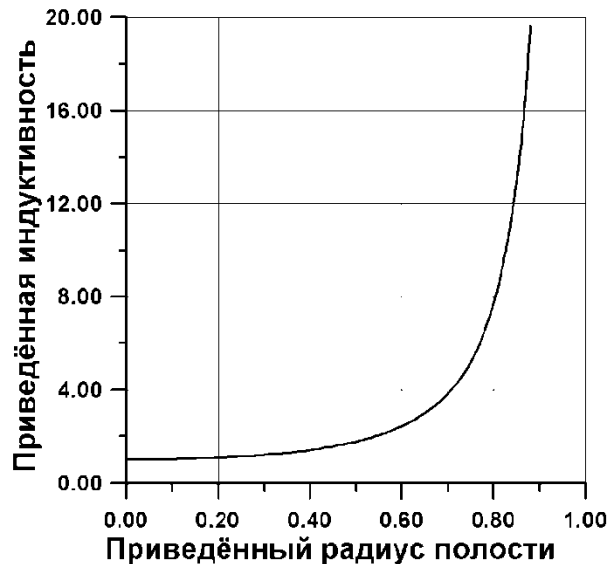


Рис. 3.10. Зависимость приведённого значения индуктивности от приведённого радиуса полости

Как видно из рисунка, её значение совпадает со значением 1 при $r_1 \rightarrow 0$. Для радиально тонких колец или удлинённых цилиндров при выполнении условия $r_1/R \rightarrow 1$ индуктивность резко увеличивается по сравнению с масштабом.

Это свойство вносимой индуктивности позволяет её увеличивать за счёт изменения радиальной толщины при реализации тонких колец или удлинённых цилиндров. В этом случае они обладают уменьшенным тепловым энерговыделением.

3.1.4. Основные физические параметры цилиндров с малой радиальной толщиной

При малой радиальной толщине $\delta = R - r_1$ выполняется условие $\delta/R \ll 1$. В этом приближении распределение напряжённости вихревого поля по радиусу цилиндра можно считать однородным

$$E_\varphi = E_0(r) \sin \omega t = E_* \sin \omega t. \quad (3.41)$$

Используя свойства разложений

$$\frac{r_1}{R} = 1 - \delta/R, \quad \frac{r_1^2}{R^2} \approx 1 - 2\delta/R, \quad \left(1 - \frac{r_1^2}{R^2}\right)^2 \approx 4 \frac{\delta^2}{R^2}, \quad (3.42)$$

выпишем основные законы распределения физических параметров в цилиндрах с малой радиальной толщиной.

Плотность тока внутри цилиндра распределена однородно

$$j_\varphi = j_* \sin \omega t. \quad (3.43)$$

Удельная тепловая мощность, выделяемая в локальной области тонкого цилиндра, тоже однородна

$$p_v = \rho j_*^2 \sin^2 \omega t. \quad (3.44)$$

На силовой линии вихревого поля электродвижущая сила индукции не зависит от её радиуса

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_* \sin \omega t. \quad (3.45)$$

Усреднённое по радиусу значение ЭДС сохраняет ту же зависимость от времени и незначительно зависит от радиальной толщины цилиндра δ

$$\langle \varepsilon \rangle_r = \varepsilon_* (1 - \delta/R). \quad (3.46)$$

Полный ток, индуцированный в тонком цилиндре, мал

$$i = 2i_* \delta/R. \quad (3.47)$$

Интегральное омическое сопротивление тонкого цилиндра становится большим, по сравнению с масштабом, из-за особенности в знаменателе

$$\langle R \rangle \approx 3RR_*/(2\delta). \quad (3.48)$$

Тепловая мощность, выделяемая в тонком цилиндре, становится маленькой и пропорциональной δ/R

$$P = 4P_*\delta/R. \quad (3.49)$$

Вносимая индуктивность тонкого цилиндра становится большой по сравнению с масштабом из-за особенности в знаменателе

$$L = L_*R^2/(4\delta^2). \quad (3.50)$$

3.1.5. Расчёты величины вносимой индуктивности проводящего цилиндра конечной толщины

Поскольку современные материалы от проводников до собственных полупроводников имеют удельное сопротивление, изменяющееся в диапазоне

$$15,5 \text{ нОм} \cdot \text{м} < \rho < 2,5 \text{ кОм} \cdot \text{м},$$

то формулы для расчёта вносимой индуктивности (3.36) и (3.37) дают широкие возможности для её изменения.

В таблице 3.1 рассчитаны значения частоты ν в герцах, которые для малого объёма цилиндра, равного $3,14 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3$, дают значения индуктивности в интервале от 100 мГн до 1 нГн для различных проводящих материалов.

Т а б л и ц а 3.1

Значения частоты для различных проводящих материалов

	100 мГн	10 мГн	1 мГн	100 мкГн	10 мкГн	1 мкГн	100 нГн	10 нГн	1 нГн
Медь	15,6	49,3	156	493	$1,56 \cdot 10^3$	$4,93 \cdot 10^3$	$1,56 \cdot 10^4$	$4,93 \cdot 10^4$	$1,56 \cdot 10^5$
Вольф-рам	49,2	156	493	$1,56 \cdot 10^3$	$4,93 \cdot 10^3$	$1,56 \cdot 10^4$	$4,93 \cdot 10^4$	$1,56 \cdot 10^5$	$4,93 \cdot 10^5$
Никель	61,8	195	618	$1,95 \cdot 10^3$	$6,18 \cdot 10^3$	$1,95 \cdot 10^4$	$6,18 \cdot 10^4$	$1,95 \cdot 10^5$	$6,18 \cdot 10^5$
Нихром	$1,01 \cdot 10^3$	$3,18 \cdot 10^3$	$1,01 \cdot 10^4$	$3,18 \cdot 10^4$	$1,01 \cdot 10^5$	$3,18 \cdot 10^5$	$1,01 \cdot 10^6$	$3,18 \cdot 10^6$	$1,01 \cdot 10^7$
КЭЭФ	$1,01 \cdot 10^6$	$3,18 \cdot 10^6$	$1,01 \cdot 10^7$	$3,18 \cdot 10^7$	$1,01 \cdot 10^8$	$3,18 \cdot 10^8$	$1,01 \cdot 10^9$	$3,18 \cdot 10^9$	$1,01 \cdot 10^{10}$
Германий	$4,73 \cdot 10^8$	$1,5 \cdot 10^9$	$4,73 \cdot 10^9$	$1,5 \cdot 10^{10}$	$4,73 \cdot 10^{10}$	$1,5 \cdot 10^{11}$	$4,73 \cdot 10^{11}$	$1,5 \cdot 10^{12}$	$4,73 \cdot 10^{12}$
Кремний	$2,32 \cdot 10^{12}$	$7,32 \cdot 10^{12}$	$2,32 \cdot 10^{13}$	$7,32 \cdot 10^{13}$	$2,32 \cdot 10^{14}$	$7,32 \cdot 10^{14}$	$2,32 \cdot 10^{15}$	$7,32 \cdot 10^{15}$	$2,32 \cdot 10^{16}$

Из таблицы 3.1 видно, что большие значения индуктивности достигаются на малых частотах. Для металлов эти частоты заключены в диапазоне от десятков герц (медь) до килогерц (нихром). Для полупроводников такие значения индуктивности достижимы на частотах больше 1 МГц. Малые значения индуктивности достигаются на высоких частотах. Для металлов это сотни килогерц, а для полупроводников – десятки и тысячи терагерц.

В таблице 3.2 рассчитаны значения частоты ν в герцах, которые для объёма цилиндра, равного $3,14 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$, дают значения индуктивности в интервале от 100 мГн до 1 нГн для различных проводящих материалов.

Т а б л и ц а 3.2

Значения частоты для различных проводящих материалов

	100 мГн	10 мГн	1 мГн	100 мкГн	10 мкГн	1 мкГн	100 нГн	10 нГн	1 нГн
Медь	$4,93 \cdot 10^{-2}$	$1,56 \cdot 10^{-1}$	$4,93 \cdot 10^{-1}$	1,56	4,93	15,6	49,3	156	493
Вольф-рам	$1,56 \cdot 10^{-1}$	$4,93 \cdot 10^{-1}$	1,56	4,93	15,6	49,3	156	493	1560
Никель	$1,95 \cdot 10^{-1}$	$6,18 \cdot 10^{-1}$	1,95	6,18	19,5	61,8	195	618	1950
Нихром	3,18	10,1	31,8	101	318	$1,01 \cdot 10^3$	$3,18 \cdot 10^3$	$1,01 \cdot 10^4$	$3,18 \cdot 10^4$
КЭЭФ	$3,18 \cdot 10^3$	$1,01 \cdot 10^4$	$3,18 \cdot 10^4$	$1,01 \cdot 10^5$	$3,18 \cdot 10^5$	$1,01 \cdot 10^6$	$3,18 \cdot 10^6$	$1,01 \cdot 10^7$	$3,18 \cdot 10^7$
Германий	$1,5 \cdot 10^6$	$4,73 \cdot 10^6$	$1,5 \cdot 10^7$	$4,73 \cdot 10^7$	$1,5 \cdot 10^8$	$4,73 \cdot 10^8$	$1,5 \cdot 10^9$	$4,73 \cdot 10^9$	$1,5 \cdot 10^{10}$
Кремний	$7,32 \cdot 10^9$	$2,32 \cdot 10^{10}$	$7,32 \cdot 10^{10}$	$2,32 \cdot 10^{11}$	$7,32 \cdot 10^{11}$	$2,32 \cdot 10^{12}$	$7,32 \cdot 10^{12}$	$2,32 \cdot 10^{13}$	$7,32 \cdot 10^{13}$

Из таблицы 3.2 видно, что большие значения индуктивности достигаются на малых частотах. Для металлов эти частоты заключены в диапазоне от сотых герца (медь) до герц (нихром). Для полупроводников такие значения индуктивности достижимы на частотах больше 1 КГц. Малые значения индуктивности достигаются на высоких частотах. Для металлов это килогерцы и десятки килогерц, а для полупроводников – десятки и тысячи гигагерц.

В таблице 3.3 рассчитаны значения частоты ν в герцах, которые для объёма кольца, с радиусом $R=50$ мкм, высотой $h=1$ мкм и радиальной толщиной $\delta=0,5$ мкм, дают значения индуктивности в интервале от 100 мГн до 1 нГн для различных проводящих материалов (в таблицах материал КЭФ – кремний электронный легированный фосфором с удельным сопротивлением $\rho=0,1$ ом·см; германий – с удельным сопротивлением $\rho=47$ ом·см; кремний – с удельным сопротивлением $\rho=230$ Ком·см).

Из табл. 3.3 видно, что большие значения индуктивности достигаются на малых частотах. Для металлов эти частоты заключены в диапазоне от десятков килогерц (медь) до мегагерц (нихром). Для полупроводников такие значения индуктивности достижимы на частотах больше 1 ГГц. Малые значения индуктивности достигаются на высоких частотах. Для металлов это гигагерцы, а для полупроводников – десятков терагерц до десятков миллионов терагерц.

Т а б л и ц а 3.3

**Значения частоты для различных проводящих материалов
микроскопического кольца**

Матери- ал/ индукти- вность	Медь	Воль- фрам	Никель	Нихром	КЭФ	Герма- ний	Кремний
100 мГн	$4,96 \cdot 10^4$	$1,56 \cdot 10^5$	$1,96 \cdot 10^5$	$3,20 \cdot 10^6$	$3,20 \cdot 10^9$	$1,5 \cdot 10^{12}$	$7,36 \cdot 10^{15}$
10 мГн	$1,57 \cdot 10^5$	$4,95 \cdot 10^5$	$6,21 \cdot 10^5$	$1,01 \cdot 10^7$	$1,01 \cdot 10^{10}$	$4,75 \cdot 10^{12}$	$2,33 \cdot 10^{16}$
1 мГн	$4,96 \cdot 10^5$	$1,56 \cdot 10^6$	$1,96 \cdot 10^6$	$3,20 \cdot 10^7$	$3,20 \cdot 10^{10}$	$1,5 \cdot 10^{13}$	$7,36 \cdot 10^{16}$
100 мкГн	$1,57 \cdot 10^6$	$4,95 \cdot 10^6$	$6,21 \cdot 10^6$	$1,01 \cdot 10^8$	$1,01 \cdot 10^{11}$	$4,75 \cdot 10^{13}$	$2,33 \cdot 10^{17}$
10 мкГн	$4,96 \cdot 10^6$	$1,56 \cdot 10^7$	$1,96 \cdot 10^7$	$3,20 \cdot 10^8$	$3,20 \cdot 10^{11}$	$1,5 \cdot 10^{14}$	$7,36 \cdot 10^{17}$
1 мкГн	$1,57 \cdot 10^7$	$4,95 \cdot 10^7$	$6,21 \cdot 10^7$	$1,01 \cdot 10^9$	$1,01 \cdot 10^{12}$	$4,75 \cdot 10^{14}$	$2,33 \cdot 10^{18}$
100 нГн	$4,96 \cdot 10^7$	$1,56 \cdot 10^8$	$1,96 \cdot 10^8$	$3,20 \cdot 10^9$	$3,20 \cdot 10^{12}$	$1,5 \cdot 10^{15}$	$7,36 \cdot 10^{18}$
10 нГн	$1,57 \cdot 10^8$	$4,95 \cdot 10^8$	$6,21 \cdot 10^8$	$1,01 \cdot 10^{10}$	$1,01 \cdot 10^{13}$	$4,75 \cdot 10^{15}$	$2,33 \cdot 10^{19}$
1 нГн	$4,96 \cdot 10^8$	$1,56 \cdot 10^9$	$1,96 \cdot 10^9$	$3,20 \cdot 10^{10}$	$3,20 \cdot 10^{13}$	$1,5 \cdot 10^{16}$	$7,36 \cdot 10^{19}$

В таблице 3.4 рассчитаны значения частоты ν в герцах, которые для объёма кольца с радиусом $R=500$ мкм, высотой $h=10$ мкм и радиальной толщиной $\delta=5$ мкм дают значения индуктивности в интервале от 100 мГн до 1 нГн для различных проводящих материалов.

Т а б л и ц а 3.4

**Значения частоты для различных проводящих материалов
микроскопического кольца**

Материал /индукти- вность	Медь	Вольф- рам	Никель	Нихром	КЭФ	Герма- ний	Крем- ний
100 мГн	$1,57 \cdot 10^3$	$4,95 \cdot 10^3$	$6,21 \cdot 10^3$	$1,01 \cdot 10^5$	$1,01 \cdot 10^8$	$4,75 \cdot 10^{10}$	$2,33 \cdot 10^{14}$
10 мГн	$4,96 \cdot 10^3$	$1,56 \cdot 10^4$	$1,96 \cdot 10^4$	$3,20 \cdot 10^5$	$3,20 \cdot 10^8$	$1,5 \cdot 10^{11}$	$7,36 \cdot 10^{14}$
1 мГн	$1,57 \cdot 10^4$	$4,95 \cdot 10^4$	$6,21 \cdot 10^4$	$1,01 \cdot 10^6$	$1,01 \cdot 10^9$	$4,75 \cdot 10^{11}$	$2,33 \cdot 10^{15}$
100 мкГн	$4,96 \cdot 10^4$	$1,56 \cdot 10^5$	$1,96 \cdot 10^5$	$3,20 \cdot 10^6$	$3,20 \cdot 10^9$	$1,5 \cdot 10^{12}$	$7,36 \cdot 10^{15}$
10 мкГн	$1,57 \cdot 10^5$	$4,95 \cdot 10^5$	$6,21 \cdot 10^5$	$1,01 \cdot 10^7$	$1,01 \cdot 10^{10}$	$4,75 \cdot 10^{12}$	$2,33 \cdot 10^{16}$
1 мкГн	$4,96 \cdot 10^5$	$1,56 \cdot 10^6$	$1,96 \cdot 10^6$	$3,20 \cdot 10^7$	$3,20 \cdot 10^{10}$	$1,5 \cdot 10^{13}$	$7,36 \cdot 10^{16}$
100 нГн	$1,57 \cdot 10^6$	$4,95 \cdot 10^6$	$6,21 \cdot 10^6$	$1,01 \cdot 10^8$	$1,01 \cdot 10^{11}$	$4,75 \cdot 10^{13}$	$2,33 \cdot 10^{17}$
10 нГн	$4,96 \cdot 10^6$	$1,56 \cdot 10^7$	$1,96 \cdot 10^7$	$3,20 \cdot 10^8$	$3,20 \cdot 10^{11}$	$1,5 \cdot 10^{14}$	$7,36 \cdot 10^{17}$
1 нГн	$1,57 \cdot 10^7$	$4,95 \cdot 10^7$	$6,21 \cdot 10^7$	$1,01 \cdot 10^9$	$1,01 \cdot 10^{12}$	$4,75 \cdot 10^{14}$	$2,33 \cdot 10^{18}$

Из табл. 3.4 также видно, что большие значения индуктивности достигаются на малых частотах. Для металлов эти частоты заключены в диапазоне от килогерца (медь) до сотен килогерц (нихром). Для полупроводников такие значения индуктивности достижимы на частотах больше 100 МГц. Малые значения индуктивности достигаются на высоких частотах. Для металлов это десятки и тысячи мегагерц, а для полупроводников – единицы и миллионы терагерц.

Один из возможных вариантов экспериментальных исследований эффекта вносимой индуктивности в планарных кольцевых технологиях – использование системы «кольцо в кольце» [15] (см. также главу 7).

Выводы по разделу 3.1

Предложен аналитический метод расчёта индукционных и индуктивных свойств проводящего немагнитного цилиндра с полостью произвольной высоты с азимутальной плотностью вихревого тока.

Метод основан на решении первого уравнения Максвелла для цилиндрической симметрии исследуемых электромагнитных полей, в которых между током и потоком может существовать конечный фазовый сдвиг.

Получены радиальные распределения азимутальной компоненты напряжённости вихревого электрического поля, плотности токов Фуко и удельной тепловой мощности, выделяемой в локальной области проводника.

Определены зависимости среднего значения ЭДС в цилиндре, индукционного тока и интегрального омического сопротивления от приведённого радиуса полости цилиндра.

Получена формула для вычисления вносимой индуктивности проводящего цилиндра. Её зависимость от приведённого радиуса полости проводящего цилиндра, квадрата удельного сопротивления, квадрата частоты переменного тока и объёма позволяет изменять вносимую индуктивность в широком диапазоне значений.

Оценки, проведённые для существующих проводников и полупроводников, указывают на то, что больших значений индуктивности можно добиться на низких частотах для материалов с малым удельным сопротивлением и малых значений индуктивности – на СВЧ и КВЧ для материалов с большим удельным сопротивлением.

3.2. Учёт влияния магнитных свойств токов Фуко и омических потерь на значение вносимой индуктивности цилиндра

В разделе 3.1 исследованы индуктивные свойства проводящего цилиндра с азимутальной напряжённостью вихревого электрического поля. Ниже предлагается обобщение результатов раздела 3.1 на случай наличия омических потерь в системе. Проводится анализ влияния магнитных полей токов Фуко на величину вносимой индуктивности. Исследуется проблема получения больших индуктивностей в малом объёме на низких частотах в цилиндрических плёнках.

3.2.1. Физико-математическая модель расчёта

Предположим, что сплошной проводящий немагнитный цилиндр находится во внешнем однородном переменном магнитном поле, направленном по оси z , $\vec{B} = (0, 0, B_z)$. Его зависимость во времени имеет вид

$$B_z = B_0 \cos \omega t, \quad (3.51)$$

где $B_0 = \text{const}$ не зависит от цилиндрических координат системы и ограничено в радиальном направлении внешним радиусом цилиндра R , а в аксиальном направлении произвольной высотой цилиндра, обозначенной через h .

При такой ориентации переменное магнитное поле, как и в разделе 1, порождает в цилиндре вихревое электрическое поле, напряжённость которого $\vec{E} = (0, E_\varphi, 0)$ также имеет одну компоненту.

Компоненты полей связаны между собой первым уравнением Максвелла, записанным в проекциях

$$(\text{rot} \vec{E})_z = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (3.52)$$

Полагая в (3.52), что фаза вихревого электрического поля совпадает по фазе со скоростью изменения магнитного поля

$$E_\varphi = E_0(r) \sin \omega t, \quad (3.53)$$

из уравнения (3.53) получим уравнение, связывающее $E_0(r)$ и B_0

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_0) = \omega B_0. \quad (3.54)$$

Его решение для $E_0(r)$ имеет вид

$$E_0(r) = \omega B_0 r / 2 + C_1 / r. \quad (3.55)$$

В решении (3.55) избавимся от особенности при $r \rightarrow 0$, полагая $C_1 = 0$. Из (3.55) видно, что азимутальная компонента вектора напряжённости вихревого электрического поля – линейная функция радиуса r с масштабом

$$E_* = \omega B_0 R / 2 = \pi f B_0 R. \quad (3.56)$$

В масштабе напряжённости учтено соотношение $\omega = 2\pi f$. Тогда (3.55) с учётом (3.56) имеет вид

$$E_0(r) = E_* r / R \text{ при } 0 \leq r \leq R. \quad (3.57)$$

Вихревое электрическое поле в проводящем цилиндре создаёт вихревые токи Фуко, плотность тока которых имеет такое же направление в пространстве $\vec{j} = (0, j_\varphi, 0)$. Плотность токов Фуко рассчитывается из дифференциального закона Ома

$$j_\varphi = E_\varphi / \rho, \quad (3.58)$$

где ρ – удельное электрическое сопротивление проводящего цилиндра.

Из (3.58) видно, что плотность тока Фуко в однородной проводящей среде $\rho = \text{const}$ также является линейной функцией радиуса и также зависит от времени, как и E_φ

$$j_\varphi = j_0(r) \sin \omega t, \quad (3.59)$$

где $j_0(r)$ связано с масштабом плотности тока

$$j_* = \pi f B_0 R / \rho \quad (3.60)$$

соотношением

$$j_0(r) = j_* r / R. \quad (3.61)$$

Из соотношения (3.60) видно, что при прочих равных условиях масштаб тока может достигать больших значений на высоких частотах для проводящей среды с малым значением удельного сопротивления ρ . Это будет приводить к нагреву проводящего цилиндра на высокой частоте.

Удельная тепловая мощность, выделяемая в локальной области проводника при протекании токов Фуко, рассчитывается из закона Джоуля Ленца:

$$p_v = \rho j_\varphi^2 = p_* \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \omega t, \quad (3.62)$$

где

$$p_* = \rho j_*^2 = \pi^2 f^2 B_0^2 R^2 / \rho \quad (3.63)$$

– масштаб объёмной плотности тепловой мощности.

Как видно из (3.63), удельная мощность уже пропорциональна квадрату частоты и для проводящей среды с произвольным значением удельного сопротивления оказывается наиболее значительным на внешней границе цилиндра. Это может приводить к выгоранию его внешней боковой поверхности на высокой частоте.

Тепловая мощность, выделяемая во всём цилиндре, находится из (3.62)

$$P = \int_V p_v dv = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^R p_v(r, \varphi, z) r dz dr d\varphi = P_* \sin^2 \omega t, \quad (3.64)$$

где масштаб тепловой мощности имеет вид

$$P_* = p_* \pi R^2 h / 2 = \pi^3 f^2 B_0^2 R^4 h / (2\rho). \quad (3.65)$$

Вихревой ток, индуцированный во всём цилиндре, может быть получен из интегрирования потока

$$i = \int_S \vec{j} d\vec{s} = \int_0^h \int_0^R j_\varphi dr dz = i_* \sin \omega t, \quad (3.66)$$

где

$$i_* = j_* h R / 2 = \pi f B_0 h R^2 / (2\rho) \quad (3.67)$$

– масштаб индукционного тока. Заметим, что полученные результаты можно получить из соотношений, полученных в разделе 3.1, предельным переходом при $r_1 \rightarrow 0$.

3.2.2. Частичный учёт магнитных свойств токов Фуко

Вихревая плотность токов Фуко (3.59) создаёт в пространстве цилиндра собственное магнитное поле $\vec{B}_1$. Это магнитное поле отклика вещества для исходной ориентации вихревых токов в цилиндрической системе координат имеет две проекции B_{1r} и B_{1z} . Направление проекции B_{1z} во всех точках цилиндра противоположно внешнему магнитному полю B_0 . Предполагая, что компонента B_{1r} не зависит от координаты z , распределение собственного магнитного поля можно рассчитать из второго уравнения Максвелла, записанного в проекциях (частная производная компоненты B_{1r} по переменной z опущена):

$$(\text{rot } \vec{B}_1)_\varphi = -\frac{\partial B_{1z}}{\partial r} = \mu_0 j_\varphi. \quad (3.68)$$

Интегрируя (3.68) для начального условия $B_{1z}(0)$ с учётом (3.59), получим

$$B_{1z} = -B_{1*}(r/R)^2 \sin \omega t, \quad (3.69)$$

где

$$B_{1*} = \mu_0 j_* R / 2 \quad (3.70)$$

– масштаб индукции собственного магнитного поля. Его можно связать с индукцией внешнего магнитного поля безразмерным параметром β

$$B_{1*} = \beta B_0, \quad (3.71)$$

который указывает на влияние магнетизма токов Фуко

$$\beta = \frac{\mu_0 \pi R^2 f}{2\rho} = \frac{f}{f_*}, \quad (3.72)$$

где

$$f_* = 2\rho / (\mu_0 \pi R^2) \quad (3.73)$$

– масштаб частоты системы. Из (3.72) видно, что магнетизм слабо проявляет себя при $\beta \rightarrow 0$ и его влияние велико на высоких частотах, когда $\beta \gg 1$. При значении $\beta=1$ масштабы индукций магнитных полей одинаковы.

Поскольку современные материалы от проводников до собственных полупроводников имеют удельное сопротивление, изменяющееся в диапазоне $15,5 \text{ нОм} \cdot \text{м} < \rho < 2,3 \text{ кОм} \cdot \text{м}$, то формула для расчёта масштаба частоты (3.73) даёт широкие возможности для её изменения.

В таблице 3.5 приведены значения масштаба частоты для восьми проводящих материалов.

Т а б л и ц а 3.5

**Масштаб частоты для материалов
с различным удельным сопротивлением
для радиуса цилиндра $R=2$ мм**

Материал	Удельное сопротивление (Ом·м)	Масштаб частоты f^* , Гц
Медь	$15,5 \cdot 10^{-9}$	$1,96 \cdot 10^3$
Вольфрам	$48,9 \cdot 10^{-9}$	$16,2 \cdot 10^3$
Никель	$61,4 \cdot 10^{-9}$	$7,78 \cdot 10^3$
Латунь (марг.)	$2,12 \cdot 10^{-7}$	$26,9 \cdot 10^3$
Нихром	$1,0 \cdot 10^{-6}$	$1,27 \cdot 10^5$
KEF (кремний электронный)	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$1,27 \cdot 10^8$
Германий	0,47	$5,95 \cdot 10^{10}$
Кремний	$2,3 \cdot 10^3$	$2,91 \cdot 10^{14}$

Как видно из таблицы 3.5, масштаб частот современных материалов лежит в широком диапазоне частот от $2 \cdot 10^3$ до $3 \cdot 10^{14}$ Гц.

3.2.3. Энергетический баланс системы

Средняя за период T изменения поля магнитная энергия, поступающая в цилиндр, находится из интегрирования

$$\langle W \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{V_0} \frac{(\vec{B})^2}{2\mu_0} dV dt, \quad (3.74)$$

где результирующая индукция магнитного поля системы

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1. \quad (3.75)$$

Тогда $\langle W \rangle$ состоит из двух слагаемых: средней за период энергии внешнего поля

$$\langle W_0 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^R \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{B_0^2}{2\mu_0} r d\varphi dr dz dt = \frac{B_0^2 \pi R^2 h}{4\mu_0} \quad (3.76)$$

и средней энергии собственного магнитного поля

$$\langle W_1 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^R \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{B_1^2 r^4}{2\mu_0 R^4} r d\varphi dr dz dt = \frac{B_0^2 \pi R^2 h \beta^2}{4\mu_0 3}. \quad (3.77)$$

Интегрирование за период скалярного произведения $2\vec{B}_0 \vec{B}_1$ обращается в нуль из-за наличия фазового сдвига $\pi/2$ между индукциями B_1 и B_0 . В связи с этим между переменными полями B_1 и B_0 возникает своеобразная интерференция, которая и суммирует обе энергии

$$\langle W \rangle = \langle W_0 \rangle + \langle W_1 \rangle. \quad (3.78)$$

Вносимая за период магнитная энергия (3.78) расходуется на нагрев проводящего цилиндра W_q и ту часть энергии, которая запасается в индуктивность системы

$$\langle W \rangle = W_q + L \langle i^2 \rangle / 2. \quad (3.79)$$

Заметим, что в соотношении (3.529) не учтена магнитная энергия, которая поставляется в систему радиальной компонентой магнитного поля отклика вещества B_{1r} . Её влияние на процессы дополнительной генерации энергии магнитного поля будут учтены в следующем разделе.

Тепловая энергия, расходуемая на нагрев цилиндра за период, вычисляется интегрированием по времени (3.64)

$$W_q = \int_0^T P dt = \frac{P_*}{2f} = 2\pi\beta < W_0 >. \quad (3.80)$$

Среднее за период значение квадрата тока найдём из (3.66)

$$< i^2 > = i_*^2 / 2. \quad (3.81)$$

3.2.4. Индуктивные свойства сплошного немагнитного цилиндра

Подставляя в (3.78) и (3.79) вычисленные энергии, получим для приведённой индуктивности цилиндра соотношение

$$\frac{L}{L_*} = (1 + \beta^2 / 3 - 2\pi\beta) / \beta^2, \quad (3.82)$$

где

$$L_* = \mu_0 \pi R^2 / h \quad (3.83)$$

– масштаб индуктивности, который может принимать большие значения для аксиально тонких плёнок при выполнении условия $h/R \ll 1$. Как видно из (3.83), масштаб индуктивности снова связан с геометрическими характеристиками исследуемой системы.

Как видно из (3.82), индуктивность проводящего цилиндра обращается в нуль на двух характеристических частотах F_1 и F_2 ($F_1 < F_2$):

$$\frac{F_1}{f_*} = \beta_1 = 3\pi \left(1 - \sqrt{1 - 1/(3\pi^2)} \right) \approx 0,1605. \quad (3.84)$$

$$\frac{F_2}{f_*} = \beta_2 = 3\pi \left(1 + \sqrt{1 - 1/(3\pi^2)} \right) \approx 18,69. \quad (3.85)$$

Нули индуктивности делят весь частотный интервал на три части: низкочастотный (выполнено условие $0 < \beta < \beta_1$), в котором индуктивность принимает положительные значения; среднечастотный, в котором индуктивность принимает отрицательные значения (выполнено условие $\beta_1 < \beta < \beta_2$), и высокочастотный, в котором она снова принимает положительное значение (выполнено условие $\beta_2 < \beta < \infty$).

Как видно из (3.82), в низкочастотном диапазоне индуктивность при $\beta \rightarrow 0$ (магнетизм токов Фуко проявляет парамагнитные свойства и омические потери небольшие) может принимать положительные, большие, по сравнению с масштабом, значения, зависящие от частоты по закону

$$L / L_* \sim \beta^{-2}. \quad (3.86)$$

Этот результат представляет интерес для создания больших индуктивностей на низких частотах в малом объеме. При $\beta \ll 1$ формула (3.86) переходит в формулу (3.38) при $r_I = 0$

$$L = 4\rho^2 / (\mu_0 v^2 V) \quad (3.87)$$

и определяет пределы применимости полученных в ней результатов.

3.2.5. Оценки вносимой индуктивности цилиндра в низкочастотной области

Исследуем возможности увеличения индуктивности в низкочастотной области за счёт уменьшения частоты переменного поля f .

Сплошной цилиндр из марганцовистой латуни будет иметь положительную индуктивность ($\rho = 2,12 \cdot 10^{-7}$ Ом·м) при геометрических размерах $R = 2$ мм, $h = 1$ см (выполнено условие $h/R > 1$). Масштаб частоты $f_* = 2,69 \cdot 10^4$ Гц. Масштаб индуктивности $L_* = 1,58$ нГн. Первый нуль индуктивности находится на первой характеристической частоте $F_1 = 0,1605 f_* = 4,3$ кГц. В таблице 3.6 приведём значения индуктивности цилиндра, которые могут быть реализованы на частотах меньших первой характеристической частоты в целое число раз.

Т а б л и ц а 3.6

Зависимость индуктивности от частоты для условия $h/R > 1$

F (частота)	L/L_*	L (микроренри)
$F_1/2$	77,3	0,122
$F_1/3$	232	0,366
$F_1/4$	464	0,734
$F_1/5$	775	1,22
$F_1/6$	$1,16 \cdot 10^3$	1,84
$F_1/7$	$1,63 \cdot 10^3$	2,57
$F_1/8$	$2,17 \cdot 10^3$	3,43
$F_1/9$	$2,80 \cdot 10^3$	4,41
$F_1/10$	$3,49 \cdot 10^3$	5,51

Как видно из табл. 3.6, увеличение индуктивности за счёт уменьшения омических потерь и влияния магнитных свойств токов Фуко может быть в 45 раз больше в диапазоне изменения частоты переменного магнитного поля от 0,43 до 2,15 кГц.

Сделаем оценки индуктивности, представляющие интерес для планарных технологий, при выполнении условия $h/R \ll 1$. Для тонкой плёнки $h = 1$ мкм и радиусом $R = 1$ см, выполненной из электронного кремния (см. табл. 3.7), имеем: масштаб частоты $f_* = 5,07 \cdot 10^{10}$ Гц. Масштаб индуктивности $L_* = 39,5$ нГн. Первый нуль индуктивности находится на первой характеристической частоте $F_1 = 0,1605 f_* = 8,14$ ГГц. В табл. 3.7 приведём значения индуктивности цилиндра, которые могут быть реализованы на частотах меньших первой характеристической частоты в целое число раз в диапазоне от 0,81 до 4,07 ГГц.

Т а б л и ц а 3.7

Зависимость индуктивности от частоты для условия $h/R \ll 1$

F (частота)	L/L_*	L (микроренри)
$F_1/2$	77,3	3,05
$F_1/3$	232	9,17
$F_1/4$	464	18,4
$F_1/5$	775	30,6
$F_1/6$	$1,16 \cdot 10^3$	45,9
$F_1/7$	$1,63 \cdot 10^3$	64,3
$F_1/8$	$2,17 \cdot 10^3$	85,7
$F_1/9$	$2,80 \cdot 10^3$	110
$F_1/10$	$3,49 \cdot 10^3$	138

Применение плёнки из того же материала с той же толщиной, но радиусом в 1 см даёт масштаб частоты $f_*=5,07 \cdot 10^6$ Гц. Масштаб индуктивности $L_*=0,39$ мГн. Первый нуль индуктивности находится на первой характеристической частоте $F_1=0,1605f_*=0,81$ МГц. Значения индуктивности изменяются в диапазоне от 30 мГн до 1,4 Гн в интервале изменения частоты от 81 кгц до 0,4 МГц.

3.2.6. Оценки отрицательной вносимой индуктивности в среднечастотной области

На рис. 3.11 представлена частотная зависимость индуктивности, рассчитанная по соотношению (3.82). Пределы изменения частоты выбраны так, чтобы вносимая индуктивность изменялась в пределах десяти масштабов индуктивности в положительную и отрицательную сторону.

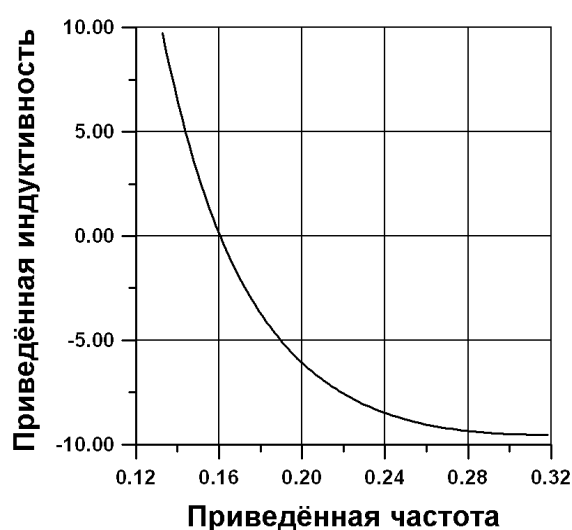


Рис. 3.11. Зависимость приведённой индуктивности от приведённой частоты

Как видно из рис. 3.11, индуктивность обращается в нуль на первой характеристической частоте.

Проведём расчёты минимального значения отрицательной индуктивности. Минимальное значение индуктивности $L_{\min}$ приходится на значение приведённой частоты $\beta_0 = 1/\pi$. Отрицательное значение индуктивности связано с проявлением диамагнетизма токов Фуко и впервые наблюдалось в работах [8,4].

В таблице 3.8 приведены минимальные значения отрицательной индуктивности $-L_{\min}$, которые можно реализовать на медной цилиндрической плёнке толщиной $h=2$ мкм. При этом радиус плёнки R изменялся от 10 до 100 мкм. В эту же таблицу сведены основные масштабы исследуемых величин, а также частоты $f_{\min}$, на которых реализуются эти параметры.

Т а б л и ц а 3.8

**Зависимость минимального значения индуктивности
от радиуса медной плёнки**

R (мкм)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
L_* (нГн)	0,197	0,790	1,78	3,16	4,93	7,11	9,67	12,6	16,0	19,7
$f_{\min}$ (МГц)	25,0	6,25	2,78	1,56	1,0	0,69	0,51	0,39	0,31	0,25
$-L_{\min}$ (нГн)	1,88	7,53	16,9	30,1	47,1	67,8	92,3	121	153	188
ρ_L (МГн/м ³)	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0

Из табл. 3.8 видно, что при изменении радиуса медной плёнки от 10 до 100 мкм её рабочая частота изменяется в диапазоне от 25 МГц до 250 кГц. При таких значениях радиуса удаётся получить минимальное значение отрицательной индуктивности, лежащее в диапазоне от 2 до 188 нГн. При этом для всех радиусов реализуется постоянная объёмная плотность индуктивности с достаточно большим значением 3,0 МГн/м³. Причина постоянства объёмной плотности заключается в том, что она определяется только квадратом толщины плёнки. При расчёте таблицы 3.8 толщина плёнки не изменялась. Её увеличение в 4 раза приведёт к уменьшению объёмной плотности индуктивности в 16 раз.

В табл. 3.9 приведены те же самые расчёты, но для микроплёнки, выполненной из углеродистой латуни.

Т а б л и ц а 3.9

**Зависимость минимального значения индуктивности
от радиуса плёнки из углеродистой латуни**

R , мкм	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
L_* , нГн	0,197	0,790	1,78	3,16	4,93	7,11	9,67	12,6	16,0	19,7
$f_{\min}$, МГц	342	85,5	38,0	21,4	13,7	9,5	6,9	5,3	4,2	3,4
$-L_{\min}$, нГн	1,88	7,53	16,9	30,1	47,1	67,8	92,3	121	153	188

Из табл. 3.9 видно, что при изменении радиуса плёнки из углеродистой латуни от 10 до 100 мкм её рабочая частота изменяется уже в диапазоне от 342 до 3,4 МГц. При таких значениях радиуса удаётся получить такое же минимальное значение отрицательной индуктивности, лежащее в диапазоне от 2 до 188 нГн. При этом для всех радиусов также реализуется постоянная объёмная плотность индуктивности со значением $3,0 \text{ МГн/м}^3$.

В табл. 3.10 приведены такие же расчёты для микронной плёнки, выполненной из электронного кремния.

Т а б л и ц а 3.10

Зависимость минимального значения индуктивности от радиуса плёнки из электронного кремния

R (мкм)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
L_* (нГн)	0,197	0,790	1,78	3,16	4,93	7,11	9,67	12,6	16,0	19,7
$f_{\min}$ (Гц)	1610	403	179	101	64,5	44,8	32,9	25,2	19,9	16,1
$-L_{\min}$ (нГн)	1,88	7,53	16,9	30,1	47,1	67,8	92,3	121	153	188

Как видно из табл. 3.10, достигаемый диапазон изменения минимальной индуктивности остался тем же самым, а рабочие частоты лежат уже в диапазоне от 16,1 до 1610 ГГц.

3.2.7. Оценки вносимой индуктивности в крайне высокочастотной области

Отличительным свойством вносимой индуктивности является то, что на очень высоких частотах она становится снова положительной, перестаёт зависеть от частоты и не имеет частоты среза. В этой области частот токи Фуко снова проявляют свои парамагнитные свойства. Крайне высокие частоты определяются параметром приведённой частоты (3.72). При выполнении условия $f_{\text{КВЧ}} \geq 20f_*$ частоту можно считать принадлежащей диапазону КВЧ. Она будет зависеть от удельного сопротивления металла, из которого она сделана.

При выполнении этого условия сама индуктивность (3.82) уже зависит только от геометрических размеров

$$L = \mu_0 \pi R^2 / (3h).$$

В табл. 3.11 представлены вычисления, проведённые по последнему соотношению для плёнок с микронным радиусом и одинаковой толщиной $h=2$ мкм на КВЧ.

Т а б л и ц а 3.11

Зависимость вносимой индуктивности на КВЧ от радиуса плёнки

R , мкм	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
L^* , нГн	0,197	0,790	1,78	3,16	4,93	7,11	9,67	12,6	16,0	19,7
$L_{\text{КВЧ}}$, нГн	0,066	0,263	0,592	1,05	1,64	2,37	3,22	4,21	5,33	6,58
$f_{\text{КВЧ}}$, ГГц, медь	1,57	0,39	0,18	0,098	0,063	0,044	0,032	0,025	0,019	0,016
$f_{\text{КВЧ}}$, ГГц, латунь	21,5	5,37	2,39	1,34	0,86	0,59	0,44	0,34	0,27	0,22
$f_{\text{КВЧ}}$, ТГц, кремний	101	25,3	11,3	6,33	4,05	2,81	2,07	1,58	1,25	1,01
ρ_L , МГн/м ³	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

Как видно из табл. 3.11, индуктивность на КВЧ зависит от частоты и удельного сопротивления материала. А масштаб индуктивности и само значение индуктивности зависят только от геометрических размеров цилиндрической плёнки (3.88). Важнейшей особенностью для управления таким значением индуктивности остаётся изменение геометрических размеров самой плёнки. Уменьшение её толщины будет приводить к росту рассчитанных значений индуктивности.

3.2.8. Полный учёт магнитных свойств токов Фуко и их влияние на частотную зависимость индуктивности

В разделе 3.1 был проведён частичный учёт магнитных свойств токов Фуко. Он заключался в том, что вихревая плотность токов Фуко создаёт в пространстве цилиндра собственное магнитное поле отклика вещества. Это магнитное поле в цилиндрической системе координат имеет две проекции B_{1r} и B_{1z} . Действие проекции B_{1z} было учтено полностью, а исследование влияния проекции индукции магнитного поля B_{1r} было опущено. Создаётся впечатление, что учёт влияния проекции B_{1r} представляет интерес только для полых проводящих цилиндров или плёнок.

Проведём полный учёт магнитных свойств токов Фуко для сплошного цилиндра или плёнки. Для этого введём обозначения: $B_{1r}=B_2$ – радиальная компонента индукции, а $B_{1z}=B_1$ – аксиальная компонента индукции. Тогда индукция магнитного поля, возникающая в цилиндре, определяется в его каждой точке суперпозицией индукций трёх полей

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \quad (3.88)$$

векторы которых в каждой точке цилиндра ортогональны (см. рис. 3.12).

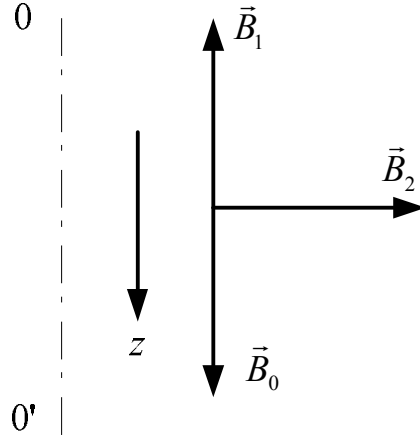


Рис. 3.12. Расположение векторов магнитной индукции исходного поля и полей отклика относительно оси цилиндра $00'$

В связи с этим, уравнение (3.68) перепишем в виде

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{\partial B_2}{\partial z} - \frac{\partial B_1}{\partial r} = \mu_0 j_\varphi. \quad (3.89)$$

Считая, что все поля системы зависят только от радиуса r , а $\partial / \partial z = 0$, приходим к уравнению (3.68), из которого можно рассчитать радиальное распределение индукции магнитного поля B_1

$$B_1 = -B_{1*}(r/R)^2 \sin \omega t, \quad (3.90)$$

где масштаб индукции B_{1*} определён в (3.70). При этом связь B_1 с B_0 не изменяется и описывается (3.71) с учётом (3.73).

Радиальная компонента $B_2(r)$ не может быть определена из системы записанных уравнений. Будем считать её неизвестной функцией, но учтём её относительный вклад в энергию магнитного поля системы в качестве ещё одного независимого параметра.

Тогда средняя за период T магнитная энергия, поступающая в цилиндр (3.74), может быть представлена в виде трёх слагаемых

$$\langle W \rangle = \langle W_0 \rangle + \langle W_1 \rangle + \langle W_2 \rangle, \quad (3.91)$$

где первое и второе слагаемое определены в (3.76) и (3.77), а последнее слагаемое представляет собой неизвестную функцию, имеющую вид

$$\langle W_2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi R} \int_0^h \int_0^T \int_0^{2\pi} \frac{B_2^2}{2\mu_0} r d\varphi dr dz dt. \quad (3.92)$$

Заметим, что при вычислении интеграла (3.74) возникают перекрёстные слагаемые

$$B^2 = B_0^2 + B_1^2 + B_2^2 + 2\vec{B}_0\vec{B}_1 + 2\vec{B}_2\vec{B}_1 + 2\vec{B}_0\vec{B}_2. \quad (3.93)$$

Последние три обращаются в нуль по разным причинам: пятое слагаемое за счёт ортогональности векторов B_1 и B_2 (см. рис. 3.11); четвёртое и шестое слагаемые – за счёт сдвига фаз по времени на $\pi/2$.

Считая вклад усреднённого значения $\langle W_2 \rangle$ конечным, запишем энергетический баланс в системе в виде (сравни с (3.79))

$$\frac{B_0^2 \pi R^2 h}{4\mu_0} + \frac{B_{1*}^2 \pi R^2 h}{12\mu_0} + \frac{1}{4\mu_0} \int_V B_2^2 dV = W_q + \frac{L \langle i^2 \rangle}{2}. \quad (3.94)$$

Подставляя в (3.94) вычисленные значения энергии, получим новую частотную зависимость приведённой индуктивности цилиндра, которая зависит от относительного энергетического вклада радиальной компоненты

$$1 + \beta^2 / 3 + \alpha = 2\pi\beta + \beta^2 \frac{L}{L_*}, \quad (3.95)$$

где второй независимый параметр системы α

$$\alpha = \int_V B_2^2 dV / (B_0^2 \pi R^2 h) \quad (3.96)$$

есть относительный положительный вклад радиальной компоненты в индуктивность сплошного проводящего цилиндра.

Как видно из (3.95), этот вклад приводит к изменению положения характеристических частот F_1 и F_2 индуктивности сплошного цилиндра. Положение первого корня зависит от параметра α по закону

$$\beta_1 = 3\pi - \sqrt{9\pi^2 - 3(1 + \alpha)}, \quad (3.97)$$

а положение второго корня

$$\beta_2 = 3\pi + \sqrt{9\pi^2 - 3(1 + \alpha)}. \quad (3.98)$$

Нуль дискриминанта уравнения (3.95) указывает на то, что при равенстве

$$\alpha = \alpha_0 = 3\pi^2 - 1 \quad (3.99)$$

корни частотной зависимости равны друг другу, а индуктивность проводящего цилиндра в этой точке обращается в нуль.

Это приводит к тому, что при небольшом относительном вкладе радиальной компоненты в магнитную энергию цилиндра (параметр α изменяется в области $0 < \alpha < \alpha_0 = 28,6088132$) есть частоты, на которых индуктивность может принимать отрицательные значения. А при выполнении неравенства $\alpha > \alpha_0$ (вклад радиальной компоненты в магнитную энергию цилиндра велик) у частотной зависимости индуктивности корней нет, а индуктивность цилиндра положительна для любых частот.

В табл. 3.12 дана зависимость приведённых характеристических частот индуктивности (3.84) и (3.85) от параметра α .

Т а б л и ц а 3.12

**Зависимость корней частотной зависимости индуктивности
от параметра α**

α	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
β_1	0,160	0,660	1,189	1,755	2,366	3,035	3,783	4,647	5,706	7,228
β_2	18,69	18,19	17,66	17,09	16,48	15,81	15,06	14,20	13,14	11,62

Из табл. 3.12 видно, что с ростом α корни частотной зависимости приближаются друг к другу. Это уменьшает частотный интервал, в котором индуктивность проводящего цилиндра может принимать отрицательные значения.

Поскольку значение параметра α неизвестно, то можно предложить способ его определения из экспериментальных данных при наличии участка с отрицательной индуктивностью. Для этого измерения частотной зависимости индуктивности проводят так, чтобы выяснить местоположения нулей. Полученные значения частот, при которых индуктивность проводящего цилиндра обращается в нуль, относят к масштабу частоты (3.73). По полученным значениям корней β_1 и β_2 определяют пригодность предложенного метода, проверяя связь

$$\beta_1 + \beta_2 = 6\pi. \quad (3.100)$$

Если значение суммы корней (3.100) близко к 6π , то можно вычислять параметр α , а стало быть, и неизвестный вклад радиальной компоненты из соотношения

$$\alpha = 1 - 3\pi^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2 / 12. \quad (3.101)$$

Результаты раздела опубликованы в работах [23–26].

Выводы по разделу 3.2.

Предложен аналитический метод расчёта индуктивных свойств сплошного проводящего немагнитного цилиндра произвольной высоты и радиуса с азимутальной плотностью вихревого тока при наличии омических потерь и магнитных свойств токов Фуко.

Получены радиальные распределения азимутальной компоненты напряжённости вихревого электрического поля, плотности токов Фуко и удельной тепловой мощности, выделяемой в локальной области проводящего цилиндра.

Из энергетических соображений получена формула для вычисления вносимой индуктивности сплошного проводящего цилиндра.

Показано, что вносимая динамическая индуктивность проводящего цилиндра обращается в нуль для двух характеристических частот F_1 и F_2 .

Нули индуктивности делят интервал частот на три части: низкочастотный, среднечастотный и высокочастотный.

Парамагнитные свойства токов Фуко проявляют себя в низкочастотном и высокочастотном интервалах, а в среднечастотном интервале проявляются диамагнитные свойства токов Фуко.

В связи с этим на низких и высоких частотах индуктивность проводящего цилиндра принимает положительные значения, а на средних частотах индуктивность отрицательна.

Показано, что вносимая индуктивность зависит от частоты и имеет большие абсолютные значения в диапазоне низких частот.

Оценки, проведённые для латунного цилиндра в диапазоне низких частот, при выполнении условия $h/R > 1$ указывают на то, что большие положительные значения индуктивности латуни на уровне 1 мкГн, отличающиеся в 45 раз, можно добиться в интервале частот от 0,43 до 2,15 кГц.

Оценки, проведённые для плёнки из электронного кремния в диапазоне низких частот, при выполнении условия $h/R \ll 1$ указывают на то, что большие значения индуктивности на уровне 50 мкГн, отличающиеся в 45 раз, можно добиться в интервале частот от 0,81 до 4,07 ГГц.

В среднечастотном диапазоне для проводящих и полупроводящих плёнок толщиной 2 мкм при изменении их радиуса в диапазоне от 10 мкм до 100 мкм удаётся получить диапазон отрицательных индуктивностей от -2 до -190 нГн, с большим значением объёмной плотности индуктивности $3,0 \text{ МГн/м}^3$.

В диапазоне КВЧ вносимая индуктивность снова становится положительной. Индуктивность на КВЧ зависит от частоты и удельного сопротивления материала. А масштаб индуктивности и само значение индуктивности зависят только от геометрических размеров цилиндрической плёнки. При изменении радиуса плёнки в диапазоне от 10 до 100 мкм для толщины плёнки 2 мкм можно получить значения индуктивностей от 0,07 до 6,6 нГн. Важнейшей особенностью для управления таким значением индуктивности остаётся толщина плёнки. Уменьшение её значений будет приводить к росту рассчитанных значений индуктивности.

Учёт полного влияния магнитных свойств токов Фуко приводит к тому, что характеристические частоты системы могут зависеть от относительного вклада в магнитную энергию цилиндра радиальной компоненты магнитного поля отклика вещества.

При малом относительном вкладе радиальной компоненты ($\alpha < \alpha_0$) на частотной зависимости индуктивности всегда есть область, в которой она принимает отрицательные значения.

При большом относительном вкладе радиальной компоненты ($\alpha > \alpha_0$) возможно отсутствие области с отрицательными значениями индуктивности.

Предложен метод измерений частотной зависимости индуктивности, имеющей отрицательную область, по которой можно определить относительный вклад радиальной компоненты в общее поле системы.

Одним из существенных недостатков предлагаемой физико-математической модели вносимой (динамической) индуктивности является тот факт, что на сверхнизких частотах, по сравнению с масштабом частоты, индуктивность имеет неустранимую особенность.

Физические причины этого заключаются в том, что на сверхнизких частотах индуцированный за счёт электромагнитной индукции квадрат токов Фуко оказывается пропорционален квадрату частоты. Поскольку динамическая индуктивность есть коэффициент пропорциональности между энергией магнитного поля и квадратом тока, то поэтому в конечное соотношение для индуктивности входит квадрат частоты в знаменателе. Когда квадрат частоты идёт в нуль, то потери на нагрев в системе становятся малыми, магнетизм становится слабым, а энергия магнитного поля, закачиваемого в систему, остаётся постоянной величиной, совпадающей с энергией магнитного поля, запасённого в индуктивности. Из-за этого стремление тока к нулю даёт нефизическое увеличение индуктивности, которое описывается особенностью, обратно пропорциональной квадрату частоты.

Существование особенности индуктивности не позволяет переходить динамической индуктивности в статическую индуктивность на сверхнизких частотах.

Может показаться, что особенность позволит получать большие, по сравнению с масштабом, индуктивности на сверхнизких частотах. При выполнении оценочных расчётов рекомендуется ограничиваться 10–20 масштабами как в положительной низкочастотной области, так и в среднечастотной отрицательной области.

Наличие особенности индуктивности на сверхнизких частотах указывает на достоинство предлагаемого метода. Он может быть применён для расчёта микроскопических индуктивностей в интервале высоких, сверхвысоких и крайне высоких частот, который начинается с частоты порядка 100 МГц.

Экспериментальные исследования поведения модели на сверхнизких частотах реальных вносимых индуктивностей цилиндрической пленки позволит ввести ограничения на значения нижней частоты среза, существующей в модели, ниже которой теория будет сильно расходиться с экспериментом.

3.3. Поточковая частотно-независимая токовихревая индуктивность проводящей плёнки

Как показывают эксперименты, проведённые американскими исследователями в [4], и наши эксперименты, вынесенные в разделы 7.3 и 7.6, помимо динамической индуктивности, рассмотренной в разделе 3.2, возможны ещё два состояния токовихревой индуктивности. Она может быть частотно-независимой в определённом диапазоне частот и принимать как положительные, так и отрицательные значения. В этих состояниях снова проявляются как слабо ферромагнитные, так и сильно диамагнитные свойства токов Фуко.

Предположим, что сплошная проводящая немагнитная цилиндрическая плёнка находится, как и ранее, во внешнем однородном переменном магнитном поле, направленном по оси z , и имеет только одну компоненту $\vec{B} = (0, 0, B_z)$. Это внешнее для плёнки магнитное поле имеет ту же зависимость от времени, что и ранее

$$B_z = B_0 \cos \omega t. \quad (3.102)$$

Для простоты предполагаем, что однородное в пространстве магнитное поле $B_0 = \text{const}$ не зависит от цилиндрических координат системы и ограничено в радиальном направлении внешним радиусом цилиндра R , а в аксиальном направлении произвольной высотой цилиндра, обозначенной через h .

На рис. 3.13 указаны направления векторов и силовых линий внешнего переменного магнитного поля относительно оси плёнки. Показаны направления азимутальной компоненты вектора плотности тока Фуко, имеющей единственную компоненту j_ϕ , для некоторого момента времени.

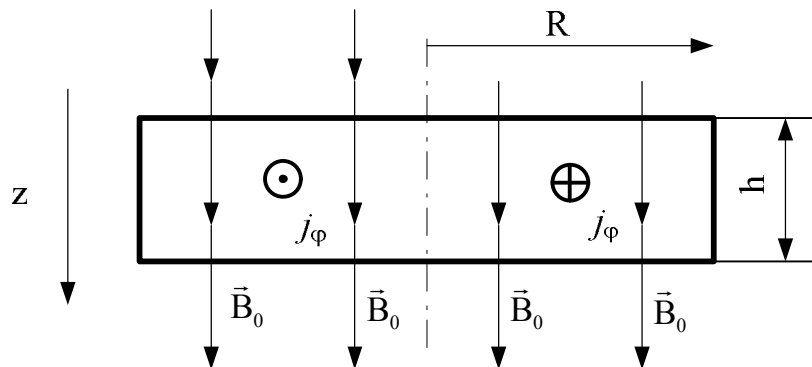


Рис. 3.13. Направление в пространстве основных векторов задачи

При такой ориентации переменное магнитное поле будет порождать в цилиндрической плёнке вихревое электрическое поле, напряжённость которого $\vec{E} = (0, E_\varphi, 0)$ имеет только одну компоненту (см. раздел 3.1.1). Компоненты полей связаны между собой первым уравнением Максвелла, записанным в цилиндрической системе координат (r, φ, z)

$$\sigma(\text{rot}\vec{E})_z = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad (3.103)$$

где $\sigma = \pm 1$ – уточняющий знаковый множитель. Это уточнение включает в себя две возможные ориентации ротора вихревого электрического поля по отношению к исходному направлению вектора B_0 . Как показывают эксперименты, проведённые американскими технологами [4], значение $\sigma = -1$ возникает в плёнках с толщиной десятки и сотни нанометров. В таких сверхтонких плёнках токи Фуко формируют частотно-независимую положительную индуктивность, проявляя свои неожиданные слабо ферромагнитные свойства. Этот эффект проявляет себя только в проводящих наноразмерных плёнках.

Значение $\sigma = +1$ реализуется при протекании токов Фуко в проводящих цилиндрах в макроскопических масштабах, когда проявляются их сильные диамагнитные свойства. Высоты проводящих цилиндров при этом должны быть больше радиуса и значительно больше 1 мкм. Такие значения величин преобразуют плёнку в цилиндр, токи Фуко которого обычно всегда сильно диамагнитны.

Полагая в (3.103), что

$$\sigma E_\varphi = E_0(r) \sin \omega t, \quad (3.104)$$

из уравнения (3.104) получим уравнение, связывающее $E_0(r)$ и B_0

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma E_0) = \omega B_0. \quad (3.105)$$

Его решение для $E_0(r)$ имеет вид

$$\sigma E_0(r) = \omega B_0 r / 2 + C_1 / r. \quad (3.106)$$

В решении (3.106) избавимся от особенности при $r \rightarrow 0$, полагая произвольную постоянную $C_1 = 0$. Это условие приводит к тому, что при $B_0 = 0$ $E_0 = 0$. Из (3.103) видно, что азимутальная компонента вектора напряжённости вихревого электрического поля – линейная функция радиуса r с масштабом

$$E_* = \omega B_0 R / 2 = \pi f B_0 R. \quad (3.107)$$

В масштабе напряжённости учтено соотношение $\omega = 2\pi f$. Тогда (3.106) с учётом (3.107) имеет вид

$$E_0(r) = \sigma E_* r / R \text{ при } 0 \leq r \leq R. \quad (3.108)$$

Электрическое поле в проводящем цилиндре создаёт вихревые токи Фуко, плотность тока которых имеет такое же направление в пространстве $\vec{j} = (0, j_\varphi, 0)$. Плотность токов Фуко рассчитывается из дифференциального закона Ома

$$j_\varphi = E_\varphi / \rho, \quad (3.109)$$

где ρ – удельное электрическое сопротивление проводящей плёнки.

Из (3.109) видно, что плотность тока Фуко в однородной проводящей среде $\rho = \text{const}$ также является линейной функцией радиуса и также зависит от времени, как и E_φ

$$j_\varphi = \sigma j_0(r) \sin \omega t, \quad (3.110)$$

где $j_0(r)$ связано с масштабом плотности тока

$$j_* = \pi f B_0 R / \rho \quad (3.111)$$

соотношением

$$j_0(r) = j_* r / R. \quad (3.112)$$

Из соотношения (3.111) видно, что при прочих равных условиях масштаб плотности тока может достигать больших значений на высоких частотах для проводящей среды с малым значением удельного сопротивления ρ . Это будет приводить к нагреву проводящей плёнки на высокой частоте.

Вихревой ток, индуцированный во всей плёнке, может быть получен из интегрирования плотности тока в цилиндрических координатах

$$i = \int_S \vec{j} d\vec{s} = \int_0^h \int_0^R j_\varphi r dr dz = i_* \sin \omega t, \quad (3.113)$$

$$\text{где} \quad i_* = j_* h R / 2 = \pi f B_0 h R^2 / (2\rho) \quad (3.114)$$

– масштаб индукционного тока.

Амплитуда электродвижущей силы, возникающей в пространстве цилиндра (плёнки) для фиксированного значения σ , зависит квадратично от локального значения радиуса r

$$\varepsilon(r) = \oint_l \vec{E} d\vec{l} = \int_0^{2\pi} E_\varphi r d\varphi = 2\pi r E_\varphi = 2\pi E_* r^2 / R. \quad (3.115)$$

А средняя по радиусу амплитуда электродвижущей силы имеет вид

$$\varepsilon_{cp} = \frac{1}{R} \int_0^R \varepsilon(r) dr = 2\pi R E_* / 3. \quad (3.116)$$

Среднее омическое сопротивление проводящей плёнки переменному вихревому току не зависит от времени

$$R_{омич} \sim \varepsilon_{cp}(t) / i = \varepsilon_{cp} / i_* = 4\pi\rho / 3h = 4\pi\rho_{кв} / 3. \quad (3.117)$$

Этим сопротивлением обладает цилиндр (плёнка) на любой частоте и при любых значениях переменного тока (для линейного режима протекания). С точностью до постоянной величины оно совпадает с омическим сопротивлением квадрата. Соотношения (3.115–3.117) получены в [31].

Плотность вихревых токов Фуко (3.110) создаёт в пространстве цилиндра собственное магнитное поле $\vec{B}_1$. Это магнитное поле отклика вещества на внешнее воздействие для исходной ориентации вихревых токов в цилиндрической системе координат имеет одну проекцию B_{1z} . Направление проекции B_{1z} во всех точках цилиндра противоположно внешнему магнитному полю B_0 . В этом и заключается основная причина диамагнетизма, проявляемого токами Фуко. Но как показано ниже, исключительно важную роль играют фазовые соотношения между взаимодействующими полями.

Распределение магнитного поля отклика вещества можно рассчитать из второго уравнения Максвелла, записанного в проекциях:

$$(\text{rot } \vec{B}_1)_\varphi = -\frac{\partial B_{1z}}{\partial r} = \mu_0 j_\varphi. \quad (3.118)$$

Интегрируя (3.118) для начального условия $B_{1z}(0)$ с учётом (3.110), получим

$$B_{1z} = -\sigma B_{1*} (r/R)^2 \sin \omega t, \quad (3.119)$$

где

$$B_{1*} = \mu_0 j_* R / 2 \quad (3.120)$$

масштаб индукции магнитного поля отклика вещества. Так же как и ранее, его можно связать с индукцией внешнего магнитного поля безразмерным параметром β

$$B_{1*} = \beta B_0, \quad (3.121)$$

который указывает на влияние магнетизма токов Фуко

$$\beta = \frac{\mu_0 \pi R^2 f}{2\rho} = \frac{f}{f_*}, \quad (3.122)$$

где

$$f_* = 2\rho / (\mu_0 \pi R^2) \quad (3.123)$$

– масштаб частоты системы. Из (3.122) видно, что магнетизм токов Фуко слабо проявляет себя при $\beta \rightarrow 0$ и его влияние велико на высоких частотах, когда $\beta \gg 1$. При значении $\beta=1$ масштабы индукций магнитных полей одинаковы. Как видно из (3.123), масштаб частоты системы не зависит от толщины цилиндрической плёнки.

Исследуем индуктивные свойства токовихревой плёнки, усреднённые по времени. Найдём её потоковую индуктивность из соотношения

$$\langle \Phi \rangle = L_\Phi \langle i \rangle, \quad (3.124)$$

где под $\langle \Phi \rangle$ будем понимать суммарный средний за полупериод поток, пересекающий проводящую плёнку, который формируется внешним переменным магнитным полем B_0 и магнитным полем отклика вещества B_1 . Под значением $\langle i \rangle$ будем понимать среднее значение переменного тока

одного направления за полупериод. Тогда коэффициент пропорциональности между ними L_Φ будет играть роль средней потоковой индуктивности.

Поток внешнего переменного однородного магнитного поля имеет вид

$$\Phi_0 = B_0 \pi R^2 \cos \omega t, \quad (3.125)$$

а поток переменного неоднородного магнитного поля отклика вещества вычисляется из соотношения

$$\Phi_1 = \int_s \vec{B}_1 d\vec{s} = -\sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R B_{1*} \sin \omega t \frac{r^3}{R^2} dr = -\frac{\sigma \pi R^2}{2} B_{1*} \sin \omega t. \quad (3.126)$$

Из (3.126) видна важная роль фазового множителя σ , который может принимать два различных значения.

Среднее значение суммарного потока за полупериод имеет вид

$$\langle \Phi \rangle = \langle \Phi_0 \rangle + \langle \Phi_1 \rangle, \quad (3.127)$$

где

$$\langle \Phi_0 \rangle = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} B_0 \pi R^2 \cos \omega t dt = 0, \quad (3.128)$$

а

$$\langle \Phi_1 \rangle = -\frac{2\sigma}{T} \int_0^{T/2} B_{1*} \pi R^2 \sin \omega t dt / 2 = -\sigma R^2 B_{1*}. \quad (3.129)$$

Из (3.128), (3.129) видно, что средний поток внешнего поля за полупериод всегда обращается в нуль, а среднее значение потока поля отклика может быть как положительным, так и отрицательным.

Подставляя (3.128) и (3.129) в (3.127) с учётом связи (3.124), получим

$$L_\Phi = \langle \Phi \rangle / \langle i \rangle = -\frac{\sigma \pi R^2 B_{1*}}{2i_*} = \pm \frac{\mu_0 \pi R^2}{2h}. \quad (3.130)$$

Из (3.130) следует, что средняя за полупериод индуктивность планарного токового слоя зависит только от геометрических размеров плёнки, но не зависит от частоты и может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Её значение в два раза меньше, чем масштаб динамической индуктивности, и определяется геометрическими размерами плёнки.

Как показывают эксперименты (см. гл. 7), величины R и h соответствуют геометрическим размерам одиночного элементарного токового вихря, который возбуждается в проводящей плёнке. При соотношении $h < R$ толщина цилиндрической плёнки будет совпадать с толщиной одиночного элементарного токового вихря только для случая, когда толщина плёнки меньше одного микрона. При этих условиях реализуется положительная частотно-независимая потоковая индуктивность, а вихревые токи Фуко проявляют свои неожиданные слабо ферромагнитные свойства.

Причина этого в том, что в этом случае $\sigma = -1$ вихревые токи Фуко создают магнитное поле отклика, которое в течение полупериода направлено по оси z и создаёт положительное значение для усреднённого потока. Направления полей B_0 и B_1 в этом случае на первой и второй четверти периода указаны на рис. 3.14. На рисунке ток i_0 – ток, текущий в токовом кольце и создающий внешнее для плёнки поле B_0 .

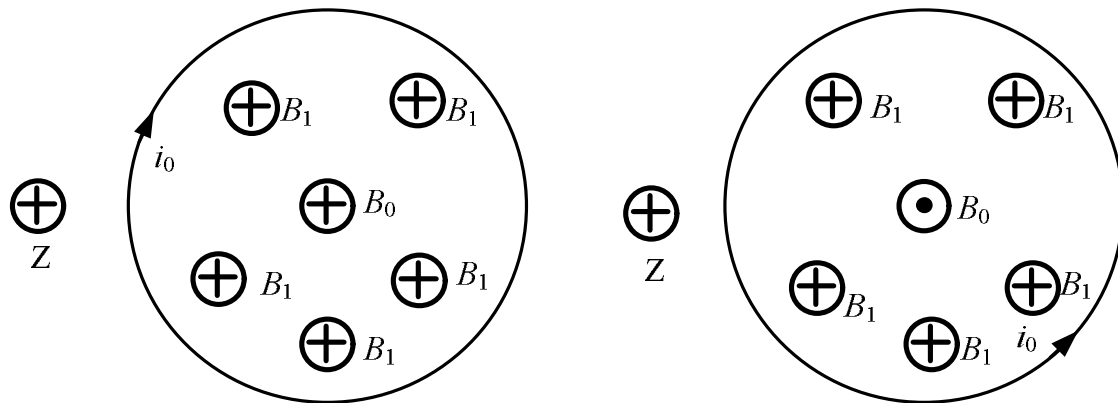


Рис. 3.14. Направления полей B_0 и B_1 при $dB_0 / dt < 0, \sigma = -1$ для двух ориентаций вектора B_0 для первой и второй четверти периода (слабо ферромагнитные свойства токов Фуко)

На втором полупериоде величина потоковой индуктивности (3.130) остаётся прежней по причине того, что поток индукционного поля B_1 и вихревой ток изменяют свои значения на противоположные.

Если $h > 1$ мкм и условие $h < R$ не выполнено (возникает проводящий цилиндр), то возможны случаи, когда проводящий цилиндр находится либо в состоянии отрицательной частотно-независимой индуктивности (токи Фуко проявляют свои сильно диамагнитные свойства в макроскопических масштабах), либо в состоянии частотно-зависимой динамической индуктивности, которая обращается в нуль на двух характеристических частотах (см. раздел 3.2.4).

Причины появления отрицательной частотно-независимой индуктивности в случае $\sigma = +1$ заключаются в том, что вихревые токи Фуко создают магнитное поле отклика, которое в течение полупериода направлено против оси z . Это создаёт отрицательное значение для усреднённого потока. Направления полей B_0 и B_1 в этом случае на первой и второй четверти периода указаны на рис. 3.15. На рисунке ток i_0 – ток, текущий в токовом кольце и создающий внешнее для плёнки поле B_0 .

На втором полупериоде величина потоковой индуктивности (3.130) остаётся прежней по причине того, что поток индукционного поля B_1 и вихревой ток изменяют свои значения на противоположные.

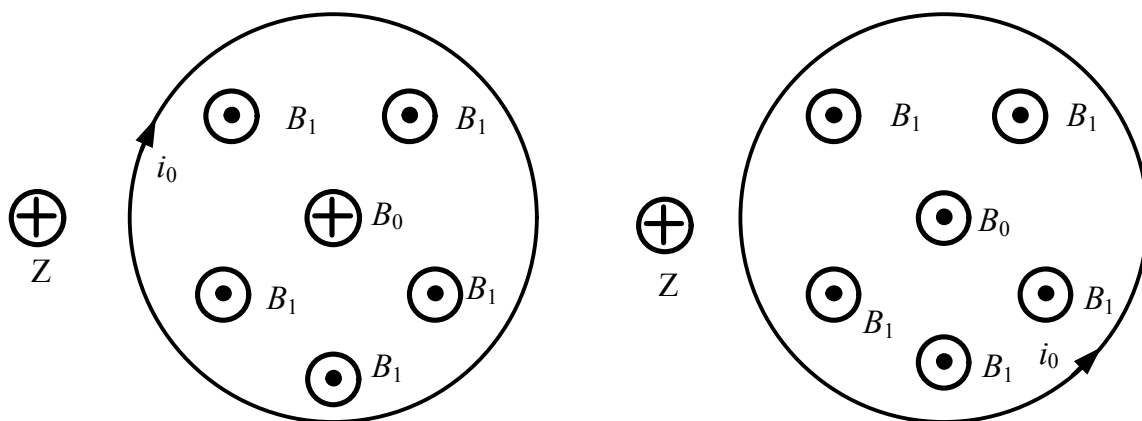


Рис. 3.15. Направления полей B_0 и B_1 при $dB_0 / dt < 0, \sigma = +1$ для двух ориентаций вектора B_0 для первой и второй четверти периода (сильно диамагнитные свойства токов Фуко)

В современных чипах приемлемым значением интегральной индуктивности является значение 10 нГн. В таблице 3.13 приведены значения толщины плёнки в нанометрах и соответствующий радиус в микрометрах, который даёт фиксированное значение индуктивности плёнки в 10 нГн.

Т а б л и ц а 3.13

Геометрические размеры плёнки для индуктивности 10 нГн

h (нм)	50	100	150	200	250
R (мкм)	16	23	28	32	36
h (нм)	300	350	400	450	500
R (мкм)	39	42	45	48	50

Расчёты для толщины плёнки больше 500 нм не приводятся по причине того, что одиночный элементарный токовый вихрь, который возбуждается в проводящей плёнке, в таком случае может оказаться нестабильным и перейти в другое частотно-зависимое состояние динамической индуктивности.

Частотный диапазон работы такой плёнки определяется из масштаба частоты (3.123). Он не зависит от толщины плёнки и лежит в пределах

$$0,1f_* < f < 10f_*. \quad (3.131)$$

Таблица 3.13 указывает на возможность дальнейшего уменьшения площади, занимаемой интегральной индуктивностью. Такое уменьшение может привести к достижению предельных значений поверхностной плотности индуктивности вплоть до $9,8 \text{ Гн/м}^2$.

Выводы по разделу 3.3

В разделе 3.3 рассмотрены ещё два состояния, в которых может пребывать токовихревая индуктивность с азимутальной плотностью тока. Эти состояния отличаются двумя возможными ориентациями ротора вихревого электрического поля по отношению к направлению однородного магнитного поля B_0 и фазовыми соотношениями.

В связи с этим для решения поставленной задачи требуется применять модифицированное первое уравнение Максвелла, в котором предусмотрено две ориентации ротора вихревого электрического поля по отношению к направлению магнитного поля. Две ориентации вихревого поля и отличают два вида магнитных состояний токов Фуко: сильно диамагнитное и слабо ферромагнитное.

Показано, что при наноскопических размерах толщины цилиндрической плёнки она может давать положительную индуктивность, проявляя слабо ферромагнитные свойства токов Фуко.

При наличии наноразмерного эффекта реализуется частотно-независимая положительная индуктивность в диапазоне частот, который определяется проводящими свойствами плёнки.

При макроскопических размерах плёнка, преобразованная в проводящий цилиндр с азимутальным направлением плотности тока, может находиться в сильно диамагнитном состоянии токов Фуко.

В этом состоянии проводящий цилиндр даёт отрицательные значения частотно-независимой индуктивности в диапазоне частот, который также определяется проводящими свойствами цилиндра.

4. ИНДУКТИВНЫЕ СВОЙСТВА ЛЕНТОЧНЫХ МИКРОСОЛЕНОИДОВ И СПОСОБ УВЕЛИЧЕНИЯ ИХ ГРАНИЧНОЙ ЧАСТОТЫ

Уменьшение размеров элементов интегральных микросхем породило проблему создания на плате высокочастотной интегральной индуктивности приемлемых значений. Применение технологии создания мощных ленточных соленоидов микронных размеров в выходных каскадах, предложенное фирмой *PARC*, (Palo Alto Research Centre, Калифорния), позволило получать работоспособные индуктивности с высокой добротностью до частот 8 ГГц [5]. Соленоиды имеют малое число витков (от 3–6), выполнены из сплава *Mo-Cr*, покрытого внутри золотой плёнкой.

4.1. Индуктивные свойства ленточных микросоленоидов

Для таких индуктивностей существует метод расчёта, ставший классическим. Он излагается на протяжении 70 лет в различных учебниках по физике и радиотехнике. Из метода следует два физических результата: 1) индуктивность соленоида при постоянном числе витков на единицу длины можно увеличить только за счёт роста объёма соленоида; 2) индуктивность соленоида увеличивается квадратично с увеличением количества витков.

Приведём этот вывод и исследуем неожиданные физические следствия, которые были не замечены уже неизвестными авторами классического метода расчёта. В его основу положены следующие соображения. На цилиндрическую катушку радиусом R наматывается в один слой плотно друг к другу N витков провода кругового сечения диаметром d . На рис. 4.1 приводится схема намотки и геометрические размеры соленоида.

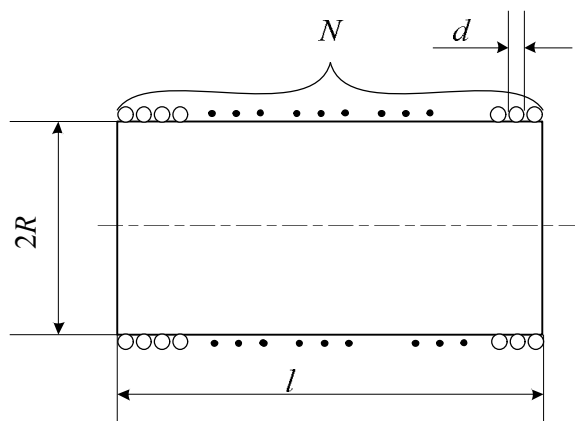


Рис. 4.1. Схема намотки и геометрические размеры соленоида

При протекании тока внутри соленоида формируется среднее значение магнитной индукции, которое вычисляется из соотношения

$$B = \mu_0 Ni / l = \mu_0 i / d = \mu_0 j_l, \quad (4.1)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; i – ток в соленоиде; l – его длина.

В случае ленточного соленоида d – аксиальная ширина ленты. Заметим, что значение индукции B в (4.1) определяется только линейной плотностью тока соленоида j_l . Записывая формулу для потокосцепления

$$\Psi = N\Phi = NBS = \mu_0 NSj_l, \quad (4.2)$$

получаем индуктивность соленоида L в виде

$$L = \mu_0 V / d^2 = \mu_0 n^2 V. \quad (4.3)$$

В (4.3) введены обозначения $V = Sl$ – объём соленоида, $n = N/l$ – число витков на единицу длины соленоида. Из (4.3) следует отмеченный ранее физический результат. Формулу (4.3) можно представить и в другом виде

$$L = \mu_0 N^2 S^2 / V, \quad (4.4)$$

из которой следует, что при постоянных N и S индуктивность можно увеличить только за счёт уменьшения объёма соленоида. Этот, на первый взгляд, парадокс обескураживает исследователя индуктивности.

Почему соотношения (4.3) и (4.4) противоречат друг другу? Причина этого в том, что при решении поставленной задачи не был выделен масштаб индуктивности L_* . Он и снимает обнаруженное противоречие. Выделим его в соотношении (4.3)

$$L_* = \mu_0 \pi R, \quad (4.5)$$

где R – радиус соленоида. Из (4.5) видно, что масштаб индуктивности соленоидальной катушки – геометрическая величина. Тогда (4.3) и (4.4) могут быть сведены к одному и тому же каноническому виду

$$\frac{L}{L_*} = N \frac{R}{d}. \quad (4.6)$$

В рассматриваемом случае индуктивность определена соотношением

$$\Psi = Li. \quad (4.7)$$

Подставляя (4.6) в (4.7), получим ещё одно каноническое соотношение для приведённого потока

$$\frac{\Psi}{\Psi_*} = N \frac{R}{d}, \quad (4.8)$$

где $\Psi_* = L_* i$ – масштаб потокосцепления.

4.2. Эталонная индуктивность и индуктивности с малыми и большими потокосцеплениями

Из канонических соотношений следуют выводы:

1) приведённая индуктивность L/L_* – линейная, а не квадратичная функция от числа витков N ;

2) тангенс угла наклона прямой R/d определяет своеобразную скорость набора индуктивности и приведённого потока с ростом числа витков N ;

3) эталонная индуктивность L_{Σ} реализуется при единичном тангенсе $R=d$ и изменяется с ростом N по закону

$$L_e = L_* N. \quad (4.9)$$

Любопытно, но в [5] исследован именно этот класс ленточных соленоидов. Причина этого заключается в том, что технологам требовалось увеличить жёсткость микроскопической интегральной индуктивности при её расположении на плате;

4) для эталонной индуктивности поток (4.8) изменяется по похожему соотношению;

5) из (4.6) и (4.8) видно, что существуют два класса индуктивностей: класс индуктивностей с малым потокосцеплением (МП – индуктивность), у которых $R < d$ (тангенс угла наклона меньше 1) и класс индуктивностей с большим потокосцеплением (БП индуктивность), у которых $R > d$ (тангенс угла наклона больше 1);

6) для одного и того же числа витков N можно получить либо большую индуктивность, либо меньшую индуктивность, по сравнению с эталонной.

Чем же отличаются по физическим свойствам эти два класса индуктивностей? МП индуктивности имеют аксиальную ширину ленты d больше радиуса соленоида R . Но, чем шире лента, тем меньше значение линейной плотности тока j_l в (4.1), а стало быть, меньше значение индукции B и потокосцепления Ψ , по сравнению с эталонной, при том же токе i . Тогда уменьшение Ψ при том же токе приводит к уменьшению L .

БП индуктивности имеют аксиальную ширину ленты d меньше радиуса соленоида R . При том же токе это обеспечивает увеличение индукции B в соленоиде (потокосцепления), по сравнению с эталонной, за счёт увеличения линейной плотности тока j_l . Обычно наматываемые катушки индуктивности всегда удовлетворяют этому соотношению и являются индуктивностями с большими потоками.

Что происходит при этом с геометрическими характеристиками соленоида? Зафиксируем число витков N и площадь поперечного сечения соленоида S . Для МП соленоида длина, объём и индуктивность соленоида

$$l_1 = d_1 N, \quad V_1 = S N d_1, \quad L_1 = \mu_0 S l_1 / d_1^2. \quad (4.10)$$

То же самое для БП – соленоида

$$l_2 = d_2 N, \quad V_2 = S N d_2, \quad L_2 = \mu_0 S l_2 / d_2^2. \quad (4.11)$$

Отношение их индуктивностей

$$L_2 / L_1 = d_1 / d_2. \quad (4.12)$$

А отношение объёмов

$$V_2 / V_1 = d_2 / d_1 = L_1 / L_2 . \quad (4.13)$$

БП индуктивности могут иметь на порядок большие значения индуктивности, по сравнению с МП индуктивностью, если уменьшить на порядок аксиальную толщину ленты (диаметр провода) $d_2=d_1/10$, что обеспечивает уменьшение их объёма на порядок при том же числе витков и площади поперечного сечения соленоида. При этом не следует забывать, что уменьшение диаметра провода (ширины ленты) будет приводить к тому, что у такого соленоида будет увеличиваться обычная плотность тока. А он не может быть больше значений, ограниченных скоростью теплопередачи.

Таким же образом можно получать индуктивность в 10 раз больше, чем эталонная. Сделаем оценку для эталонной индуктивности ленточного соленоида с $N=6$ витков, радиусом $R=0,4$ мм; с аксиальной шириной $d=R$. Имеем масштаб $L_* = \mu_0 \pi R = 1,58$ нГн, а индуктивность $L=9,48$ нГн. Полученное значение с хорошей точностью согласуется с экспериментом для микрокатушки на кремниевой подложке с удельным сопротивлением $10 \dots 20$ Ом·см [5]. Измерения, сделанные для 4-6 витков, указывают на правильность предложенной физической трактовки полученных в разделе результатов.

Следует отметить, что все полученные теоретически соотношения были сделаны в приближении однородного магнитного поля бесконечного соленоида. Но тем не менее вычисление физических параметров индуктивности и для конечных соленоидов, имеющих от 4-6 витков, дают результаты, не сильно расходящиеся с измерениями.

4.3. Добротность и плотности индуктивности соленоида в микро- и наноразмерах

Вычислим добротность микросоленоида. Для этого необходимо рассчитать его омическое сопротивление. На рис. 4.2 представлена развёртка одного витка катушки. Считаем, что один виток имеет периметр $2\pi R$ и смещён по оси катушки на диаметр провода d . Такое предположение даёт возможность рассчитать омическое сопротивление соленоида только при выполнении предположения, что соленоид имеет БП-индуктивность, т.е. $d \ll R$.

Тогда длина одиночного витка провода

$$\ell_1 = \sqrt{(2\pi R)^2 + d^2} , \quad (4.14)$$

а длина N витков катушки

$$\ell_N = N \cdot \ell_1 = N \sqrt{(2\pi R)^2 + d^2} . \quad (4.15)$$

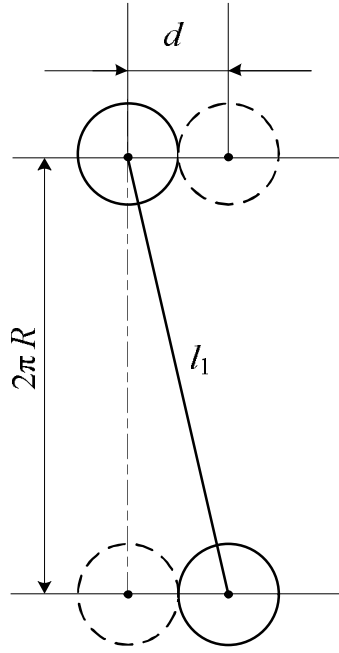


Рис. 4.2. Развёртка одного витка микросоленоида

Омическое сопротивление N витков соленоида имеет вид

$$R_N = \frac{4\rho \ell_N}{\pi d^2} = \frac{4\rho N}{\pi d^2} \sqrt{(2\pi R)^2 + d^2}, \quad (4.16)$$

где ρ – удельное сопротивление провода катушки.

Подставляя (4.16) в формулу добротности по определению и учитывая (4.6), получим

$$Q = \frac{\omega L}{R_N} = \frac{\omega}{\Omega_*}. \quad (4.17)$$

В соотношении (4.17)

$$\Omega_* = \frac{4\rho}{\mu_0 \pi R^2} \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi R}{d}\right)^2} \quad (4.18)$$

– характеристическая частота системы, которая не зависит от числа витков соленоида N .

В рассматриваемом предположении $d \ll R$ и (4.18) можно упростить

$$\Omega_* = \frac{4\rho}{\mu_0 d R}. \quad (4.19)$$

Характеристическая частота Ω_* определяет верхнее значение частоты ω , выше которой добротность соленоида Q будет больше 1. Из (4.19) видно, что при фиксированных ρ и R уменьшение диаметра провода будет приводить к повышению характеристической частоты и добиться больших значений добротности можно будет только на достаточно высоких частотах.

Поскольку при выводе (4.17) использовалось предположение постоянного тока, то соотношение (4.17) следует применять только для оценок добротности различных микросоленоидов на низких частотах.

Рассчитаем плотности индуктивности микросоленоида. Объёмная плотность индуктивности

$$\rho_L = \frac{L}{V} = \frac{\mu_0}{d^2} \quad (4.20)$$

зависит только от квадрата толщины применяемого провода d . Из (4.20) видно, что переход от микроразмеров к наноразмерам увеличивает рассчитываемое значение в огромное количество раз.

Поверхностная плотность индуктивности получается нормированием индуктивности на площадь $S = 2RNd$

$$\sigma_L = \frac{L}{S} = \rho_L \frac{\pi R}{2}. \quad (4.21)$$

Она оказывается связанной с объёмной плотностью индуктивности.

Линейную плотность индуктивности можно ввести для длинных соленоидов. Она получается нормированием индуктивности на длину соленоида $\ell = N \cdot d$

$$\tau_L = \frac{L}{\ell} = \rho_L \pi R^2. \quad (4.22)$$

Параметры (4.20), (4.21) и (4.22) являются важнейшими сравнительными технологическими параметрами микросоленоида. В табл. 4.1 размещены все основные параметры микросоленоида, который имел $N=10$ витков, $R=10d$ и был намотан медным проводом диаметром d . Табл. 4.1 рассчитана в микрометровом диапазоне размеров.

Т а б л и ц а 4.1

Параметры микросоленоида в микрометровом диапазоне

d (мкм)	ρ_L (Гн/м ³)	σ_L (Гн/м ²)	τ_L (мГн/м)	Ω_* (1/с)	L (мкГн)
400	7,85	0,05	0,395	$6,4 \cdot 10^4$	1,58
200	31,4	0,1	0,395	$2,6 \cdot 10^5$	0,79
100	126	0,2	0,395	$1,0 \cdot 10^6$	0,39
50	503	0,4	0,395	$4,0 \cdot 10^6$	0,19
20	$3,14 \cdot 10^3$	1,0	0,395	$2,6 \cdot 10^7$	0,08
10	$1,26 \cdot 10^4$	2,0	0,395	$1,0 \cdot 10^8$	0,04

Из табл. 4.1 видно, что в микрометровом диапазоне размеров при изменении диаметра медного провода от 10 до 400 мкм объёмная плотность индуктивности микрокатушки уменьшается от $1,26 \cdot 10^4$ до $7,85$ Гн/м³, поверхностная плотность уменьшается от 2,0 до 0,05 Гн/м², а линейная плотность индуктивности остаётся постоянной 0,395 мГн/м.

Это связано с тем, что было принято $R=10d$. Уменьшение диаметра провода приводит к росту характеристической частоты Ω_* от $6,4 \cdot 10^4$ до $1,0 \cdot 10^8$ 1/с и уменьшению индуктивности соленоида с 1,58 до 0,04 мкГн.

Рассчитанные параметры позволяют выбрать оптимальные значения геометрических размеров катушки и её индуктивности. Следует отметить, что выбор микрометрового диапазона ставит перед технологами задачу о получении катушек, у которых расстояние между витками было бы жёстко фиксированным.

В таблице 4.2 приведены параметры наносолоноида, который имел $N=10$ витков, $R=10d$ и был намотан медным проводом диаметром d . Диаметр провода изменялся в нанометрах.

Т а б л и ц а 4.2

Параметры микросолоноида в нанометровом диапазоне

d (нм)	ρ_L (МГн/м ³)	σ_L (Гн/м ²)	τ_L (мГн/м)	Ω_* (1/с)	L (нГн)
400	7,85	49,3	0,395	$6,4 \cdot 10^{10}$	1,6
200	31,4	98,7	0,395	$2,6 \cdot 10^{11}$	0,79
100	126	197	0,395	$1,0 \cdot 10^{12}$	0,39
50	503	395	0,395	$4,0 \cdot 10^{12}$	0,19
20	$3,14 \cdot 10^3$	987	0,395	$2,5 \cdot 10^{13}$	0,08
10	$12,6 \cdot 10^3$	$1,97 \cdot 10^3$	0,395	$1,0 \cdot 10^{14}$	0,04

Из табл. 4.2 видно, что для наноразмерного соленоида достигается огромная объёмная плотность индуктивности. Она может принимать значения от $12,6 \cdot 10^9$ Гн/м⁴. Причина этого – резкое уменьшение объёма наносолоноида. Это также уменьшает достижимое значение индуктивности. В рассчитанном диапазоне она изменяется от 0,04 до 1,6 нГн. Большим препятствием для создания таких катушек будут слишком высокие характеристические частоты, которые даже для размера $d=400$ нм уходят в область до 70 ГГц.

В настоящее время нанотехнологии уже освоили производство нанотрубок. Они обычно получаются в виде спиралей с нанодиаметром и наншагом спирали. Такие нанотрубки, по-видимому, будут играть роль индуктивных элементов только тогда, когда человечеству удастся освоить терагерцовый диапазон частот. При их производстве стоит исключительно сложная проблема подведения в них тока наноамперных масштабов и создание специфических условий для увеличения механической жёсткости применяемых спиралей.

4.4. О способе увеличения граничной частоты ленточного микросоленоида

Эксперименты, проведённые с ленточными соленоидами (микрокатушками) в [5] показывают, что измеряемая величина индуктивности не зависит от частоты практически до частоты отсечки (частоты среза, критической частоты). Это указывает на то, что вплоть до таких высоких частот на таких малых геометрических размерах фазовый сдвиг между током и потоком остаётся нулевым.

На рис. 4.3 приведены типичные экспериментальные частотные характеристики индуктивности микросоленоидов фирмы PARC, расположенных на подложке из высокоомного кремния для различного числа витков.

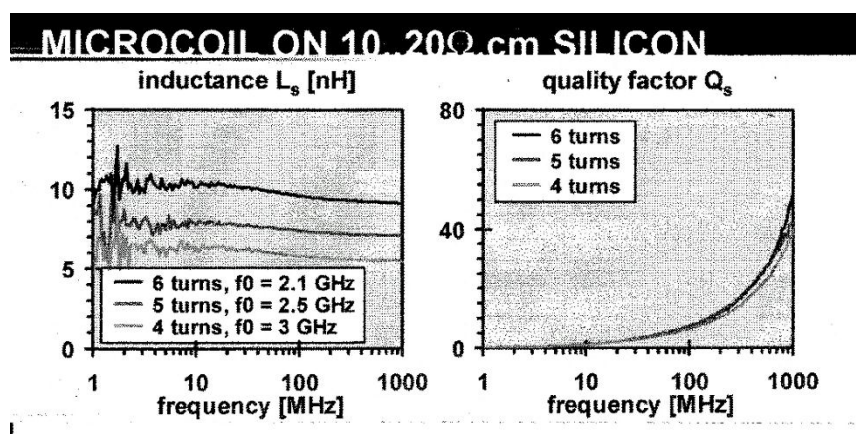


Рис. 4.3. Частотные характеристики индуктивности и добротности микросоленоидов фирмы PARC [5]

Из рис. 4.3 видно, что частота среза f_0 с уменьшением числа витков увеличивается: катушка с числом витков $N=6$ имеет частоту среза 2,1 ГГц, катушка с числом витков $N=5$ имеет частоту среза 2,5 ГГц, а катушка с $N=4$ имеет частоту среза 3 ГГц.

Отметим достаточно большую добротность исследуемых микросоленоидов и её нелинейную зависимость от частоты. Существенное отличие частотной зависимости добротности от теоретической линейной (4.17) можно объяснить тем, что все соотношения раздела 5 получены в предположении однородности распределения плотности тока по поперечному сечению проводника. А как теперь становится ясным, что в цилиндрических проводниках она радиально неоднородна, то рассмотренная модель требует своего дальнейшего уточнения.

Экспериментаторы отмечают изменение на 25 % как значения индуктивности и добротности катушек, которые размещаются на кремнии, либо на стекле, так и частоты среза. Это можно объяснить тем, что размещённые на разных проводящих и полупроводящих подложках катушки нагружают часть своих внешних силовых линий магнитного поля на проводящее и полупроводящее вещество. Это взаимодействие силовых линий с веществом и изменяет как значение индуктивности, так и частоту среза, повышая её.

Частотные зависимости на рис. 4.3 приведены для ленточных классических микросоленоидов диаметром 800 мкм длиной от 1,6 до 2,4 мм с количеством витков от четырёх до шести, используемых в мощных выходных каскадах. Как видно из рис. 4.3, в них всегда наблюдают одно и то же явление. На малых частотах индуктивность совпадает со своим статическим значением, оставаясь постоянной. Потом на низких частотах возникает дребезг индуктивности, который связан с механическим резонансом, возникающим на продольных механических колебаниях упругих витков катушки. Сами механические колебания обусловлены притяжением витков друг к другу из-за действия сонаправленных токов Ампера. Такое притяжение возникает на каждом полупериоде переменного тока. При дальнейшем увеличении частоты при приближении к частоте среза индуктивность увеличивается на порядок, а затем скачком теряет свои физические свойства.

Увеличение индуктивности свёрнутой ленты микросоленоида с ростом частоты можно объяснить только увеличением линейной плотности тока, протекающего в ленте. Это возможно только в том случае, если переменный ток в ленте образует тонкий шнур, диаметр которого становится меньше, чем продольная ширина ленты, свитой в соленоид. С приближением частоты тока к частоте среза токовый шнур «исчезает» и соленоид теряет свои индуктивные свойства.

Объяснить уменьшение диаметра токового шнура на СВЧ можно только на языке сил, удерживающих цилиндрический шнур. С ростом частоты внешний источник вбрасывает в проводник всё меньше и меньше одноимённых зарядов, образующих ток, за полупериод изменения последнего. Это снижает объёмную плотность кулоновских сил расталкивания, действующих между движущимися в одном направлении зарядами. В то же время объёмная плотность стягивающих (амперовских) сил либо не изменяется, либо уменьшается с частотой медленнее, чем силы кулоновского взаимодействия. Частота среза приходится на тот момент, когда шнур начинает катастрофически сжиматься в пинч. В этот момент зарегистрировано, что индуктивность одиночного индуктора резко возрастает, а затем проводник теряет свои индуктивные свойства.

Метод вносимой индуктивности, развитый в главе 3, является универсальным и сможет помочь ликвидировать в ленточных соленоидах «проблему частоты среза» [5]. Частотные зависимости индуктивности

ленточной микрокатушки фирмы PARC всегда имеют частоту, выше которой она теряет свои индуктивные свойства. Её называют частотой среза или граничной частотой.

На рис. 4.4. представлены теоретические частотные зависимости микрокатушки. Частота среза на рис. 4.4. изменяется от 0,75 до 2,2 ГГц.

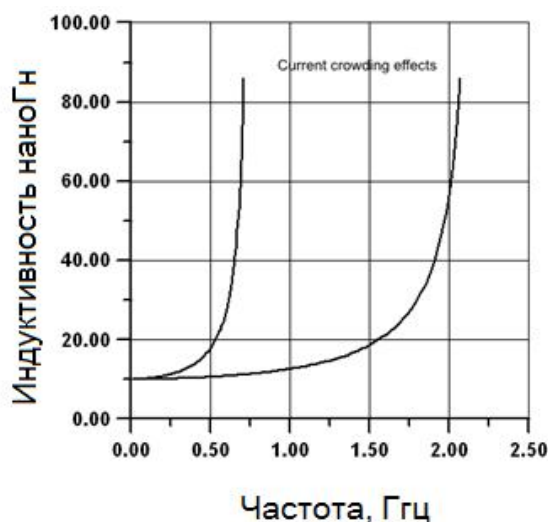


Рис. 4.4. Частоты среза 0,75 и 2,2 ГГц из-за Current Crowding Effects

Как теперь становится ясным, частота среза возникает из-за шнурования тока в Current Crowding Effects (эффекты уплотнения тока в цилиндрическом токовом шнуре). Расположение микрокатушки на кремниевой подложке (см. рис. 4.5), которая замыкает на себя часть внешних силовых линий магнитного поля, позволяет увеличить частоту среза с 0,75 до 2,2 ГГц, но не позволяет совсем избавиться от неё.

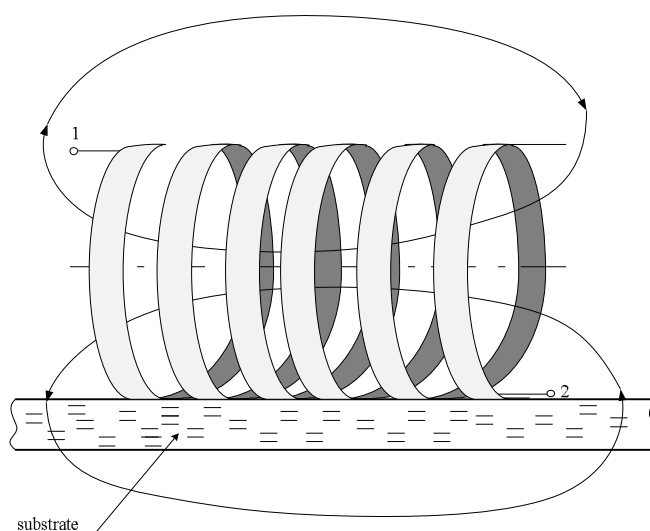


Рис. 4.5. Расположение микрокатушки на кремниевой подложке

Для того чтобы увеличить рабочий диапазон микрокатушки, необходимо вводить в соленоид перпендикулярно оси системы аксиально-тонкие плёнки различных проводников или полупроводников так, как это указано на рис. 4.6.

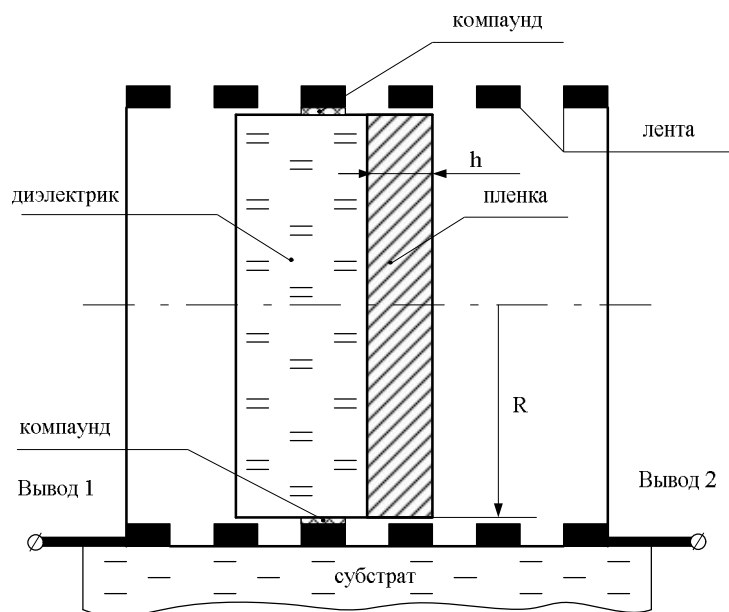


Рис. 4.6. Один из способов введения полупроводящей плёнки

Плёнку нужно напылить на торец цилиндрического диэлектрика. Его диаметр должен быть близок к диаметру соленоида. Введение проводящей плёнки изменит физический механизм формирования интегральной индуктивности ленточного соленоида, переведя его в класс вносимой индуктивности. Рассчитанные частотные характеристики индуктивности микросолеоида с плёнкой представлены на рис. 4.7.

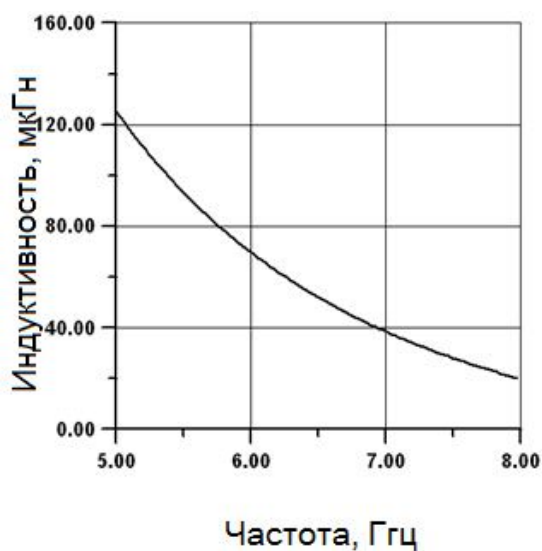


Рис. 4.7. Частотная зависимость кремниевой микроплёнки, вводимой в микросолеоид

Рассчитаем физические параметры цилиндрической плёнки из используемого фирмой PARC кремния (удельное сопротивление $10,0 \text{ ом}\cdot\text{см}$), в предположении малости вклада радиальной компоненты. Плёнку необходимо поместить в микрокатушку из шести витков с граничной частотой $2,1 \text{ ГГц}$ (см. рис. 4.3), имеющую индуктивность 10 нГн [5]. После внесения плёнки будет реализован первый нуль индуктивности на частоте $F_1=10^{10} \text{ Гц}$. Вычисляя масштаб частоты $f^*=F_1/0,1605=62,3 \text{ ГГц}$, определим, что радиус плёнки равен 900 мкм . Это потребует увеличить в $2,25$ раза радиус исходного соленоида. Для аксиальной толщины плёнки в 2 мкм мы получим масштаб индуктивности $L^*=1,6 \text{ мГн}$. На частоте $f=F_1/2=5 \text{ ГГц}$ такая плёнка внесёт очень большую индуктивность $L=77,3L^*=124 \text{ мГн}$. Её рабочая частота будет выше частоты среза в $2,3$ раза.

Если рабочая частота будет совпадать с $f_0=f^*/\pi=19,8 \text{ ГГц}$, то индуктивность плёнки будет принимать отрицательное значение $L=L_0=-15,3 \text{ мН}$. В этом случае она может применяться в качестве микроскопического компенсатора паразитной индуктивности последовательной цепи в интегральных микросхемах. Уменьшение её радиуса на порядок приведёт к уменьшению оценочных значений отрицательной индуктивности на два порядка. Эффект компенсации паразитной индуктивности в таких размерах может быть использован и в системах на кристалле.

На рабочей частоте $f=12 \text{ ТГц}$ значение индуктивности будет снова положительным $L_{\text{ЕНФ}}=L^*/3=533 \text{ нГн}$. Из приводимых оценок следует, что для разных рабочих частот можно получать широкий спектр возможных значений индуктивности на одной микрокатушке для широкого класса СВЧ применений.

По разделу 4 опубликованы работы [25–27].

Выводы по главе 4

Исследованы индуктивные свойства ленточных микросолеоидов. Получены канонические соотношения для приведённой индуктивности и приведённого потока.

Из канонических соотношений следует, что приведённая индуктивность линейная, а не квадратичная, как считалось раньше, функция от числа витков.

Отношение радиуса микросолеоида к диаметру провода (ширины ленты) определяет скорость набора индуктивности и приведённого потока с ростом его числа витков.

Эталонная индуктивность реализуется при равенстве радиуса микросолоноида диаметру провода (ширине ленты). Такие микрокатушки производит фирма *PARC*.

Существуют два класса индуктивностей: класс индуктивностей с малым потокосцеплением (МП индуктивность), у которых радиус микросолоноида меньше диаметра провода; и класс индуктивностей с большим потокосцеплением (БП индуктивность), у которых радиус микросолоноида больше диаметра провода (ширины ленты).

Для одного и того же числа витков N можно получить либо большую индуктивность, либо малую, по сравнению с эталонной. Большая индуктивность будет иметь меньший объём, чем малая индуктивность.

БП-индуктивности всегда больше по значению, чем МП индуктивности при одном и том же числе витков. Это происходит потому, что линейная плотность тока больше у БП-индуктивности.

Такое свойство индуктивности позволяет увеличивать на порядок индуктивность ленточных микрокатушек фирмы *PARC* уменьшением на порядок ширины используемой ленты. Уменьшение на порядок ширины ленты уменьшит на порядок высоту микрокатушки. Возникающую проблему уменьшения механической жёсткости витков катушки можно решить, используя различные компаундные заливки.

Получена оценочная формула для добротности микрокатушки. Из неё следует, что любая микрокатушка будет иметь добротность больше 1 при условии, что её рабочая частота будет больше характеристической, которая не зависит от числа витков соленоида.

Приведены и рассчитаны важнейшие технологические параметры: объёмная, поверхностная и линейная плотности индуктивности микросолоноидов. В микрометровом диапазоне изменения диаметра медного провода от 10 до 400 мкм при условии $R=10d$ перечисленные параметры изменяются в диапазонах: от $1,26 \cdot 10^4$ до $7,85$ Гн/м³; поверхностная плотность от 2,0 до 0,05 Гн/м²; линейная плотность индуктивности остаётся постоянной и равной 0,395 мГн/м. Уменьшение диаметра провода приводит к росту характеристической частоты от $6,4 \cdot 10^4$ до $1,0 \cdot 10^8$ 1/с, но уменьшает индуктивность микросолоноида с 1,58 до 0,04 мкГн.

Расчёты, приводимые для наноразмерных соленоидов, показывают, что объёмная плотность индуктивности может увеличиться до огромных значений $12,6 \cdot 10^9$ Гн/м³ при $d=10$ нм. Большим препятствием для создания наноразмерных катушек индуктивности будут слишком высокие характеристические частоты, которые даже для диаметра $d=400$ нм уходят

в область до 70 ГГц и указывают на то, что при таких размерах индуктивности будет очень трудно получать высокие добротности. При их производстве может стать исключительно сложная проблема подведения к нанотрубке наноамперных токов и создания условий для обеспечения требуемой механической жёсткости изделия.

Предложен способ ликвидации в ленточных соленоидах фирмы *PARC* проблемы частоты среза. Для этого необходимо вводить по оси микросолоноида цилиндрические полупроводящие микроскопические плёнки так, чтобы оси соленоида и плёнки совпадали.

Введение проводящей плёнки изменит физический механизм формирования интегральной индуктивности ленточного соленоида, переводя его в класс вносимой индуктивности, которая не имеет частоты среза.

Приведены частотные характеристики вносимой индуктивности и сделаны оценки физических параметров таких плёнок для ленточного микросолоноида диаметром 800 мкм, имеющего исходную индуктивность около 10 нГн.

Оценки показывают, что для аксиальной толщины кремниевой плёнки в 2 мкм мы получим масштаб индуктивности $L^*=1,6 \mu\text{Гн}$. На частоте $f=5 \text{ ГГц}$ такая плёнка внесёт очень большую индуктивность $L=77,3L^*=124 \mu\text{Гн}$ (что в 12400 раз больше исходной, а на КВЧ в 53,3 раза больше исходной без учёта индуктивности самого соленоида). Её рабочая частота в первом случае будет выше частоты среза в 2,3 раза.

5. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ ПЛАНАРНОГО ТОКОВОГО СЛОЯ ДЛЯ МИКРОННЫХ И НАНОТЕХНОЛОГИЙ

Современные индуктивности, входящие в СВЧ устройства, обычно проектируются в программных средах, предоставленных различными производителями. Но в расчётные модели симуляторов обычно не заложен учёт геометрии и толщины микрополоскового проводника, из которого сделана индуктивность. Это приводит к тому, что они дают отличающиеся значения и могут иметь сингулярные особенности на частотных характеристиках, которые не реализуются на практике.

Нами в разделах 1–4 были предложены физико-математические методы вычислений различных индуктивностей высокой симметрии. Они дали хорошее качественное совпадение с экспериментом до значений частоты среза. В современных индукторах с одним током она лежит в диапазоне 0,7–1,0 ГГц.

5.1. Индуктивность планарных токовых систем

В разделе 5.1 предложен метод расчёта индуктивности высокой симметрии, выполненной в виде планарной проводящей ленты, в которой протекает однородный токовый шнур. Получены выражения для плотности индуктивности и частотной зависимости добротности такого токового слоя.

5.1.1. Распределение магнитных полей однородного токового слоя

Пусть в пространстве находится уединённый однородный токовый слой. На рис. 5.1 указаны его геометрические размеры: l – длина, d – ширина, b – толщина, ориентация выбранной системы координат x, y, z и направление в пространстве вектора плотности тока $\vec{j}$. При решении задачи считается, что выполнены следующие соотношения между геометрическими размерами $b \ll d \ll l$ (приближение тонкой ленты).

Вектор однородной плотности тока $\vec{j}$ имеет только одну компоненту $(0, j_y, 0)$, направленную по оси y . Запишем основное уравнение магнитостатики для векторного потенциала

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (5.1)$$

где $\vec{A}$ – неоднородный векторный потенциал, который формируется распределением плотности тока $\vec{j}$, находящейся в правой части уравнения (5.1), а μ_0 – магнитная постоянная. Уравнение (5.1) получено для условия калибровки

$$\text{div} \vec{A} = 0. \quad (5.2)$$

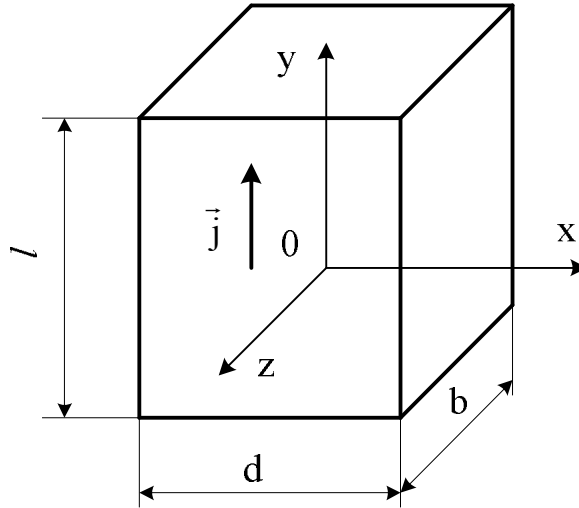


Рис. 5.1. Геометрические размеры уединённого токового слоя

Единственная компонента плотности тока j_y в задаче порождает единственную компоненту векторного потенциала $(0, A_y, 0)$ и $A_y = A_y(x)$. В связи с этим условие (5.2) выполняется автоматически, а зависимость $A_y(x)$ можно считать одномерной при выполнении приближения тонкой ленты

$$\nabla^2 A_y = \frac{d^2 A_y}{dx^2} = -\mu_0 j_y. \quad (5.3)$$

В этом приближении индукция магнитного поля $\vec{B}$ также имеет одну компоненту, направленную по оси z $(0, 0, B_z)$. Её распределение по оси x вычисляется из связи $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$, принимающей вид

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x}. \quad (5.4)$$

Уравнение (5.3) нужно решать для трёх областей: *I*, *II*, *III*, указанные на рис. 5.2, а решения сшивать на двух плоскостях $x = \pm d/2$. На рис. 5.2 показаны противоположные направления векторов $\vec{j}$ и $\vec{A}$.

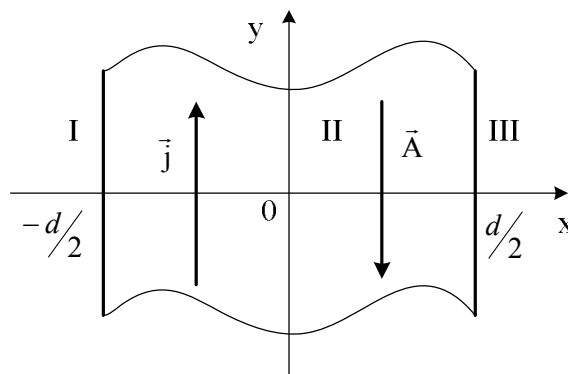


Рис. 5.2. Области интегрирования уравнения (5.3)

В такой постановке задачи уравнение (5.3) необходимо записать для трёх областей (индекс у векторного потенциала указывает номер области):

$$\frac{d^2 A_1}{dx^2} = 0, \text{ при } -\infty < x \leq -d/2, \quad (5.5)$$

$$\frac{d^2 A_2}{dx^2} = -\mu_0 j_0 \text{ при } -d/2 \leq x \leq d/2, \quad (5.6)$$

$$\frac{d^2 A_3}{dx^2} = 0, \text{ при } d/2 \leq x < \infty. \quad (5.7)$$

Нули в правых частях (5.5) и (5.7) указывают на отсутствие плотности тока в 1-й и 3-й областях. В правой части (5.6) предположено однородное распределение плотности тока $j_y = j_0 = \text{const}$ в области 2.

Выпишем решения уравнений (5.5), (5.6), (5.7) в соответствующих областях

$$\begin{aligned} A_1 &= c_1 x + c_2, \\ A_2 &= -\mu_0 j_0 x^2 / 2 + c_3 x + c_4, \\ A_3 &= c_5 x + c_6, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ – произвольные постоянные.

Из соотношений (5.8) получаем распределение магнитного поля в трёх областях

$$\begin{aligned} B_1(x) &= c_1 = \text{const}, \\ B_2(x) &= -\mu_0 j_0 x + c_3, \\ B_3(x) &= c_5 = \text{const}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Решение симметрично относительно начала координат для произвольных постоянных $c_3=c_4=0$. Для этих значений выполнено условие $A_2(0)=0$. Тогда из (5.9) видно, что магнитное поле плоского токового слоя однородно в областях 1 и 3 и линейно убывает в области 2 от значения $B_0 = \mu_0 j_0 d / 2$ при $x=-d/2$ до значения $-B_0$ при $x=d/2$, изменяя своё направление по оси z . Распределение магнитного поля представлено на рис. 5.3.

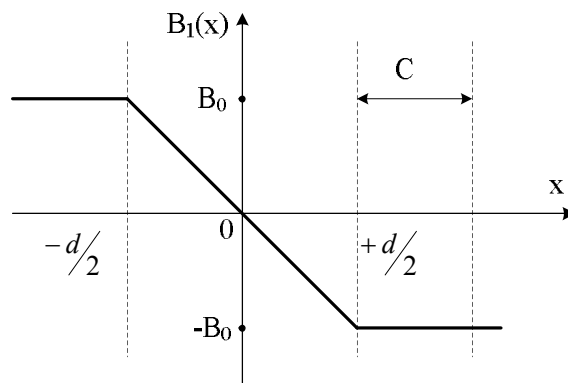


Рис. 5.3. Распределение магнитного поля в трёх областях по оси x

На границах $x = \pm d/2$ находим значения остающихся произвольных постоянных $c_1 = B_0 = -c_6$, $c_2 = d(B_0 - \mu_0 j_0 d/4)/2$, $c_5 = 2(B_0 - \mu_0 j_0 d^2/8)/d$ из уравнений (5.8) и (5.9).

5.1.2. Индуктивность плоского однородного токового слоя

Индуктивность токового слоя L находим из связи между током i и потоком Φ

$$\Phi = Li. \quad (5.10)$$

Для вычисления токовой части индуктивности необходимо рассчитать поток, создаваемый магнитным полем в полупространстве $0 \leq x \leq d/2$

$$\Phi_1 = \int_s \vec{B} d\vec{s} = \int_l dy \int_0^{d/2} B(x) dx = \mu_0 j_0 l d^2 / 8. \quad (5.11)$$

Полный магнитный поток, пересекающий ленту

$$\Phi = 2\Phi_1 = \mu_0 j_0 l d^2 / 4. \quad (5.12)$$

Подставляя (5.12) в (5.10) и учитывая что $i = j_0 s = j_0 db$, получим для токовой части погонной индуктивности

$$\frac{L_c}{l} = \frac{\mu_0 d}{4b}. \quad (5.13)$$

Из (5.13) видно важное свойство индуктивности: токовая часть погонной индуктивности планарного слоя зависит только от отношения ширины ленты d к её толщине b . Она не изменяет своего значения при уменьшении d и b в одинаковое количество раз. При отношении $d/b=10$ она в 10π раз больше, чем токовая часть погонной индуктивности сплошного цилиндрического проводника, имеющая значение 100 нГн/м (см. соотношение (2.17) в разделе 2.1.4). Это указывает на тот факт, что объёмная плотность индуктивности планарной токовой ленты будет самой большой, среди других возможных геометрий индукторов.

Аналогично рассчитывается потоковая часть индуктивности, которая порождается однородными магнитными полями в области 1 и области 3. Площадь, по которой вычисляется поток, ограничена по оси x значением c (см. рис. 5.3). В связи с этим параметр c назовём параметром обрезания поля.

$$L_n = 2B_0 l c / i = \mu_0 c / b. \quad (5.14)$$

Полное значение индуктивности токового слоя складывается из токовой и потоковой части

$$\frac{L}{l} = \frac{L_c}{l} + \frac{L_n}{l} = \frac{\mu_0 d}{4b} \left(1 + \frac{4c}{b} \right). \quad (5.15)$$

Значение параметра обрезания поля c будет зависеть от геометрических размеров токовой ленты и может быть определено экспериментально для проводников различной длины.

Как видно из (5.15), индуктивность планарного токового слоя есть чисто геометрическая величина, которая не зависит от материала проводящей ленты.

5.1.3. Объёмная плотность индуктивности планарного токового слоя

Объёмная плотность индуктивности ленточного тока имеет вид

$$\rho_L = L / V = L / (ls) = \frac{\mu_0}{4b^2} (1 + 4c / d) \quad (5.16)$$

и является важнейшим технологическим параметром интегральной индуктивности. Её самое малое значение при $c \rightarrow 0$ существенно зависит только от квадрата толщины токовой ленты. В табл. 5.1 приведены минимальные значения объёмной плотности и погонной индуктивности токовой ленты для различных d и b .

Т а б л и ц а 5.1

Минимальные значения индуктивности планарной токовой ленты

b (мкм)	d (мкм)	ρ_L (Гн/м ³)	L_0/l (мкГн/м)
1000	10000	0,314	3,14
500	2500	1,26	1,57
100	1000	31,4	3,14
50	150	126	0,942
10	200	3142	6,28

Из табл. 5.1 видно, что для приводимых значений ширины d и толщины b планарной токовой ленты, её минимальная объёмная плотность индуктивности достигает достаточно больших значений и изменяется в пределах от 0,31 Гн/м³ до 3 кГн/м³, а минимальная линейная плотность также велика и изменяется в пределах от 0,9 до 6,28 мкГн/м. Для сверхтонкой толщины проводящего слоя, измеряемого в сотнях нанометрах, эти значения увеличиваются на несколько порядков.

В таблице 5.2 приведена зависимость длины планарного проводника l от отношения d/b для толщины слоя металлизации $b=100$ нм, представляющих интерес для нано-технологий. При этом предполагалось, что планарный токовый слой даёт фиксированное значение индуктивности 10 нГн.

Т а б л и ц а 5.2

Зависимость длины планарного проводника от d/b для толщины слоя металлизации $b=100$ нм

d/b	10	20	30	40	50
l , (мкм)	3200	1600	1060	800	640
d/b	60	70	80	90	100
l , (мкм)	530	460	400	360	320

Из табл. 5.2 следует, что с ростом d/b от 10 до 100 длина проводника, имеющего индуктивность 10 нГн, существенно уменьшается от 3200 мкм до 320 мкм. Заметим, что все отрезки токовых лент, приведённые в таблице, имеют одинаковые значения предельно достижимых объёмной и поверхностной плотностей индуктивности, равной $\pi \cdot 10^7$ Гн/м³ и π Гн/м² соответственно.

5.1.4. Добротность плоского токового слоя.

Характеристическая частота

Будем исходить из определения параметра добротности

$$Q = \omega L / R, \quad (5.17)$$

где R – омическое сопротивление планарной индуктивности. Его можно вычислить из закона Ома

$$R = \rho l / s. \quad (5.18)$$

Применяя закон Ома при вычислении (5.18), мы считаем, что токовый шнур заполняет всё поперечное сечение планарного проводника на любой частоте. Ясно, что такое предположение выполняется только до частот среза, на которых классическое протекание тока прекращается. Разнообразные эксперименты с одиночными индукторами, магнитные силовые линии которых не нагружены на проводящее вещество, показывают, что эти частоты лежат в области до $f=1$ ГГц.

Подставляя (5.18) в (5.17) с учётом (5.15), получим

$$Q = \omega / \omega_*, \quad (5.19)$$

где характеристическая частота

$$\omega_* = 4\rho / [\mu_0 d^2 (1 + 4c/b)] \quad (5.20)$$

не зависит от длины проводника, а для малых значений параметра обрезания $4c/b \ll 1$ не зависит и от толщины проводника.

Добротность токового слоя (5.19) будет больше единицы при условии $\omega > \omega_*$. Как видно из (5.20), наибольшее значение характеристической частоты реализуется при $c \rightarrow 0$:

$$\omega_{*н} = 4\rho / (\mu_0 d^2). \quad (5.21)$$

Этот важный параметр, влияющий на добротность, уже зависит от материала проводника и проявляет сильную зависимость от ширины ленты d .

В табл. 5.3 по данным справочника [28] вычислены наибольшие значения характеристической частоты $\nu_{*н} = \omega_{*н} / (2\pi)$ для различных проводящих материалов и двух значений ширины ленты $d_1=100$ мкм и $d_2=10$ мкм из соотношения

$$\nu_{*н} \approx 5 \cdot 10^5 \rho / d^2. \quad (5.22)$$

Т а б л и ц а 5.3

Масштаб частоты для различных проводящих материалов

Материал	Удельное сопротивление ρ (нОм·м)	ν_{*H} (МГц) d_1 (мкм)	ν_{*H} (МГц) d_2 (мкм)
серебро	14,9	0,745	74,5
медь	15,5	0,775	77,5
золото	20,6	1,03	103
алюминий	25,0	1,250	125,0
вольфрам	48,9	2,445	244,5
молибден	50,3	2,52	252
кобальт	55,7	2,785	278,5
никель	61,4	3,08	308
латунь	212	10,6	1060
нихром	1000	50,0	5000

Табл. 5.3 даёт представление о том, какие материалы могут подойти для технологии создания индуктивности планарного токового слоя с высокой добротностью. Предпочтительны материалы, имеющие удельное сопротивление в диапазоне от 14,9 до 48,9 нОм·м.

Как видно из табл. 5.3, для ширины токового слоя 100 мкм достаточно легко получить планарные индуктивности с добротностью, которая будет возрастать с частотой, но, тем не менее, будет ограничена частотой среза. В то же время из табл. 5.3 следует, что сложно получить планарные индуктивности с высокой добротностью, которые выполнены из латуни или нихрома. Значение $Q=1$ таких материалов уже попадает в диапазон частот, которые близки к частоте среза f и даже превышают её.

Сравним минимальную индуктивность, даваемую планарной лентой, с ленточным соленоидом, работающим в выходных каскадах фирмы PARC (Palo Alto Research Center, USA) [5]. Микросолоноид радиусом $R=400$ мкм имеет 6 витков и длину 2,4 мм. Его индуктивность около 10 нГн. Вычислим объёмную плотность индуктивности такого соленоида. Она достаточно большая и равна 8,33 Гн/м³. Уложим на площадь платы, занимаемую соленоидом, плоскую ленту той же площади. Из соотношения (5.13) вычислим толщину ленты, которая даёт то же значение индуктивности 10 нГн. Получим толщину ленты $b=60$ мкм. Это в 13 раз меньше, чем удвоенный радиус микросолоноида.

Такая лента даёт величину объёмной плотности индуктивности $\rho_L=87$ Гн/м³, что на порядок больше объёмной плотности индуктивности ленточного соленоида. Микросолоноид фирмы PARC обычно выполняется из проводящих слоёв молибдена, кобальта и золота. Это вызвано технологической необходимостью иметь жёсткие стенки соленоида. Если его выполнить из серебра, то это позволит увеличить добротность применяемой планарной ленты. Одновременно, это уменьшит

энергетические потери в такой индуктивности при одинаковой плотности тока. Но при этом потребуется отдельно решать технологическую задачу увеличения жёсткости индуктивности, выполненной из серебра.

Результат сравнения объёмных плотностей индуктивностей указывает на дальнейшую возможность уменьшения (в десятки раз) объёма, занимаемого планарной индуктивностью. Это позволит увеличить количество индуктивностей, размещаемых в том же объёме в микрочипе.

Формулы, полученные в разделе 5.1, можно использовать для расчёта индуктивностей в диапазоне частот до 100 МГц. Учёт влияния эффектов пространственного перераспределения плотности СВЧ-тока в планарных и цилиндрических проводниках выполнен в разделе 5.2.

Выводы по разделу 5.1

Предложен метод расчёта уединённой индуктивности высокой симметрии для СВЧ устройств, выполненной в виде планарной проводящей ленты, в которой протекает однородный токовый шнур.

Рассчитаны одномерные распределения векторного потенциала и индукции магнитного поля, которые формирует токовый шнур внутри и вне проводящей ленты.

Вычислены потоки магнитного поля внутри и вне ленты.

Определены токовая и потоковая части погонной индуктивности планарной проводящей ленты.

Показано, что индуктивность планарного токового слоя есть чисто геометрическая величина, которая не зависит от материала проводящей ленты.

Выяснено важное свойство индуктивности: минимальное значение погонной индуктивности планарного токового слоя зависит только от отношения ширины ленты d к её толщине b и для постоянного отношения остаётся неизменной величиной. Это позволит технологам получать большие значения индуктивности планарного токового слоя для микронных технологий и нанотехнологий.

Получена частотная зависимость добротности планарной проводящей ленты. Определена характеристическая частота, выше которой добротность ленты оказывается больше единицы.

Выяснено, что характеристическая частота не зависит от длины проводника, а для малых значений параметра обрезания не зависит и от толщины проводника.

Рассчитаны значения минимальной погонной индуктивности планарного токового слоя для различных значений толщины слоя металлизации и ширины токовой ленты. Получаемые значения будут особенно велики для слоя металлизации толщиной в нанометры.

Показано, что плоская геометрия токовой ленты позволяет увеличить объёмную плотность индуктивности токового слоя на порядок по сравнению с ленточным микросолоноидом в цилиндрической симметрии. Это указывает на возможность дальнейшего получения приемлемых значений индуктивности высокой симметрии в ещё меньших объёмах.

5.2. Законы распределения плотности переменного тока в проводящей среде и их влияние на частотные характеристики интегральной индуктивности

В 2001 г. Kuhn и Ibrahim [6], исследуя экспериментально протекание тока на высоких частотах в многовитковых спиральных индукторах, обнаружили эффект, прямо противоположный скин-эффекту. Переменный ток на гигагерцах образовывал локализованный в пространстве шнур в проводнике индуктора. С ростом частоты токовый шнур уменьшал свою площадь поперечного сечения. Это приводило к тому, что омическое сопротивление и индуктивность индуктора увеличивались с частотой. Такое поведение тока высокой частоты было ими названо «Current Crowding Effects» (эффекты токового сжатия).

Ниже выясняются физические причины такого возможного перераспределения плотности индукционного тока.

5.2.1. Физико-математическая модель расчёта вихревого электрического поля проводника

Обратимся к исходным уравнениям, описывающим распределение вихревого электрического поля при скин-эффекте. Как известно, описание этого эффекта строится на системе уравнений Максвелла (см., например [12]) для векторов $\vec{E}, \vec{B}, \vec{j}$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (5.23)$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (5.24)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная. Добавим к (5.23) – (5.24) закон Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \vec{E} / \rho, \quad (5.25)$$

где ρ – удельное сопротивление сплошной однородной проводящей среды.

Подставим (5.25) в (5.24) и продифференцируем обе части (5.24) по времени

$$\text{rot} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (5.26)$$

Из (5.23) и (5.26) для бездивергентного вихревого электрического поля ($\text{div} \vec{E} = 0$), получим уравнение для вектора $\vec{E}$:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (5.27)$$

Найдём решения уравнения (5.27) для плоско-неоднородного электрического поля с одной компонентой $E_x = E_x(y, t)$, $E_y = E_z = 0$. Это поле создаёт вектор плотности тока с той же компонентой $j_x = j_x(y, t)$, $j_y = j_z = 0$. Тогда (5.27) имеет вид

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (5.28)$$

Учитывая в (5.28) гармоническую зависимость поля от времени, придём к базовому уравнению, описывающему возможные неоднородные распределения амплитуды вихревого поля E_0 в сплошном однородном проводящем пространстве

$$\frac{d^2 E_0}{dy^2} = k^2 E_0, \quad (5.29)$$

где

$$k = \sqrt{i\omega\mu_0 / \rho} \quad (5.30)$$

– комплексный обратный пространственный масштаб системы. Дальнейшее решение поставленной задачи известно в учебниках [12] и сводится обычно к искусственному обрезанию проводящего пространства с его заменой на полупространство. Приходится привязывать нуль координаты y к поверхности обрезанного полупространства и из «общего» решения уравнения (5.29)

$$E_0 = A_1 e^{-ky} + A_2 e^{ky}$$

отбрасывать второе слагаемое, которое создаёт «физически недопустимую ситуацию».

5.2.2. Интеграл полного давления в эффектах выталкивания и локализации планарного токового слоя в проводящей среде

При таком подходе к нахождению решения задачи исследователи скин-эффекта упустили самое важное. Уравнение (5.29) относится к нелинейным дифференциальным уравнениям второго порядка вида $y'' = f(y)$ (см. [29]), которое допускает понижение порядка. Понижение порядка в (5.29) приводит к фундаментальному закону сохранения полного давления, существующего в рассматриваемой системе

$$\frac{\varepsilon_0}{k^2} \left(\frac{dE_0}{dy} \right)^2 - \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = P = \text{const}, \quad (5.31)$$

где ε_0 – электрическая постоянная. Как видно из (5.31), полное давление в системе формируется из разности двух давлений. Первое давление можно назвать градиентным, потому что оно оказывается пропорционально квадрату градиента амплитуды напряжённости вихревого поля.

Градиент первого давления связан с первой силой, действующей на элементарный объём плоского токового слоя. Второе давление совпадает с давлением электрического поля. Градиент второго давления, взятый с противоположным знаком, формирует вторую объёмную силу системы, которая и удерживает в равновесии элементарный токовый слой.

Такая структура интеграла (5.31) возникает при анализе удержания одноименных зарядов в локальной области пространства самосогласованным полем [30] и указывает на то, что исходная система уравнений описывает распределение самосогласованных переменных электрических полей.

Как видно из (5.31), в плоско-неоднородной системе возможны три класса распределений, которые выражаются только чётными, относительно плоскости $y=0$, функциями. Первое распределение реализуется для положительного полного давления $P>0$ (5.31) и имеет вид

$$u_1 = \sqrt{\beta sh} |v|, \quad (5.32)$$

второе и третье распределения поля реализуются для нулевого полного давления системы $P=0$

$$u_2 = \exp|v|, u_3 = \exp-|v|, \quad (5.33)$$

четвёртое распределение поля существует при отрицательном полном давлении $P<0$

$$u_4 = \sqrt{-\beta ch} v. \quad (5.34)$$

В соотношениях (5.32) – (5.34) приняты обозначения

$$u = E_0 / E_*, v = y / y_* = \sqrt{k} y, \quad (5.35)$$

где E_* – масштаб напряжённости, $\beta = P/P_*$ (приведённое полное давление) – параметр состояния системы, $P_* = \varepsilon_0 E_*^2 / 2$ – масштаб давления системы.

Для первого распределения поля, как видно из (5.32), в плоскости $y=0$ напряжённость поля обращается в нуль и неограниченно растёт с увеличением $|y|$. Распределение тока (5.25) совпадает с точностью до постоянной с распределением напряжённости электрического поля. Функция E^2 представляет собой своеобразную «потенциальную яму», стенки которой и удерживают в себе распределение плотности тока. При наличии симметричных плоских границ (пространство ограничено тонкой проводящей плёнкой толщиной d) по оси y : $y = \pm d/2$ решение (5.32) описывает выталкивание тока на поверхность и соответствует известному в физике скин-эффекту [12].

Решения u_2 и u_4 из (5.33) и (5.34) также описывают скин-эффект, хотя теперь в плоскости $y=0$ плотность тока уже не обращается в нуль. Решение u_3 из (5.33) описывает распределение плотности тока, которое имеет наибольшее значение вблизи плоскости $y=0$, а с приближением к границам экспоненциально уменьшается. Это неизвестное ранее решение и описывает локализацию тока вблизи плоскости $y=0$ в ограниченной области пространства в плоском случае и проявляет свойства «Current Crowding Effects». Заметим, что все распределения имеют скачок производной в плоскости $y=0$.

Для получения количественных результатов, объясняющих «Current Crowding Effects», в уравнении (5.27) перейдём к цилиндрическим координатам для единственной декартовой компоненты вектора $E_z = E_z(r, t)$. Это приведёт к уравнению

$$\frac{d^2 E_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_0}{dr} = k^2 E_0. \quad (5.36)$$

Переходя в (5.36) к переменным $y = E_0 / E_*$, $x = r / r_*$ (звёздочкой помечены масштаб напряжённости электрического поля и пространственный масштаб), получим уравнение для радиального распределения амплитуды вихревого поля

$$xy'' + y' - xy = 0. \quad (5.37)$$

Единственное решение уравнения (5.37) для внутренней краевой задачи с граничными условиями $x = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$ имеет вид функции Бесселя нулевого порядка

$$y = \frac{E_0(r)}{E_*} = J_0(z), \quad (5.38)$$

где
$$z = \frac{r}{r_*} (1 - i),$$

а
$$r_* = \sqrt{2\rho / \mu_0 \omega} \quad (5.39)$$

совпадает с пространственным масштабом системы.

Как видно из (5.25), решение (5.38) описывает радиальное распределение плотности тока, которое имеет вид шнура, максимум которого приходится на ось системы. Плотность тока убывает до нуля с ростом радиуса. Шнур ограничен по радиусу первым нулём функции Бесселя (амплитудное значение E_0 не может быть отрицательным). Других решений, удовлетворяющих граничному условию, у уравнения (5.25) нет.

По (5.39) сделаны оценки радиуса токового шнура на частотах $f=1$ ГГц, 4 ГГц, 16 ГГц при протекании переменного тока по различным проводникам. Радиус первого нуля функции Бесселя нулевого порядка принят равным 2,38. Результаты расчёта представлены в табл. 5.4.

Т а б л и ц а 5.4

Зависимость радиуса R_0 токового шнура от удельного сопротивления проводника на частотах 1, 4, 16 ГГц

Материал	Удельное сопротивление ρ (нОм·м)	R_0 (мкм) 1 ГГц	R_0 (мкм) 4 ГГц	R_0 (мкм) 16 ГГц
серебро	14,9	4,60	2,30	1,15
медь	15,5	4,69	2,345	1,17
золото	20,6	5,40	2,7	1,35
алюминий	25,0	5,95	2,98	1,49
вольфрам	48,9	8,32	4,16	2,08
молибден	50,3	8,44	4,22	2,11
кобальт	55,7	8,88	4,44	2,22
никель	61,4	9,32	4,66	2,33
латунь	212	17,3	8,65	4,33
нихром	1000	37,6	18,8	9,4

Из табл. 5.4 видно, что радиус токового шнура на частоте 1 ГГц для различных проводящих материалов изменяется в пределах от 4,6 мкм у серебра до 37,6 мкм у нихрома. С дальнейшим ростом частоты радиус токового шнура ещё больше уменьшается.

5.2.3. Частотные зависимости индуктивности уединённого планарного токового слоя на СВЧ

Законы распределения плотности переменного тока, полученные в разделе 5.2.2, указывают на то, что скин-эффект возможен только в плоско-неоднородных проводящих системах. В таких системах существует четыре типа распределений, три из которых описывают выталкивание плотности тока на симметричные границы системы. Четвёртое распределение описывает локализацию индукционного тока в ограниченной области пространства, зависящую от частоты.

В 5.2.2 показано, что цилиндрическая симметрия даёт решение, в котором возникает радиально-неоднородный токовый шнур. С ростом частоты диаметр токового шнура уменьшается. Этот теоретический результат объясняет эксперименты, в которых был обнаружен «Current Crowding Effects» [6].

Ниже получены теоретические частотные зависимости положительной токовой части индуктивности уединённого индуктора на СВЧ.

Методом, изложенным в разделе 5.1, рассчитаем частотную зависимость индуктивности планарного токового слоя для неоднородных распределений плотности тока, полученных в 5.2.2. Для положительного полного давления системы токов (параметр состояния $\beta > 0$) имеем для погонной индуктивности

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{1}{\sqrt{2x}} \frac{sh\sqrt{x/2}}{(ch\sqrt{x/2} - 1)}, \quad (5.40)$$

где $L_0 = \mu_0 d$ – масштаб индуктивности, d – ширина ленты, $x = \omega/\omega_*$, а

$$\omega_* = 4\rho/\mu_0 d^2 \quad (5.41)$$

– масштаб частоты; ρ – удельное сопротивление проводника; μ_0 – магнитная постоянная.

Как видно из (5.40), полученное значение индуктивности не зависит от параметра состояния системы β . При малых значениях $x \rightarrow 0$ она имеет особенность вида $2/x$ и с ростом частоты уменьшается. При выполнении условия $x \rightarrow \infty$ индуктивность уменьшается по закону $1/\sqrt{2x}$.

При нулевом полном давлении системы (параметр состояния $\beta=0$) для двух различных распределений токов получаем одну и ту же зависимость

$$\frac{L_2}{L_0} = \frac{1}{\sqrt{2x}}. \quad (5.42)$$

При малых значениях $x \rightarrow 0$ индуктивность имеет особенность вида $1/\sqrt{2x}$ и с ростом частоты уменьшается.

Частотная зависимость индуктивности для отрицательного полного давления системы (параметр состояния $\beta < 0$) имеет вид

$$\frac{L_3}{L_0} = \frac{1}{\sqrt{2x}} \frac{(ch\sqrt{x/2} - 1)}{sh\sqrt{x/2}}. \quad (5.43)$$

Как видно из (5.43), полученное значение индуктивности также не зависит от параметра состояния системы β . При малых значениях $x \rightarrow 0$ она имеет постоянное значение $L_0/4$ и с ростом частоты уменьшается. При выполнении условия $x \rightarrow \infty$ индуктивность убывает по закону $1/\sqrt{2x}$, как и предыдущая зависимость.

Полученные теоретические зависимости (5.40) – (5.43) противоречат экспериментальным исследованиям «Current Crowding Effects» [6]. В экспериментах индуктивность и сопротивление многовитковых уединённых планарных индукторов с прямоугольной и спиральной геометрией увеличивались с частотой. Объяснить такую частотную зависимость можно только тем, что на частотах порядка 1 ГГц в изогнутой токовой ленте уже возникает цилиндрический шнур, диаметр которого на порядок меньше поперечного размера ленты.

В связи с этим представляет интерес проверить теоретические частотные зависимости (5.40) – (5.43) на экспериментах, проводимых в низко-частотном радиодиапазоне до 100 МГц.

5.2.4. Частотные зависимости индуктивности цилиндрического токового шнура на СВЧ. Сравнение с экспериментами

Используя результаты вычислений радиально неоднородного распределения тока, полученные в 5.2.2, найдём приближённую частотную зависимость индуктивности токового шнура.

Для получения закона радиального распределения плотности тока перейдём к цилиндрическим координатам так, как это было сделано в 5.2.2. Для z -компоненты вектора напряжённости переменного вихревого электрического поля $E_z = E_z(r, t)$ получим уравнение

$$\frac{d^2 E_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_0}{dr} = k^2 E_0. \quad (5.44)$$

Переходя в (5.44) к переменным $y = E_0 / E_*$, $x = r / r_*$ (звёздочкой помечены соответствующие масштабы), получим уравнение для радиального распределения амплитуды вихревого поля

$$xy'' + y' - xy = 0. \quad (5.45)$$

Как показано в разделе 5.2.2, единственное решение уравнения (5.45) для внутренней краевой задачи с граничными условиями $x = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ имеет вид функции Бесселя нулевого порядка

$$y = \frac{E_0(r)}{E_*} = \frac{j_0(r)}{j_*} = J_0(z), \quad (5.46)$$

где
$$z = \frac{r}{r_*} (1 - i), \quad (5.47)$$

а
$$r_* = \sqrt{2\rho / \mu_0 \omega} \quad (5.48)$$

совпадает с пространственным масштабом системы.

Как видно из (5.46), радиальное распределение плотности тока (5.25) имеет вид шнура, максимум которого приходится на ось системы. Плотность тока убывает до нуля с ростом радиуса. Шнур ограничен по радиусу первым нулём функции Бесселя (амплитудное значение E_0 не может быть отрицательным).

В связи с этим частотная зависимость индуктивности многовитковой индуктивности должна рассчитываться для радиально неоднородного тока, описываемого решением (5.46).

Применение изложенного в 5.1 метода расчёта частотной зависимости индуктивности приводит к математическим трудностям. Это связано с тем, что при вычислении полного тока и потока в системе формируются интегралы от функций Бесселя. Как известно [14], аналитических представлений такие интегралы не имеют.

Поэтому при вычислении интегралов плотности тока ограничимся разложением функции Бесселя нулевого порядка в виде двух членов ряда

$$j_z(r) \approx j_* (1 - r^2 / 4r_*^2) \quad (5.49)$$

в области $0 < r < r_0 = 2r_*$.

Вычисляем по плотности тока (5.49) ток пучка из соотношения

$$i = \int_s \vec{j} d\vec{s} = i_* (1 - r_0^2 / 8r_*^2), \quad (5.50)$$

где масштаб тока

$$i_* = j_* \pi r_0^2. \quad (5.51)$$

Азимутальная компонента магнитного поля изменяется по закону

$$B = \mu_0 j_* r (1/2 - r^2 / 16r_*^2). \quad (5.52)$$

Магнитный поток, создаваемый током шнура, имеет максимум на оси системы

$$\Phi = \Phi_* (1 - r_0^2 / 16r_*^2), \quad (5.53)$$

где масштаб потока

$$\Phi_* = \mu_0 j_* l r_0^2 / 4. \quad (5.54)$$

Из (5.50) и (5.53) следует приближённая частотная зависимость токовой части погонной индуктивности

$$\frac{4\pi L}{\mu_0 l} = \frac{1 - \omega / 4\omega_*}{1 - \omega / 2\omega_*}. \quad (5.55)$$

Из (5.55) видно:

1. В области значений $0 < \omega / \omega_* < 1$, в которой справедливо принятое разложение, индуктивность токового шнура увеличивается с ростом частоты в 1,5 раза и на качественном уровне совпадает с экспериментами, проведёнными в [6].

2. На низких частотах токовая часть индуктивности совпадает со значением индуктивности, полученной на постоянном токе для цилиндрических проводников в 3.1.4.

Выводы по разделу 5.2

Анализ законов распределения плотности переменного тока указывает на то, что в плоско-неоднородной системе возможны четыре класса распределений напряжённости поля и плотности тока, которые выражаются только чётными функциями.

Из полученных распределений только три решения описывают выталкивание СВЧ-тока на поверхность проводника и соответствуют известному в физике скин-эффекту.

Четвёртое из решений описывает распределение плотности тока, которое имеет наибольшие значения вблизи плоскости $y=0$, а с приближением к границам экспоненциально уменьшается. Это решение и описывает локализацию тока в ограниченной области пространства в плоском случае и проявляет свойства «Current Crowding Effects».

В цилиндрической симметрии реализуется решение, которое имеет максимум на оси системы. Напряжённость поля и плотность тока спадают с ростом радиуса и обращаются в нуль на внешнем радиусе, совпадающим с первым нулём функции Бесселя.

Решение указывает на то, что с ростом частоты диаметр образованного токового шнура уменьшается. Это и приводит к наблюдаемому экспериментально увеличению сопротивления и индуктивности одиночного индуктора с ростом частоты переменного тока.

Вид частотных зависимостей токовой части индуктивности неоднородного планарного токового слоя указывают на то, что все они с ростом частоты уменьшают свою погонную индуктивность по различным законам.

Полученные теоретические зависимости противоречат экспериментальным исследованиям «Current Crowding Effects».

В связи с этим представляет интерес проверить теоретические частотные зависимости (5.40) – (5.43) на экспериментах, проводимых в низко-частотном радиодиапазоне до 100 МГц.

Объяснить такое принципиальное отличие можно тем, что на частотах порядка 1 ГГц в изогнутой токовой ленте уже возникает цилиндрический токовый шнур, диаметр которого меньше, чем поперечные геометрические размеры ленты.

Получены частотные зависимости индуктивности для токовой части погонной индуктивности токового шнура.

На низких частотах токовая часть индуктивности совпадает со значением индуктивности, полученной на постоянном токе для цилиндрических проводников в 2.1.4.

Индуктивность шнура, имеющего цилиндрическую геометрию, увеличивается с частотой и на качественном уровне совпадает с наблюдениями «Current Crowding Effects». Физические причины этого кроются в том, что в цилиндрической геометрии с ростом частоты магнитный поток убывает медленнее, чем убывает ток шнура.

6. ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОТОТИПЫ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ИНДУКТИВНОСТИ ВЫСОКОЙ СИММЕТРИИ

В этой главе приводятся эскизы возможных технологических прототипов физико-математических моделей индуктивности высокой симметрии, которые являются оригинальными и представляют интерес как для планарных технологий интегральных микросхем, так и для систем на кристалле.

6.1. Индуктивность планарных токовых систем

На рис. 6.1 показан прототип индуктивности уединённого токового слоя, физические и геометрические свойства которого были исследованы в главе 5. Он представляет собой отрезок проводящей ленты, у которой есть толщина, ширина и длина. Стрелки на рисунке указывают направление вектора плотности тока $\vec{j}$. Буквой i отмечен полный ток, текущий по ленте.

Как показывают расчёты, погонная индуктивность (индуктивность на единицу длины ленты) такой токовой системы существенно зависит от соотношения толщины токового слоя и ширины. Чем больше отношение ширины к толщине, тем большее значение индуктивности реализуется. Если взять это отношение постоянным, то уменьшение самих размеров не приводит к изменению значения токовой погонной индуктивности.

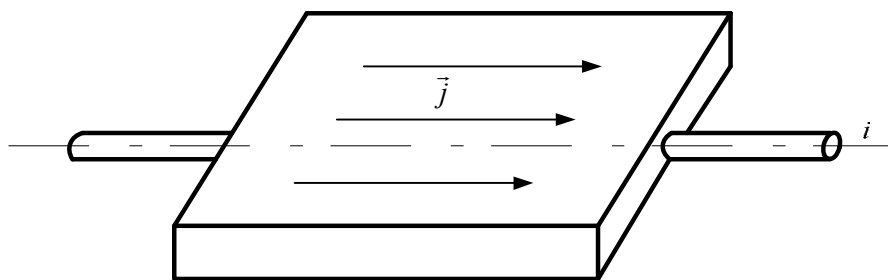


Рис. 6.1. Индуктивность уединённого токового слоя

Это замечательное свойство токового слоя позволяет создавать его на кристалле в геометрии от микрометров до нанометров. При этом значение его индуктивности если и будет уменьшаться с уменьшением размеров, то незначительно.

Ещё одно важное свойство такого слоя заключается в том, что он занимает самый малый объём среди всех других типов индуктивностей. Сравнение его высоты с высотой ленточного соленоида, имеющим индуктивность порядка 10 нГн и радиус витка 0,4 мм, указывает на тот

факт, что, занимая ту же самую площадь, он имеет то же значение индуктивности, но на порядок меньшую высоту (80 мкм). Это позволит увеличить объёмную плотность индуктивности элемента микрочипов фактически на порядок.

На рис. 6.2 показана двухслойная планарная индуктивность с различным направлением плотности j_1 и j_2 токов в слое. Плотности тока могут быть одного направления, а могут быть разного направления.

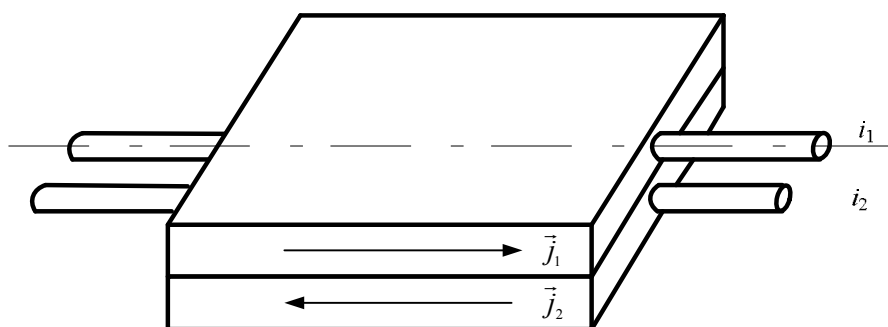


Рис. 6.2. Двухслойная индуктивность с различными законами распределения плотностей токов j_1 и j_2 в слоях

Суммарные токи в слоях i_1 , i_2 могут быть различными по двум причинам: 1) могут быть выбраны проводящие материалы слоёв верхней и нижней пластин с различным удельным сопротивлением; 2) может быть проводящий слой с одинаковым удельным сопротивлением, но реализуется самосогласованное протекание тока. Тогда плотность тока будет зависеть от одной из поперечных координат токового слоя. При этом возможны два случая поведения токов. В одном случае плотность тока обращается в нуль на границе системы, а в другом случае плотность тока может обратиться в нуль в центре системы.

Концы проводников с токами i_1 и i_2 можно соединить между собой. Тогда $i_1=i_2$, а плотности токов будут противоположны по направлению. В этом случае в системе будет реализована самая большая индуктивность.

Представленные на рис. 6.1 и 6.2 одиночные индукторы будут работать на переменном токе до критических частот порядка 1 ГГц. Законы взаимодействия токов с магнитным полем таковы, что одиночный токовый индуктор, магнитные силовые линии которого не нагружены на проводящее вещество всегда будет иметь частоту среза.

Причина этого заключается в том, что на частотах, приближающихся к критической, плотность тока перестаёт быть однородной по поперечному сечению ленточного проводника. Особенно это касается индуктора на рис. 6.1. Ток на частоте, близкой к частоте среза, начинает шнуроваться. При приближении к этой частоте площадь поперечного сечения шнура становится на порядок меньше, чем площадь поперечного сечения самого

проводника. Этот эффект называют «Current Crowding Effects». Омическое сопротивление проводника растёт и увеличивается индуктивность, по сравнению с низкочастотными значениями.

Для того чтобы избавиться от частоты среза планарного токового слоя, силовые линии его магнитного поля необходимо нагрузить на дополнительный проводящий слой. Тогда его индуктивные свойства будут определяться вносимой динамической индуктивностью дополнительного проводящего слоя.

На рис. 6.3 представлена трёхслойная вносимая индуктивность, которая не имеет частоты среза.

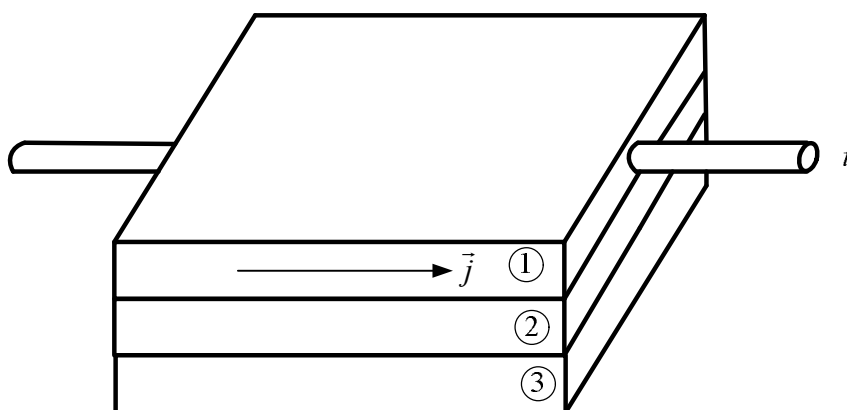


Рис. 6.3. Трёхслойная вносимая индуктивность

На рис. 6.3 первый слой 1 представляет собой токовый планарный слой. Второй слой 2 может быть выполнен из диэлектрика и предназначен для электрической изоляции слоёв 1 и 3. Слой 3 может быть выполнен из различных проводников и полупроводников. Его частотная зависимость индуктивности будет существенно зависеть от удельного сопротивления слоя 3 и его толщины металлизации. Выбор материала для слоя 3 будет обусловлен положением первого нуля индуктивности. Он может лежать в области МГц для проводников Cu или Al. В область 100 ГГц он может быть перемещён применением электронного кремния или многослойных структур с применением плёнок Si-Cu. Это позволит провести корректный выбор положительного или отрицательного значения индуктивности, на которой будет работать трёхслойная вносимая индуктивность.

При толщине слоя 3 от 100 нм до 500 нм частотная зависимость индуктивности может исчезнуть.

Управляемая трёхслойная индуктивность представлена на рис. 6.4. Она отличается от предыдущей индуктивности тем, что в ней задействованы два токовых слоя. Слои 1 и 3 проводящие. Они сделаны либо из меди, либо из алюминия. Слой 2 диэлектрик. Один из токов является управляющим. Токи могут быть одного направления либо противоположных направлений. Значение индуктивности по току 1 или по

току 2 будет существенно зависеть от их отношения. В получившемся двухтоковом индукторе возможно получение как положительных, так и отрицательных значений индуктивности.

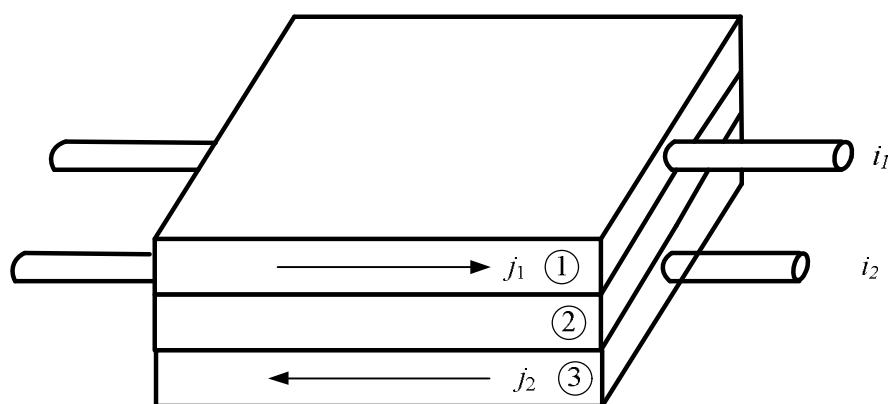


Рис. 6.4. Трёхслойная управляемая индуктивность

Необходимо заметить, что если изменить направления токовых вводов на вертикальные осесимметричные, то мы получим плёночный конденсатор. Это говорит о том, что существующая технология изготовления плоских конденсаторов в микронных размерах может быть перестроена под технологию создания управляемой трёхслойной индуктивности.

При другом расположении плоских токовых слоёв, представленном на рис. 6.5, можно получить планарную управляемую бинарную индуктивность.

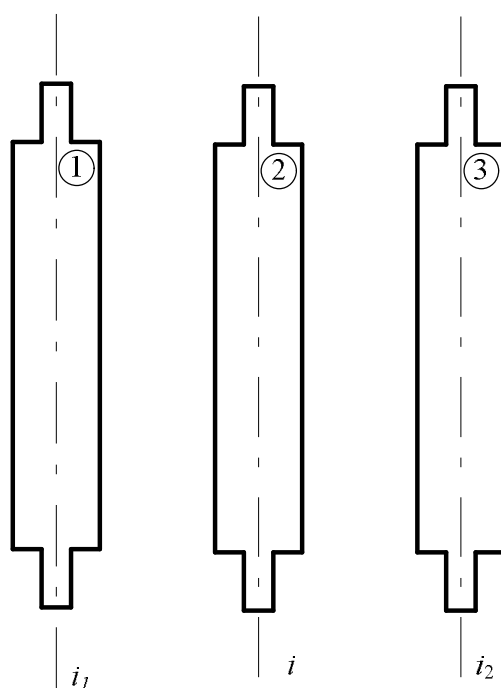


Рис. 6.5. Планарная управляемая бинарная индуктивность

На рис. 6.5 токовые слои 1, 2, 3 пропускаются через медь либо алюминий. Плоские ленты 1, 2, 3 лежат в одной плоскости на кристалле и имеют одинаковую длину, толщину и ширину ленты.

Тогда i_1 – ток, протекающий через первую индуктивность, а ток i_2 – ток, протекающий через другую индуктивность. Обе индуктивности имеют одинаковые значения, но используются в схемах, где нужно иметь две индуктивности, которые изменяют свою индуктивность одновременно и одинаково при изменении тока i . Причина возможности управления бинарной индуктивностью заключается в том, что силовые линии магнитного поля, создаваемого постоянным током i , вносят свой вклад в потоки, создаваемые собственными токами i_1 и i_2 , и изменяют результирующую индуктивность.

Если в бинарной индуктивности удалить третий элемент, то оставшиеся два электрода будут представлять собой индуктивную систему, похожую на двухслойную индуктивность рис. 6.2, но только с разнесёнными в другой плоскости токовыми слоями. Такая индуктивность будет также управляемой. Первый элемент будет индуктивностью, а второй элемент управляющим электродом. По нему нужно пропускать постоянное значение тока. В такой системе электродов возможны положительные и отрицательные значения индуктивности первого элемента, значения которой будут зависеть от отношения токов в слоях.

6.2. Индуктивность цилиндрических токовых систем

Изменение геометрии токовых слоёв с планарной на цилиндрическую позволяет получить другой класс индуктивностей, свойства которых будут зависеть от того какое направление плотности тока будет возбуждено в системе проводящих электродов.

В цилиндрической геометрии существуют три возможности. Первая возможность связана с плотностью тока азимутального направления. В этот класс индуктивностей входят известные индуктивности кольца и разнообразные спиральные структуры (см. главу 1). Когда они используются в качестве одиночного индуктора, то они имеют большой недостаток на высоких частотах. У них у всех есть частота среза, обусловленная «Current Crowding Effects».

Второй класс индуктивностей цилиндрической симметрии – это класс индуктивностей, в которых вектор плотности тока направлен по оси системы и третий класс индуктивностей, в которых вектор плотности тока направлен по радиусу системы.

В первом классе индукторов предложим двухслойную индуктивность на азимутальном направлении вихревого тока, в которой в отличие от общепризнанных технологических конструкций в качестве

индуктора использовано проводящее токовое кольцо 1 (оно имеет большую добротность), которое должно быть изолировано от проводящего слоя 2 по всей поверхности соприкосновения. Такая конструкция представлена на рис. 6.6.

На рис. 6.6 область 1 – проводящее медное кольцо индуктора. Область 2 – представляет собой второй слой, который может быть выполнен из проводящего или полупроводящего материала. Он создаёт нагрузку для силовых линий магнитного поля. В связи с этим, значение удельного сопротивления второго слоя может быть различным. Оно влияет на положение первого нуля индуктивности и избавляет систему от критической частоты.

Замена спирального индуктора на проводящее кольцо позволит улучшить однородность магнитного поля внутри полупроводника. Это приведёт к тому, что в области первого нуля частотная зависимость индуктивности будет более крутой. Такой ход частотной зависимости позволит получить большие положительные индуктивности на частоте, меньшей, чем первый нуль индуктивности. Уходя в область частот, при которых реализуется отрицательные значения индуктивности, можно получить такие значения, которые будут в разы больше, чем в системах, использующих спиральный индуктор.

Отметим ещё одно достоинство такой геометрии. Вихревая плотность тока в системе не имеет на пути скачкообразных изменений направления токопровода, как это получается в индуктивностях, использующих геометрию октаэдров. Любые скачкообразные изменения направления токопровода на высоких частотах, на которых возникает скин-эффект, будут приводить к дополнительному выбросу электронов на подложку. Это будет ухудшать частотные характеристики изделия.

Для изоляции слоёв 1 и 2 в индуктивности на рис. 6.6 можно применить диэлектрик и получить трёхслойную структуру, представленную на рис. 6.7.

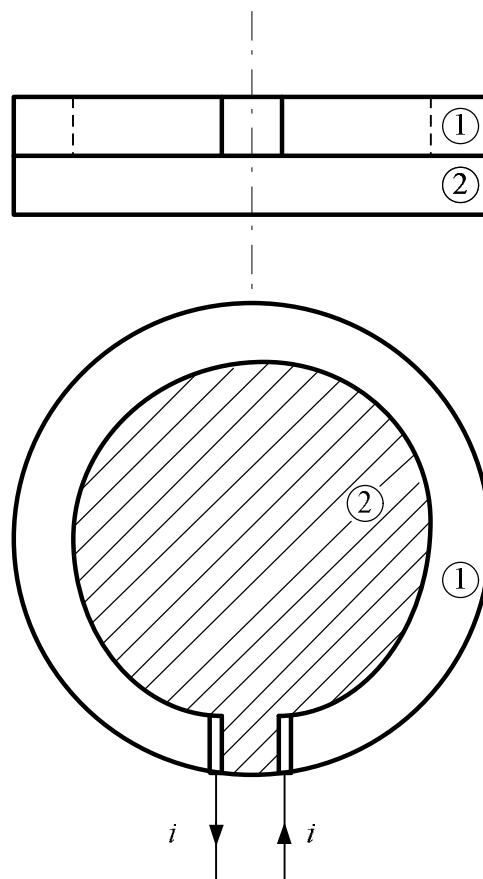


Рис. 6.6. Двухслойная вносимая индуктивность с азимутальным направлением вихревого тока

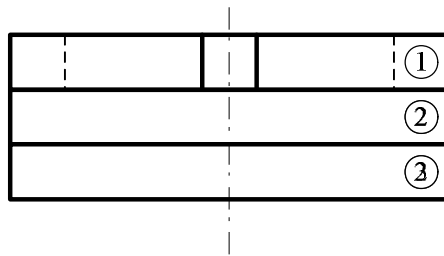


Рис. 6.7. Трёхслойная вносимая индуктивность с азимутальным направлением вихревого тока

На рис. 6.7 область 1 – область кольцевого индуктора, область 2 – область, занятая диэлектриком, область 3 – область, занятая полупроводником. Толщина слоя 2 должна быть на порядок меньше, чем толщина слоёв 1 и 3.

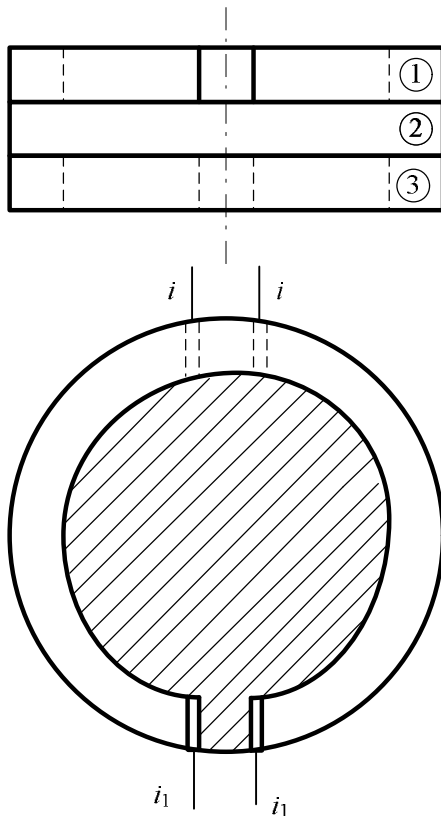


Рис. 6.8. Цилиндрическая трёхслойная управляемая индуктивность

На трёхслойной цилиндрической секции можно сделать управляемую индуктивность. Она представлена на рис. 6.8. В области 1 и 3 находятся два кольцевых индуктора, у которых вводы для тока расположены в противоположных концах диаметра. В слое 2 находится либо диэлектрик, либо полупроводник. Для разных материалов в системе будут проявляться различные частотные свойства.

Свойства такой индуктивности будут качественно похожи на свойства управляемой индуктивности с планарной геометрией, изображённой на рис. 6.4. Но количественные соотношения и экспериментальные свойства будут в сильной степени зависеть от толщины слоёв, радиуса внешнего цилиндра системы и применяемых материалов.

Конструкция ещё одной планарной индуктивности использует известную в технологии топологию одиночного токового кольца. В металлическое кольцо, расположенное на сапфире, напыляется один слой цилиндрической проводящей плёнки радиуса

R с толщиной h таким образом, чтобы плёнка не имела омического контакта с токовым кольцом, но имела контакт по взаимной индукции. При использовании такой индуктивности в мощных выходных каскадах величины R , h , R_1 , R_2 и H должны быть рассчитаны с учётом допустимого теплового энерговыделения.

Эту модель планарной индуктивности далее будем называть «проводящая плёнка в токовом кольце». Следует заметить, что такую индуктивность не удаётся рассчитать симулятором HFSS Ansoft. При проведении расчётов симулятор даёт одинаковые значения индуктивности при наличии проводящей плёнки и при её отсутствии.

На рис. 6.9 дан вид сверху предлагаемой конструкции планарной индуктивности. На рис. 6.9 приняты обозначения: R – радиус проводящей плёнки, R_1 – внутренний радиус токового кольца, R_2 – внешний радиус токового кольца, Ввод 1 – ввод/вывод тока, Ввод 2 – вывод/ввод тока, 1 – охранный проводящий контур, буквой П обозначена подложка из сапфира.

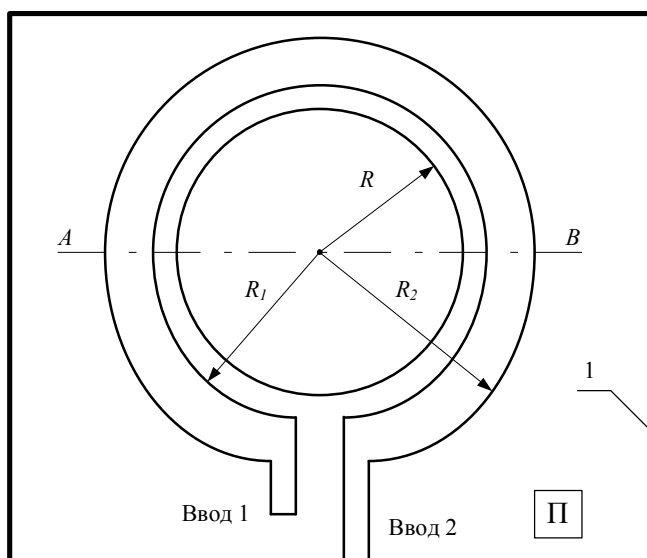


Рис. 6.9. Вид планарной индуктивности сверху.

На рис. 6.10 дан разрез этой конструкции по вертикальному сечению АВ, показанному на рис. 6.9.

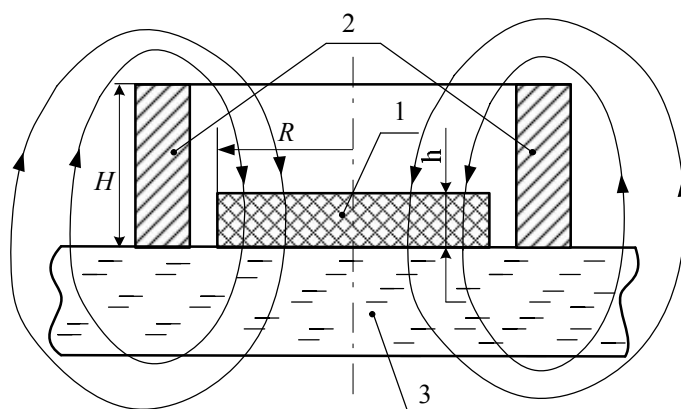


Рис. 6.10. Разрез конструкции по вертикальному сечению АВ

На рис. 6.10 приведены обозначения: 1 – один слой проводящей цилиндрической плёнки толщиной h , 2 – металлизированное цилиндрическое токовое кольцо толщиной H , 3 – подложка из сапфира. Охранный контур на рис. 6.10 не указан. Замкнутыми кривыми со стрелками схематически показаны силовые линии переменного магнитного поля для некоторого момента времени.

В таблице 6.1 даны значения положительной потоковой индуктивности, которые можно реализовать в системе на кристалле для плёнки радиусом $R=50$ мкм (расчёты выполнены по соотношению (3.127)). При этом удельное сопротивление плёнки не влияет на величину индуктивности, а изменяет только частотный диапазон, в котором такая индуктивность будет оставаться постоянной. Диапазон частот можно оценить из условия $0,1f_* < f < 10f_*$, где f_* – масштаб частоты системы (3.73). Значения масштаба частоты, зависящего от удельного сопротивления плёнки проводника, рассчитаны в таблице 6.2.

Т а б л и ц а 6.1

Зависимость индуктивности плёнки от толщины слоя металлизации

$h(\text{нм})$	50	100	150	200	250	300	350
$L_{\Phi}(\text{нГн})$	100	50	33,3	25	20	16,7	14,3

Т а б л и ц а 6.2

Зависимость масштаба частоты системы от материала плёнки

Материал	Удельное сопротивление $\rho(\text{ом}\cdot\text{м})$	Масштаб частоты $f_*(\text{Гц})$
медь	$15,5 \cdot 10^{-9}$	$3,14 \cdot 10^6$
алюминий	$25,0 \cdot 10^{-9}$	$5,0 \cdot 10^6$
вольфрам	$48,9 \cdot 10^{-9}$	$10,0 \cdot 10^6$
никель	$61,4 \cdot 10^{-9}$	$12,4 \cdot 10^6$
нихром	$1,0 \cdot 10^{-6}$	$203 \cdot 10^6$
кремний электронный (KEF)	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$203 \cdot 10^9$

Из таблиц 6.1 и 6.2 видно, что использование алюминия при напылении плёнки радиусом $R=50$ мкм и толщиной $h=100$ нм позволяет получить индуктивность плёнки 50 нГн. Такая плёнка будет обеспечивать частотно-независимую индуктивность в диапазоне частот от 0,5 до 50 МГц.

Применение же плёнки из нихрома для тех же геометрических размеров позволит обеспечить постоянство положительной индуктивности в диапазоне от 20 МГц до 2 ГГц.

В вышеприведённых таблицах также показано, что при изменении толщины плёнки от 50 нм до 350 нм её индуктивность изменяется в диапазоне от 100 до 14 нГн, что отличает её от современных значений максимальной индуктивности, достигаемых в одном слое для систем на кристалле от семи до 50 раз.

Заметим, что индуктивность системы «проводящая плёнка – токовое кольцо» будет несколько больше рассчитанного в табл. 6.1. Это объясняется тем, что к индуктивности плёнки обязательно добавится индуктивность токового кольца, которое для значения радиуса кольца порядка 50 мкм не превышает значения 1 нГн вплоть до значений частоты порядка 1 ГГц (см. вычисления в главе 1).

Большой интерес представляет собой индуктивность цилиндрического проводящего кольца радиусом R , посаженного на проводник радиусом R_0 с аксиальным вихревым током j . Частотная зависимость вносимой индуктивности такого кольца также будет зависеть от геометрических размеров кольца, диаметра токового проводника, удельного сопротивления и не будет иметь частоты среза. На рис. 6.11 даны его геометрические размеры. При наноскопической толщине кольца h возможны наноразмерные эффекты. Они могут дать частотно-независимую индуктивность.

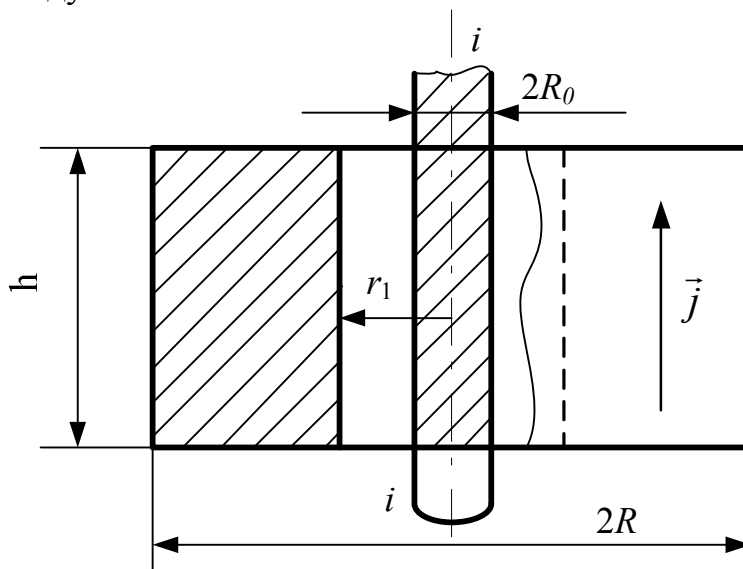


Рис. 6.11. Индуктивность проводящего кольца с аксиальным переменным током

Такие индуктивности найдут своё применение при изготовлении транзисторов микроскопических размеров, в которых требуется увеличить индуктивность коллектора на определённой частоте и изменить её на другой частоте.

Метод вносимой индуктивности, предложенный в главе 6, является универсальным и сможет помочь ликвидировать в ленточных соленоидах «проблему частоты среза» [5]. Для этого необходимо вводить в соленоид перпендикулярно оси системы аксиально-тонкие плёнки различных проводников или полупроводников. Пленки нужно напылить на торец цилиндрического диэлектрика. Его диаметр должен быть близок к

внутреннему диаметру соленоида (см. рис. 6.12). Плёнку можно вводить и с торца микрокатушки. Введение проводящей плёнки изменит физический механизм формирования интегральной индуктивности ленточного соленоида, переведя его в класс вносимой индуктивности.

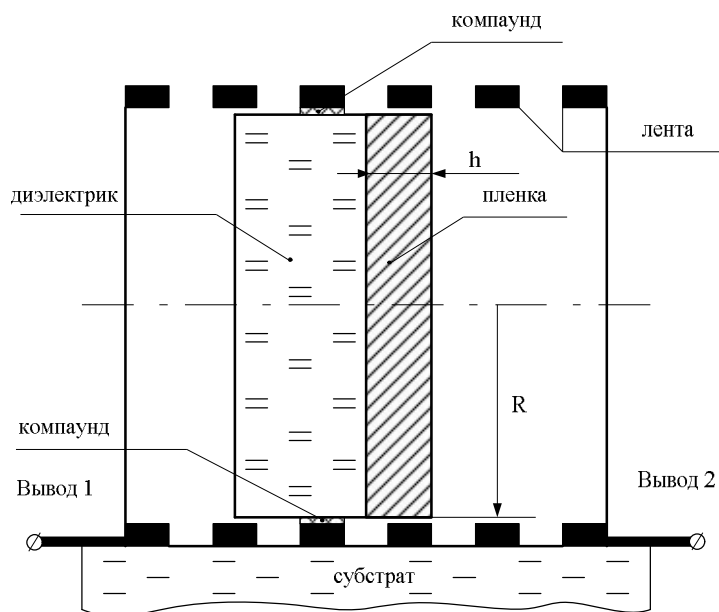


Рис. 6.12. Полупроводящая плёнка в ленточном соленоиде фирмы *PARC*

Из приводимых оценок в главе 4 следует, что для разных рабочих частот можно получать широкий спектр возможных значений индуктивности на одной микрокатушке для широкого класса СВЧ применений.

6.3. Планарно-вырожденный отрезок коаксиального кабеля

На рис. 6.13 представлен планарно-вырожденный отрезок коаксиального кабеля. Он состоит из двух слоёв. Слой 1 с выводами 1-2 представляет собой планарный токовый слой, который заменяет центральную жилу коаксиального кабеля. Слой 2 с выводами 3-4 представляет собой бипланарный токовый слой, который заменяет внешнюю оплётку коаксиального кабеля.

Система двух проводников формируется в двух проводящих слоях, изолированных друг от друга. Взаимное расположение токовых слоёв друг над другом указано пунктиром на нижней части рис. 6.13. Отрезок коаксиального кабеля позволяет сформировать управляемую током планарную индуктивность, свойства которой будут аналогичны свойствам коаксиального кабеля, исследованного в разделе 2.2.

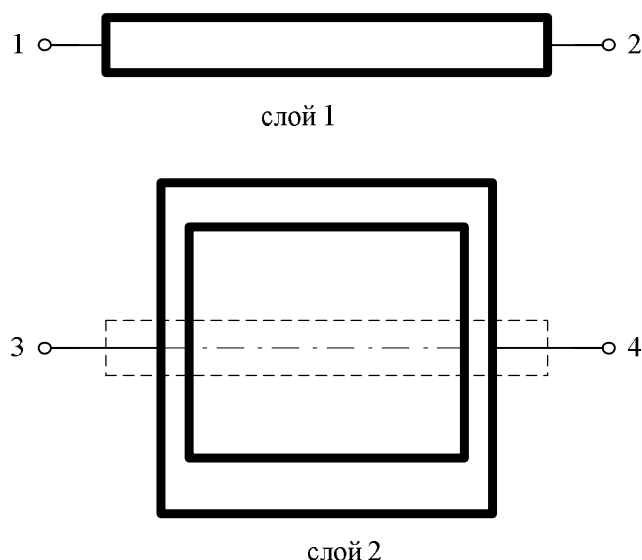


Рис. 6.13. Планарно-вырожденный отрезок коаксиального кабеля

Изменяя значение постоянного или низкочастотного тока в слое 1, можно влиять на значение интегральной индуктивности, приведённое к концам 3-4. Диапазон изменения индуктивности 3-4 будет зависеть от отношения и направления токов в слоях 1-2. Она может быть как положительной, так и отрицательной. Динамический диапазон изменения параметров индуктивности будет существенно зависеть от геометрических размеров длины, ширины и толщины металлизации слоёв 1 и 2.

6.4. Индуктивности цилиндрического индуктора и планарного углового сектора на радиальной компоненте вектора плотности тока

На рис. 6.14 показана геометрия токового цилиндрического индуктора, который использует радиальную компоненту вектора плотности тока. Подвод тока находится на внешней поверхности кольца, а вывод тока – на внутренней.

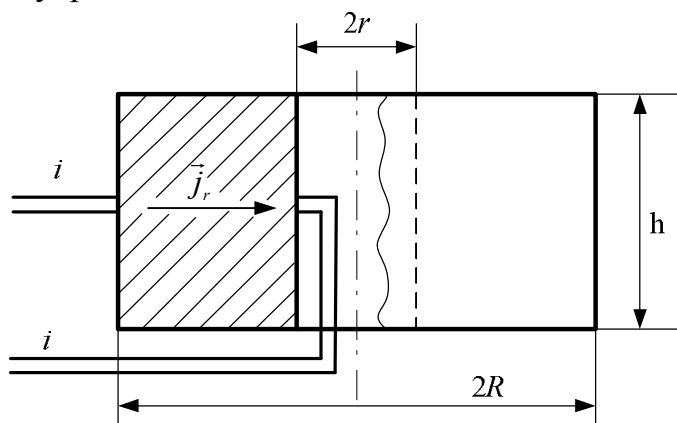


Рис. 6.14. Цилиндрический индуктор на радиальной компоненте плотности тока

Индуктивность такой системы не может быть рассчитана из уравнений магнитостатики. Причина этого заключается в том, что радиальный вектор плотности тока в цилиндрической симметрии зависит от радиуса. Поскольку радиальный вектор плотности тока порождает единственную радиальную компоненту векторного потенциала A_r , то она в этом случае должна зависеть от r . Зависимость от r сразу же приводит к тому, что дивергенция вектора $\vec{A}$ перестаёт быть равной нулю (компонента зависит от переменной, входящей в компоненту). Это нарушает возможности уравнений, описывающих распределение полей векторного потенциала и индукции магнитного поля в пространстве.

Но это не ставит запрет на угадывании формулы для геометрической индуктивности рассматриваемого случая. Её форму можно получить из формулы индуктивности планарного токового слоя. На наш взгляд, она может иметь вид

$$L = \mu_0 \pi (R^2 - r^2) / h. \quad (6.1)$$

Структура предложенной формулы указывает на то, что такие индуктивности как раз и представляют интерес для тонкоплёночных индуктивностей при малых h . В этом случае может сработать наноразмерный эффект, который позволит получить частотно-независимую индуктивность.

Если из этого цилиндра вырезать угловой сектор с углом φ , взятым в радианах, то это соотношение приведёт к возможности формирования другого класса индуктивностей в планарном классе (см. рис. 6.15). На рис. 6.15 толстыми кривыми обозначена форма электродов токового ввода/вывода 1-2. Формула (6.1) позволяет рассчитывать и такие индуктивности типа углового сектора из соотношения

$$L = \mu_0 (R^2 - r^2) \varphi / (2h), \quad (6.2)$$

которая при малых h даёт большую индуктивность тонкой плёнки.

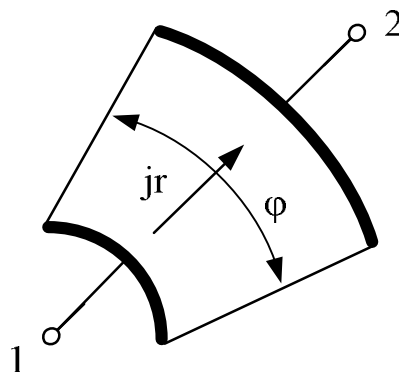


Рис. 6.15. Индуктивность планарного углового сектора на радиальной плотности тока

По соотношению (6.1) легко оценить порядок индуктивности, которую даст тонкая плёнка толщиной 50 мкм, внешним радиусом 0,4 мм и внутренним радиусом 0,1 мм. Она имеет значение около 12 нГн и превышает значение 10 нГн, даваемое ленточным соленоидом из шести витков, который занимает объём в 60 раз больший, чем объём плёнки. Большой интерес представляют поиск наноразмерного эффекта в таких плёнках, даваемый соотношением (6.2), и который позволяет увеличивать индуктивности сверхтонких плёнок на порядок.

Выводы по разделу 6

В главе приведены пять технологических прототипов физико-математической модели индуктивности планарных токовых систем. Обсуждаются физические параметры индуктивности уединённого токового слоя, двухслойная планарная индуктивность с различным направлением плотности тока в слоях, трёхслойная вносимая индуктивность, трёхслойная управляемая индуктивность, планарная управляемая бинарная индуктивность.

Обсуждаются три технологических прототипа модели индуктивности цилиндрических токовых систем: для плотности тока азимутального направления, аксиального направления и радиального направления.

Достоинство цилиндрической симметрии заключается в том, что вихревая плотность тока в системе не имеет скачкообразных изменений направления токопровода. Любые скачкообразные изменения направления токопровода на высоких частотах будут приводить при скин-эффекте или «Current Crowding Effects» к излому токового шнура и к дополнительному выбросу электронов на подложку.

В первом классе индукторов предложена двухслойная индуктивность при азимутальном направлении вихревого тока, в которой в отличие от общепризнанных технологических конструкций в качестве индуктора использовано одновитковое проводящее токовое кольцо. В области частот, при которых реализуется отрицательное значение индуктивности, можно получать такие значения, которые будут в разы больше, чем в системах со спиральным индуктором.

В этом же классе индукторов предложено конструкция планарной индуктивности «проводящая плёнка в токовом кольце» для системы на кристалле. В металлическое кольцо, расположенное на сапфире, напыляется один слой цилиндрической проводящей или полупроводящей плёнки таким образом, чтобы плёнка не имела омического контакта с токовым кольцом, но имела контакт по взаимной индукции.

Следует заметить, что такую индуктивность не удаётся рассчитать симулятором HFSS Ansoft. При проведении расчётов симулятор даёт одинаковые значения индуктивности при наличии проводящей плёнки и при её отсутствии.

В разделе 3.3 предложен метод расчёта вышеупомянутой индуктивности. Показано, что при сверхтонкой плёнке токи Фуко формируют частотно-независимую положительную индуктивность, проявляя свои неожиданные парамагнитные свойства. Выяснены физические причины проявления наноразмерного эффекта.

Показано, что при изменении толщины плёнки от 50 нм до 350 нм в результате наноразмерного эффекта её индуктивность изменяется в диапазоне от 100 до 14 нГн. Это отличает её от современных значений максимальной индуктивности, занимающей ту же площадь в одном слое для систем на кристалле от семи до 50 раз.

Во втором классе индуктивности на аксиальном вихревом токе предложена индуктивность, выполненная в виде проводящего кольца, надетого на цилиндрический проводник с переменным током. Такие индуктивные кольца могут быть внедрены непосредственно в технологию создания микротранзисторов при расположении колец на коллекторном выходе.

Предложен способ увеличения на порядок индуктивности ленточного микросоленоида фирмы PARC. Для этого необходимо вводить в микросоленоид перпендикулярно оси системы аксиально-тонкие плёнки различных проводников или полупроводников. Введение проводящей плёнки изменяет физический механизм формирования интегральной индуктивности ленточного соленоида, переводя его в класс вносимой индуктивности. Это позволяет ликвидировать «проблему частоты среза», существующую в ленточных соленоидах.

Предложена перестраиваемая отношением токов модель индуктивности на планарно-вырожденном отрезке коаксиального кабеля.

В третьем классе индукторов предложены планарные индуктивности на радиальном вихревом токе. Оцениваемый порядок индуктивности таких индукторов оказывается больше, чем даёт ленточный соленоид из шести витков, который занимает объём в 60 раз больше, чем объём плёнки.

Предложены топологии индуктивности цилиндрического индуктора и планарного углового сектора на радиальной компоненте вектора плотности тока. Исследование конструктивных решений для таких индуктивностей представляет интерес при их реализации с использованием сверхтонких плёнок, в которых возможны проявления наноразмерного эффекта.

7. МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ИНДУКТИВНОСТЕЙ ВЫСОКОЙ СИММЕТРИИ

В главе 7 предложены методы измерений положительной и отрицательной индуктивностей, обсуждаются известные и предложены оригинальные экспериментальные исследования токовых вихревых интегральных индуктивностей высокой симметрии. Предложены методы измерений погонной индуктивности и индуктивности со значением, близким к 1 нГн. Выбран метод измерения потоковой отрицательной индуктивности сплошного макроскопического проводящего цилиндра с азимутальным направлением в пространстве вектора плотности вихревого тока. Для этого конкретизированы физические свойства вносимой индуктивности латунного стержня и измерительного соленоида. Обсуждаются достоинства и недостатки методов измерения индуктивности на низкочастотных полосовых фильтрах первого и второго порядков. Обработаны результаты резонансных измерений отрицательной индуктивности латунного цилиндра.

7.1. Об одном методе измерения погонной индуктивности

Для более точного измерения погонной индуктивности предложим следующий метод. К известной индуктивности L_0 подключаются симметрично участки круглого проводника с одним диаметром, но различной длиной l_0 . Первый раз проводник имеет длину l_0 , а последний раз – длину Nl_0 , где N – число различных секций. Схема наращивания L_0 представлена на рис. 7.1, где a и b – клеммы подключения измерительного прибора (ИП). Прибор даст N показаний $L_1, L_2, \dots, L_N$. При первом измерении имеем

$$L_1 = L_0 + 2l_0 \cdot L_{\Pi}. \quad (7.1)$$

При последнем имеем

$$L_N = L_0 + 2l_0 \cdot NL_{\Pi}. \quad (7.2)$$

Зная значения L_0, l_0 , можно получить N значений погонной индуктивности. Значения L_N будут линейно нарастать с увеличением параметра N .

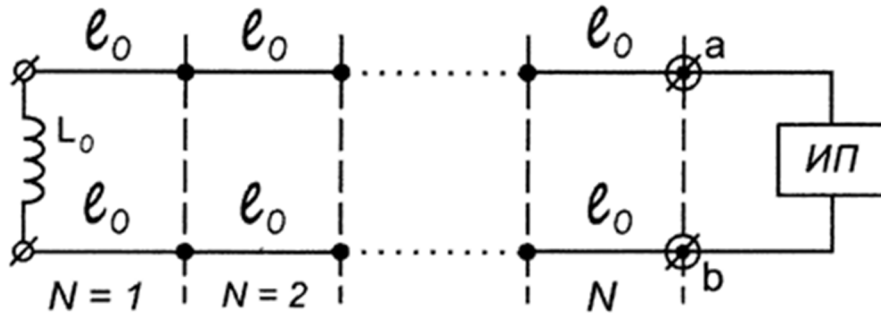


Рис. 7.1. Схема наращивания проводников

Поэтому появляется возможность применить метод наименьших квадратов (МНК). В нём прямая задаётся зависимостью

$$y = b_0 + b_1 x, \quad (7.3)$$

где b_0 и b_1 – постоянные значения прямой, которые необходимо найти по МНК. Значения x пропорциональны длине $2l_0$. Значение b_0 должно быть близко к L_0 , а значение b_1 будет совпадать со значением $L_{\text{п}}$ – погонной индуктивности. Тогда

$$\begin{aligned} x_1 &= 2l_0; & y_1 &= L_1; \\ x_2 &= 4l_0; & y_2 &= L_2; \end{aligned} \quad (7.4)$$

.....

$$x_N = 2Nl_0; \quad y_N = L_N.$$

Полученные формулы нужно обработать по формулам МНК:

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2}, \quad (7.5)$$

где b_0 находится из уравнения

$$b_0 + b_1 \bar{x} = \bar{y}, \quad (7.6)$$

где $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$, а $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$.

Для вычисления погрешностей определения b_0 и b_1 применяются соотношения

$$\Delta b_1 = \sqrt{\frac{1}{D} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{(N-2)}}, \quad (7.7)$$

$$\Delta b_0 = \sqrt{\left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{D} \right) \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{(N-2)}}, \quad (7.8)$$

где

$$d_i = y_i - b_1 x_i - b_0, \quad (7.9)$$

$$D = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \quad (7.10)$$

7.2. О методе измерений индуктивности высокой симметрии со значением, близким к 1 нГн

При измерениях индуктивностей со значением порядка и меньше можно предложить метод двух отсчётов. На рис. 7.2 показаны схемы возможных измерений.

Первый отсчёт даёт приборное значение индуктивности L_1 :

$$L_1 = L_X + 2 l_0 \cdot L_{\Pi} . \quad (7.11)$$

Второй отсчёт даёт приборное значение индуктивности L_2 :

$$L_2 = L_X + \frac{2 l_0 \cdot L_{\Pi}}{N} , \quad (7.12)$$

где N показывает, во сколько раз была укорочена первоначальная длина шлейфа.

Вычитая из (7.11) равенство (7.12), получим для погонной индуктивности

$$L_{\Pi} = \frac{N(L_1 - L_2)}{2 l_0(N - 1)} . \quad (7.13)$$

Складывая (7.11) и (7.12), получим для неизвестной L_X :

$$L_X = \frac{(L_1 + L_2)}{2} - l_0 L_{\Pi} \cdot \left(\frac{N + 1}{N} \right) . \quad (7.14)$$

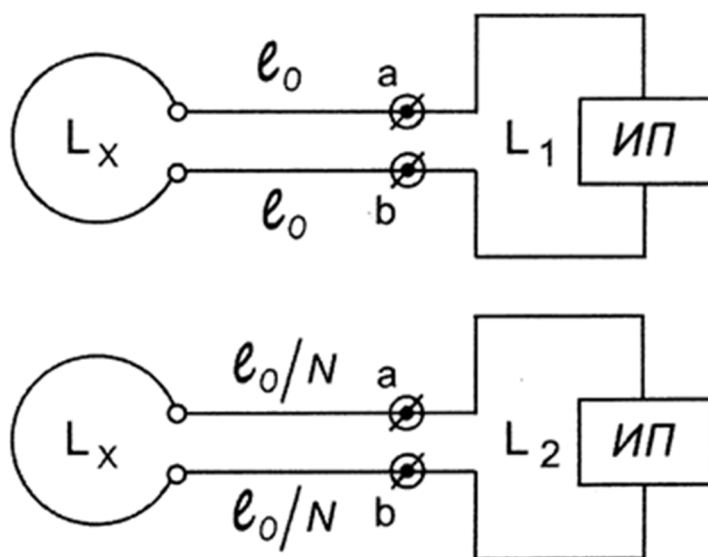


Рис. 7.2. Схемы измерений по методу двух отсчётов

Из (7.14) видно, что погрешность измерения неизвестной индуктивности ΔL_X зависит от $\Delta L_0 = \Delta L_1 = \Delta L_2$ – погрешности измерения прибора, от Δl_0 – погрешности измерения длины и ΔL_{Π} – погрешности измерения погонной индуктивности. Общая формула для вычисления погрешности имеет вид:

$$\Delta L_X = \sqrt{\left(\frac{\partial L_X}{\partial L_1}\right)^2 \cdot \Delta L_1^2 + \left(\frac{\partial L_X}{\partial L_2}\right)^2 \cdot \Delta L_2^2 + \left(\frac{\partial L_X}{\partial l_0}\right)^2 \cdot \Delta l_0^2 + \left(\frac{\partial L_X}{\partial L_{\Pi}}\right)^2 \cdot \Delta L_{\Pi}^2}. \quad (7.15)$$

Вычислим частные производные в (7.15):

$$\frac{\partial L_X}{\partial L_1} = \frac{1}{2}; \quad \frac{\partial L_X}{\partial L_2} = \frac{1}{2}; \quad \frac{\partial L_X}{\partial l_0} = -\frac{L_{\Pi}(N+1)}{N}; \quad \frac{\partial L_X}{\partial L_{\Pi}} = -\frac{l_0(N+1)}{N}. \quad (7.16)$$

Подставляем (7.16) в (7.15) и, принимая во внимание, что приборная погрешность: $\Delta L_1 = \Delta L_2 = \Delta L_0$, а погрешность ΔL_{Π} пренебрежимо мала по сравнению с приборной, получим

$$\Delta L_X = \sqrt{\frac{\Delta L_0^2}{2} + \left[\frac{L_{\Pi}(N+1)}{N}\right]^2 \Delta l_0^2}. \quad (7.17)$$

Удовлетворительные измерения можно проводить в том случае, если слагаемые под радикалом (7.17) дают примерно одинаковые погрешности

$$\frac{\Delta L_0}{\sqrt{2}} = \frac{L_{\Pi}(N+1)}{N} \cdot \Delta l_0. \quad (7.18)$$

Из равенства (7.18) можно оценить требуемую погрешность измерения Δl_0 в зависимости от N и выбрать прибор, измеряющий начальную длину шлейфа

$$\Delta l_0 = \frac{N \Delta L_0}{\sqrt{2} \cdot L_{\Pi}(N+1)}. \quad (7.19)$$

Выбор (7.18) позволяет измерять L_X с погрешностью прибора. Если в (7.19) подставить $L_{\Pi} = 1 \text{ нГн/см}$, а $\Delta L_0 = 0,01 \text{ нГн}$, то Δl_0 будет в сантиметрах

$$\Delta l_0 = 7,07 \cdot 10^{-3} \frac{N}{N+1} \text{ (см)}. \quad (7.20)$$

При $N = 2$ требуется погрешность измерения длины шлейфа $\Delta l_0 = 47,1 \text{ мкм}$, а при $N = 5$ – $\Delta l_0 = 57,9 \text{ мкм}$. Такая погрешность измерения длины потребует в худшем случае применения штангенциркуля либо в лучшем случае – микрометра. Вследствие этого начальная базовая длина шлейфа должна быть, по крайней мере, меньше 5 см.

Окончательную относительную погрешность измерения для конкретных значений параметров установки можно получить из соотношения

$$\delta_{L_X} = \frac{\Delta L_X}{\overline{L_X}}, \quad (7.21)$$

где $\overline{L_X}$ находят из формулы (7.14). Чтобы δ_{L_X} не была большой за счёт возможной особенности в знаменателе (7.21), нужно положить, чтобы

$$\frac{L_1 + L_2}{2} = 2l_0 L_{\Pi} \frac{(N + 1)}{N}. \quad (7.22)$$

Тогда

$$L_X \approx l_0 L_{\Pi} \frac{(N + 1)}{N}. \quad (7.23)$$

С учётом значения погонной индуктивности диапазон $L_X \sim 1$ нГн будет перекрываться при значениях начальной длины шлейфа, взятой в сантиметрах

$$l_0 = \frac{L_X \cdot N}{L_{\Pi}(N + 1)} = \frac{N}{N + 1} \text{ (см)}. \quad (7.24)$$

При $N = 2$ $l_0 = 6,6$ мм, а при $N = 5$ — $l_0 = 8,3$ мм. Малое значение ΔL_X может быть обеспечено измерением начальной длины шлейфа l_0 и последующей укороченной l_0/N длины шлейфа микрометром.

7.3. Выбор метода измерения отрицательной вносимой индуктивности сплошного проводящего цилиндра с азимутальной плотностью вихревого тока

В главе 3 построена последовательная теория, которая позволяет вычислять значение вносимой индуктивности сплошного проводящего цилиндра с азимутальной плотностью вихревого тока.

Перечислим физические свойства вносимой индуктивности, которые важны для количественного измерения эффекта.

7.3.1. Физические свойства вносимой индуктивности

Вносимой индуктивностью обладает любой проводящий (или полупроводящий) стержень (его высота h больше радиуса стержня R) или проводящая цилиндрическая плёнка (её высота h меньше радиуса R), помещённые в однородное переменное магнитное поле B . При этом важна его ориентация к направлению магнитного поля. Она представлена на рис. 7.3.

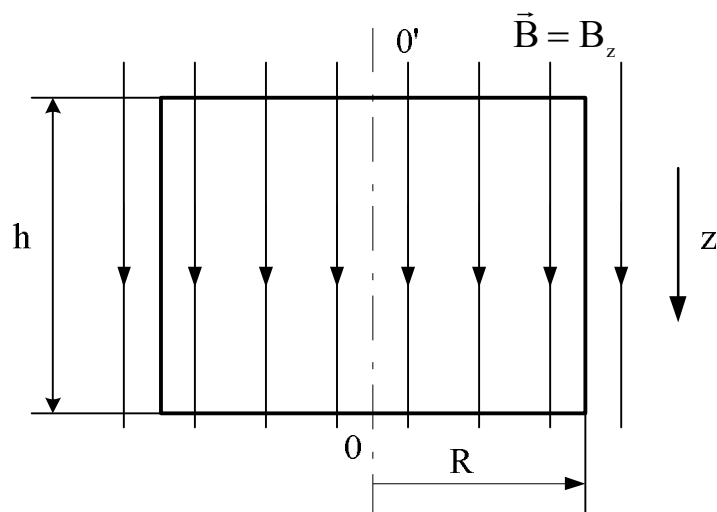


Рис. 7.3. Ориентация силовых линий магнитного поля по отношению к оси цилиндра

Как видно из рис. 7.3, ось цилиндра $00'$ направлена по оси z и совпадает с направлением силовых линий индукции магнитного поля B .

Переменное магнитное поле B возбуждает во всём проводящем цилиндре силовые линии вихревого электрического поля E , имеющего одну азимутальную компоненту E_ϕ . Силовые линии поля E представляют собой концентрические окружности, которые навиваются вокруг оси z . Вихревое электрическое поле создаёт в каждой точке проводящего цилиндра вектор плотности тока, который имеет также одну азимутальную компоненту J_ϕ . Эта плотность тока и представляет собой ток отклика вещества на воздействие внешнего переменного магнитного поля. Ток отклика возникает во всём проводящем цилиндре или плёнке и представляет собой обнаруженные экспериментально токи Фуко.

Имея одну компоненту плотности тока, уже сам ток порождает вокруг себя переменное магнитное поле отклика вещества. Магнитное поле отклика уже имеет две компоненты B_z и B_r . Они сдвинуты по фазе на $\pi/2$, по отношению к внешнему магнитному полю. Интерферируя внутри проводящего цилиндра, они создают суммарное магнитное поле во всём его объёме.

Энергия суммарного магнитного поля, усреднённая за период изменения поля, расходуется на нагрев проводящего вещества и на запас энергии, связанной с индуктивными свойствами вещества. Перераспределение энергии существенно зависит от частоты и поэтому вносимая индуктивность имеет частотную зависимость.

Важнейший результат теории состоит в следующем: **вносимая индуктивность проводящего цилиндра $L_{вн}$ зависит от частоты.** Частотная зависимость вносимой индуктивности является квадратичной зависимостью.

На рис. 7.4 схематично представлена её частотная зависимость, следующая из формулы (3.82) раздела 3

$$\frac{L_{вн}}{L_*} = (1 + \beta^2 / 3 - 2\pi\beta) / \beta^2, \quad (7.25)$$

где

$$L_* = \mu_0 \pi R^2 / h \quad (7.26)$$

– масштаб вносимой индуктивности, зависящий от геометрических размеров цилиндрической пластины R и h . Чем больше отношение квадрата радиуса к высоте пластины, тем больше масштаб вносимой индуктивности.

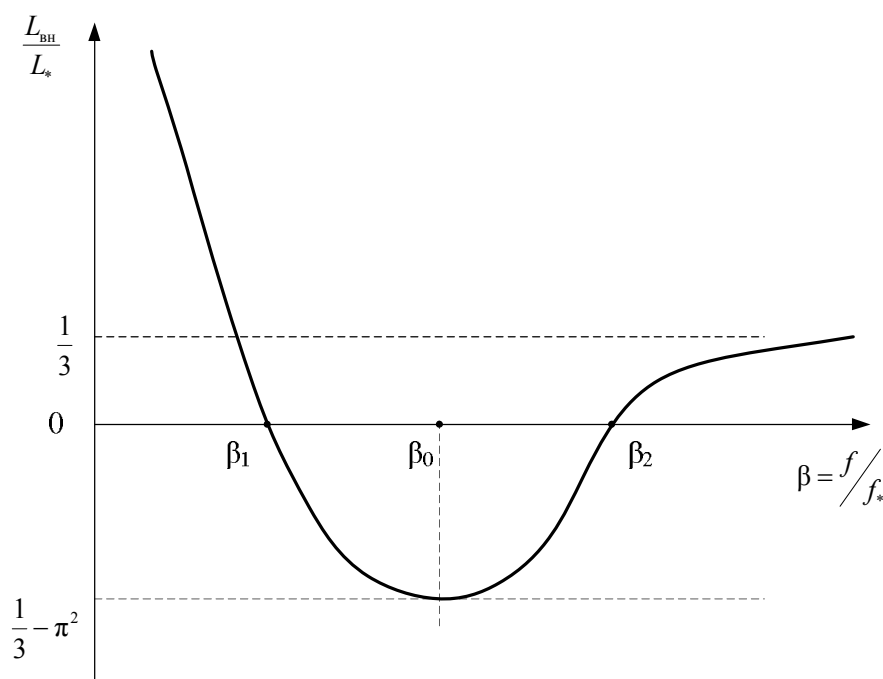


Рис. 7.4. Частотная характеристика вносимой индуктивности

В таблице 7.1 приведены значения масштаба индуктивности в наногенри, получаемые на геометрических размерах цилиндрической пластины миллиметровых масштабов. Из соотношения (7.26) видно, что большие значения масштаба достигаются в тонких плёнках (выполняется условие $h < R$).

Т а б л и ц а 7.1

Значения масштаба вносимой индуктивности в наногенри

$h(\text{мм}) \backslash R(\text{мм})$	1	2	3	4	5
1	3,94	15,8	35,5	63,2	98,7
5	0,79	3,16	7,11	12,6	19,7
10	0,39	1,58	3,55	6,32	9,87
15	0,26	1,05	2,37	4,21	6,58
20	0,20	0,79	1,78	3,16	4,93

Как видно из табл. 7.1, значение масштаба индуктивности для миллиметровых размеров изменяется почти в пятьсот раз в диапазоне от 0,2 до 98,7 нГн.

β – важнейший параметр распределения, входящий в формулу (7.25), связан с частотой f . Он учитывает вклад магнитных свойств токов Фуко

$$\beta = f / f_*, \quad (7.27)$$

где f – частота переменного магнитного поля, а

$$f_* = 2\rho / (\mu_0 \pi R^2) \quad (7.28)$$

– масштаб частоты, зависящий от удельного сопротивления проводящей пластины. R – радиус проводящей пластины. В таблице 7.2 приведены значения удельного сопротивления материалов, используемых в разнообразных электрических цепях.

Т а б л и ц а 7.2

**Значения удельного сопротивления
различных проводящих материалов [28]**

Материал	Удельное сопротивление ρ (нОм·м)
серебро	14,9
медь	15,5
золото	20,6
алюминий	25,0
вольфрам	48,9
молибден	50,3
кобальт	55,7
никель	61,4
латунь	212
нихром	1000
KEF (кремний электронный)	$1.0 \cdot 10^6$
германий	$0,47 \cdot 10^9$
кремний	$2,3 \cdot 10^{12}$

Как видно из табл. 7.2, для перечисленных проводников и полупроводников удельное сопротивление может изменяться на 12 порядков.

В таблице 7.3 приведены значения масштаба частоты (7.28) для различных материалов и радиусов цилиндра, приводимых в табл. 7.1.

Т а б л и ц а 7.3

**Масштаб частоты в кГц для различных материалов
и радиусов миллиметрового цилиндра**

Материал \ R (мм)	1	2	3	4	5
серебро	7,55	1,89	0,84	0,47	0,30
медь	7,85	1,96	0,87	0,49	0,31
золото	10,4	2,61	1,16	0,65	0,42

Окончание табл. 7.3

Материал\R(мм)	1	2	3	4	5
алюминий	12,7	3,17	1,41	0,79	0,51
вольфрам	24,8	6,19	2,75	1,55	0,99
молибден	25,5	6,37	2,83	1,59	1,02
кобальт	28,2	7,05	3,14	1,76	1,13
никель	31,1	7,78	3,46	1,94	1,24
латунь	107,4	26,9	11,9	6,71	4,30
нихром	506,7	126,7	56,3	31,7	20,3
КЕФ (кремний электронный)	$5,07 \cdot 10^5$	$1,27 \cdot 10^5$	$5,62 \cdot 10^4$	$3,2 \cdot 10^4$	$2,0 \cdot 10^4$
германий	$238 \cdot 10^6$	$59 \cdot 10^6$	$26 \cdot 10^6$	$15 \cdot 10^6$	$95 \cdot 10^5$
кремний	$1,2 \cdot 10^{12}$	$0,3 \cdot 10^{12}$	$0,13 \cdot 10^{12}$	$7,3 \cdot 10^{10}$	$4,7 \cdot 10^{10}$

Из табл. 7.3 видно, что рассчитанные масштабы частот лежат в диапазоне от 0,3 до $1,2 \cdot 10^{12}$ кГц и указывают на частотные возможности метода.

На рис. 7.4 видны важнейшие точки частотной характеристики вносимой индуктивности:

$$\frac{F_1}{f_*} = \beta_1 = 3\pi \left(1 - \sqrt{1 - 1/(3\pi^2)}\right) \approx 0,1605. \quad (7.29)$$

– первая характеристическая частота, на которой вносимая индуктивность обращается первый раз в нуль.

Значение $\beta_0 = 1/\pi = 0,3183$ соответствует точке минимума, в которой вносимая индуктивность принимает самое минимальное отрицательное значение

$$\frac{L_{\text{вн}}(0)}{L_*} = 1/3 - \pi^2 = -9,536. \quad (7.30)$$

Значение (7.31)

$$\frac{F_2}{f_*} = \beta_2 = 3\pi \left(1 + \sqrt{1 - 1/(3\pi^2)}\right) \approx 18,69 \quad (7.31)$$

соответствует второй характеристической частоте F_2 , на которой приведённая индуктивность снова обращается в нуль.

Как видно из формулы (7.25), нули индуктивности делят частотный диапазон на три части: первый интервал $0 < \beta < \beta_1$ следует отнести к низкочастотному (в нём приведённая индуктивность большая положительная величина, по сравнению с масштабом; токи Фуко проявляют свои парамагнитные свойства); интервал $\beta_1 < \beta < \beta_2$ отнесём к среднечастотному (в нём приведённая индуктивность всегда отрицательная; здесь проявляется диамагнетизм токов Фуко); интервал $\beta_2 < \beta < \infty$ отнесём к высокочастотному (в нём приведённая индуктивность снова положительна и на очень больших частотах перестаёт зависеть от частоты, достигая максимального значения $L_*/3$; здесь токи Фуко снова парамагнитны).

7.3.2. Физические свойства измерительного соленоида

На рис. 7.5 показано в разрезе взаимное расположение в измерительном цилиндрическом соленоиде проводящего стержня (или проводящей пластины).

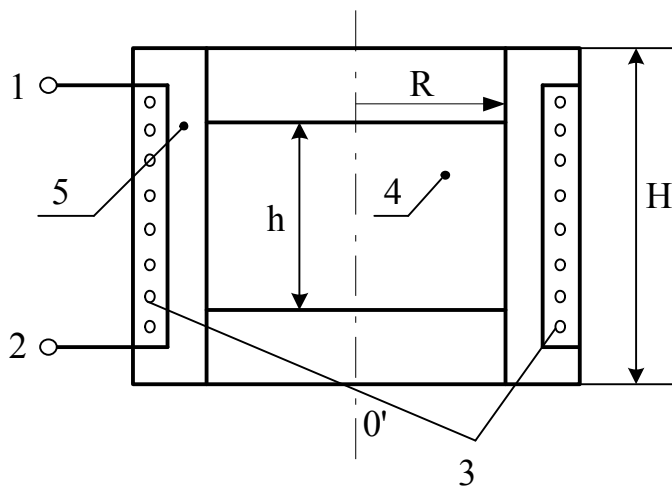


Рис. 7.5 – Измерительный соленоид с вносимой индуктивностью:
1-2 – клеммы подводящих проводов; 3 – область однослойной намотки индуктивности цилиндрического соленоида; 4 – проводящий металлический цилиндр (пластина);
5 – пермаллоевая (или фторопластовая) стенка каркаса

Такое размещение проводящего цилиндра позволяет достигнуть необходимой осевой ориентации. Силовые линии магнитного поля, создаваемые измерительным соленоидом, будут совпадать по направлению с его осью. Чтобы немного уменьшить степень радиальной неоднородности магнитного поля, возникающее на краю катушки, сердечник должен иметь хотя бы высоту $h=N/3$, где N – высота измерительного соленоида. Предпочтительно иметь соотношение $h/H \ll 1$ (приближение тонкой пластины или плёнки).

Измеренное значение индуктивности относительно подводящих проводов 1-2 обозначим через L . Оно будет состоять из двух слагаемых

$$L = L_0 + L_{\text{вн}}, \quad (7.32)$$

где L_0 – индуктивность намотанной катушки (измерительного соленоида) без проводящего цилиндра; $L_{\text{вн}}$ – вносимая индуктивность проводящего цилиндра (пластины).

Индуктивность измерительного соленоида будем рассчитывать из соотношений, полученных в главе 4

$$\frac{L}{L_*} = N \frac{R}{d}, \quad (7.33)$$

где L_* – масштаб индуктивности соленоида (4.5).

По соотношению (4.5) протабулирован масштаб индуктивности соленоида в зависимости от радиуса R , принимающего сантиметровые размеры. Результаты девяти значений радиуса представлены в таблице 7.4.

Т а б л и ц а 7.4

Масштаб индуктивности соленоида L^* для разных R

$R(\text{см})$	2	4	6	8	10	20	30	40	50
$L^*(\text{мкГн})$	0,079	0,16	0,24	0,32	0,40	0,79	1,2	1,6	2,0

Эксперименты, проведённые с ленточными соленоидами (микрокатушками) в [5], показывают, что прогнозируемая величина индуктивности не зависит от частоты практически до частоты отсечки. Это указывает на то, что вплоть до таких высоких частот фазовый сдвиг между током и потоком остаётся нулевым.

7.3.3. Метод измерения индуктивности на пассивном фильтре первого порядка

В качестве первого метода измерения индуктивности рассмотрим низкочастотный фильтр первого порядка и выясним его достоинства и недостатки. Его идея строится на приводимой схеме на рис. 7.6.

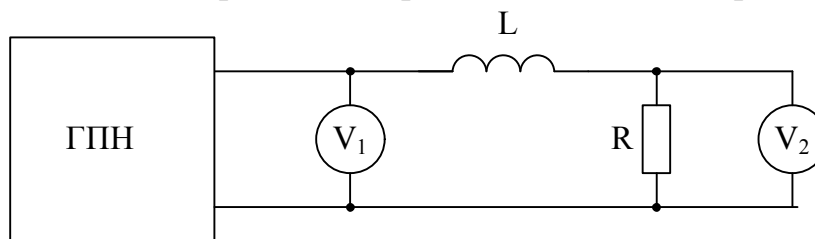


Рис. 7.6. Схема низкочастотного фильтра первого порядка

На схеме использованы обозначения: ГПН – генератор переменного напряжения, L – измеряемая индуктивность, R – активное сопротивление цепи. Идея измерений заключается в использовании двух одинаковых вольтметров переменного тока V_1 и V_2 для измерения входного напряжения U и напряжения U_R на резисторе R соответственно.

Получим конечное математическое выражение для неизвестной индуктивности L . Зададим переменный ток в цепи в виде

$$i = i_0 \cos(\omega t). \quad (7.34)$$

Тогда векторное представление напряжения на индуктивности опережает векторное представление тока в цепи на $\pi/2$:

$$U_L = L \frac{di}{dt} = -i_0 \omega L \sin(\omega t) = i_0 \omega L \cos(\pi/2 + \omega t). \quad (7.35)$$

Векторное представление падения напряжения на сопротивлении совпадает по фазе с током в цепи

$$U_R = iR = i_0 R \cos(\omega t). \quad (7.36)$$

Векторное представление напряжения U , подаваемое с ГПН, опережает ток в цепи на угол φ , который вычисляется из соотношения (см. векторную диаграмму на рис. 7.7)

$$\operatorname{tg} \varphi = U_{0L} / U_{0R}, \quad (7.37)$$

где U_{0R} и U_{0L} – амплитудные значения напряжений на сопротивлении и индуктивности соответственно

$$U_{0R} = i_0 R, \quad U_{0L} = i_0 \omega L. \quad (7.38)$$

Из векторной диаграммы видно, что

$$U_0^2 = U_{0R}^2 + U_{0L}^2. \quad (7.39)$$

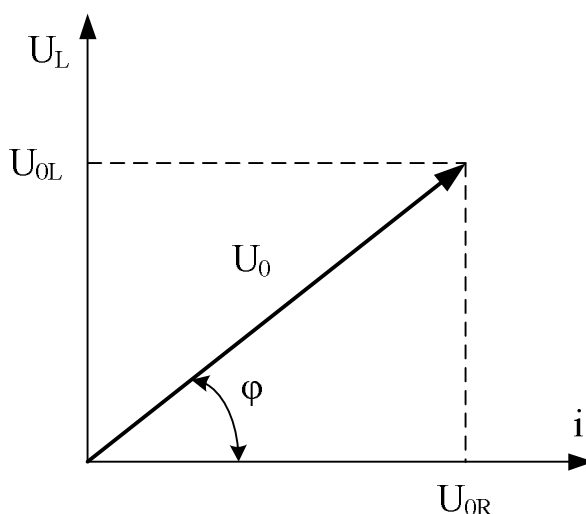


Рис. 7.7. Векторная диаграмма напряжений и токов

Из последнего соотношения легко получить расчётное соотношение для индуктивности в безразмерном виде

$$\frac{L}{L_{*0}} = \sqrt{\frac{U_0^2}{U_{0R}^2} - 1}, \quad (7.40)$$

где

$$L_{*0} = R / \omega = R / (2\pi f) \quad (7.41)$$

– масштаб индуктивности применяемого метода измерений. Он зависит от двух переменных: частоты измерений f и сопротивления R . В конечное соотношение вошли измеряемые вольтметрами V_1 и V_2 напряжения. Соотношение (7.40) позволяет уверенно проводить измерения индуктивности в диапазоне

$$0,1 \leq L / L_{*0} \leq 10. \quad (7.42)$$

Это соответствует тангенсу угла наклона фазы в $5,7^\circ$ (область малых индуктивностей) и тангенсу угла наклона фазы $84,3^\circ$ (область больших индуктивностей).

Произведём необходимые оценки для вносимой индуктивности, которая может дать марганцовистая латунная пластинка радиусом $R=10$ мм и толщиной $h=1$ мм. Вычисляем масштаб частоты

$$f_* = \frac{2\rho}{\mu_0 \pi R^2} = \frac{2 \cdot 2,12 \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \pi \cdot 10^{-4}} = 1,06 \text{ кГц}.$$

Масштаб индуктивности

$$L_* = \frac{\mu_0 \pi R^2}{h} = \frac{4\pi^2 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} \approx 400 \text{ нГн}.$$

Первый нуль индуктивности реализуется на частоте

$$F_1 = \beta_1 \cdot f_* = 0,1605 \cdot 1,06 \cdot 10^3 = 170 \text{ Гц}.$$

Частота F_0 , на которой достигается минимум вносимой индуктивности

$$F_0 = \beta_0 \cdot f_* = 0,3183 \cdot 1,06 \cdot 10^3 = 340 \text{ Гц}.$$

Значение вносимой индуктивности в этом минимуме

$$L_{\text{вн}}(\beta_0) = (1/3 - \pi^2) \cdot L_* = -9,536 \cdot 400 \cdot 10^{-9} \approx -4 \text{ мкГн}.$$

Полученные числа позволяют определить частотный диапазон измерений и значения требуемых и получаемых при измерении индуктивностей:

1. Индуктивность L_0 измерительного соленоида без сердечника должна быть хотя бы в два раза больше по модулю, чем $L_{\text{вн}}(\beta_0) = -4$ мкГн, то есть $L_0 \sim 8$ мкГн. В этом случае суммарная L (см. формулу (7.32)) не сможет стать отрицательной.

2. При измерении при частоте $F_1 = 170$ Гц вносимая индуктивность $L_{\text{вн}}$ (см. формулу (7.25)) должна обратиться в нуль. В этой точке измеряемое значение L будет совпадать со значением $L_0 = 8$ мкГн.

3. На частоте F_0 значение L будет равно примерно 4 мкГн. Это будет самое маленькое значение, которое будут давать измерения для латуни. Здесь проявляется отмеченный во введении экспериментальный факт того, что введение латунного сердечника уменьшает суммарную индуктивность катушки.

4. Минимальное значение индуктивности должно совпадать с масштабом измеряемой индуктивности (7.41) в обсуждаемом методе измерений. Вычисляя у этой индуктивности для частоты 340 Гц омическое сопротивление, получим для $R = \omega L_{*0} = 8,5$ миллиОм. Это очень маленькая величина, которая перегрузит генератор переменного напряжения и не позволит провести измерения с необходимой точностью.

7.3.4. Метод резонансного измерения индуктивности на пассивных фильтрах второго порядка

Пассивный фильтр второго порядка содержит элементы: L – индуктивность, C – ёмкость, R – омическое сопротивление. При построении фильтра второго порядка эти элементы в схему фильтра можно включать различно. Существует четыре варианта такого включения. Исследуем достоинства и недостатки всех четырёх вариантов.

На рис. 7.8 представлен первый вариант построения такого фильтра.

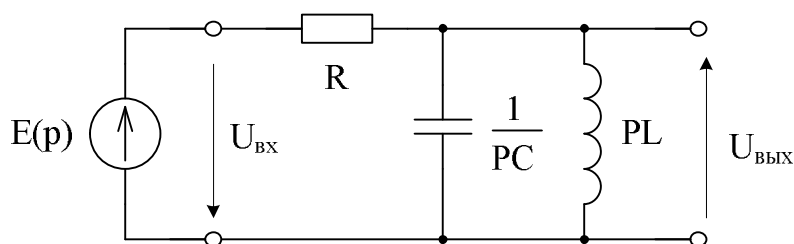


Рис. 7.8. Схема полосового низкочастотного фильтра

Передающая функция полосового фильтра на переменном токе, представленного на рис. 7.8, имеет вид

$$F(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{1/pC \cdot pL / (pL + 1/pC)}{R + 1/pC \cdot pL / (pL + 1/pC)} = \frac{p/CR}{p^2 + p/CR + 1/LC}, \quad (7.43)$$

где p – переменная Лапласа.

Вводя переменные: $\omega_p = 1/\sqrt{LC}$ – частота полюса, $d_p = \sqrt{L/C}/R$ – затухание фильтра, $Q = 1/d_p$ – добротность фильтра, получим передаточную функцию полосового фильтра в виде

$$F(p) = \frac{p\omega_0 d_0}{p^2 + p\omega_p d_p + \omega_p^2}, \quad (7.44)$$

где d_0 и ω_0 – затухание и частота нуля, d_p и ω_p – затухание и частота полюса. В (7.44) учтено, что частота полюса совпадает с частотой нуля фильтра второго порядка.

Переходя к комплексному коэффициенту передачи путём подстановки в (7.44) $p = j\omega$ и выделяя в (7.44) действительную и мнимую части, получим выражения для амплитудно-частотной характеристики фильтра (АЧХ) и фазово-частотной характеристики (ФЧХ). Качественный вид амплитудно-частотной характеристики представлен на рис. 7.9.

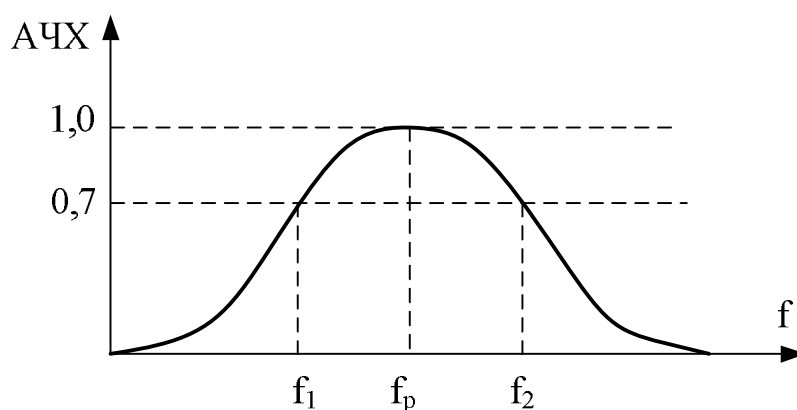


Рис. 7.9. Амплитудно-частотная характеристика полосового фильтра

Из неё видно, что самая большая амплитуда, пропускается фильтром на частоте полюса $f_p = \omega_p / 2\pi$. f_1 и f_2 – частоты пропускания фильтра на уровне 0,707. Полоса пропускаемых частот связана с добротностью фильтра соотношением

$$Q = f_p / (f_2 - f_1). \quad (7.45)$$

На рис. 7.10 приведён качественный вид фазово-частотной характеристики полосового фильтра.

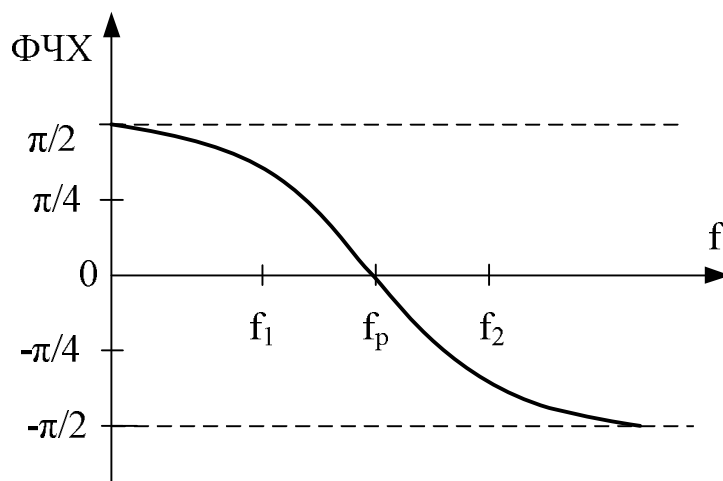


Рис. 7.10. Фазово-частотная характеристика полосового фильтра

Чем уже полоса пропускания фильтра, тем круче изменения ФЧХ в области f_p при малых R . Отсюда следует, что для обеспечения точных измерений нужно реализовать высокодобротную цепь. Это означает, что снова требуется уменьшать активное сопротивление R полосового фильтра. А это, в свою очередь, снова ограничено возможностью источника переменного напряжения.

Исследуем измерительные возможности второго варианта схемы пассивного фильтра, представленного на рис. 7.11.

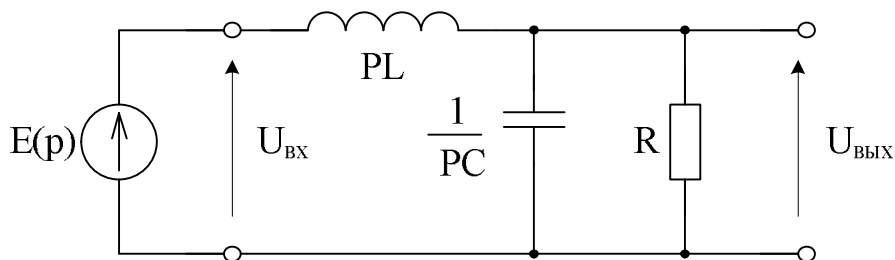


Рис. 7.11. Второй вариант схемы пассивного фильтра

Второй вариант схемы также имеет большой недостаток. При расчёте передаточной функции в конечное соотношение в частоту полюса входит активное сопротивление.

Исследуем измерительные возможности 3 варианта схемы пассивного фильтра, представленного на рис. 7.12.

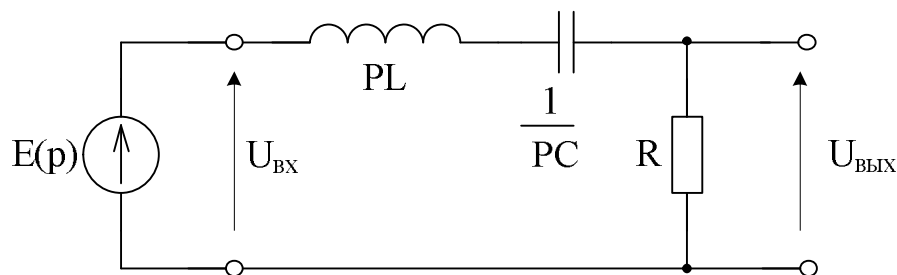


Рис. 7.12. Третий вариант схемы пассивного фильтра

После получения выражения для передаточной функции третьего варианта схемы можно сделать вывод о том, что он имеет те же недостатки, что и фильтр на рис. 7.7. Нужно уменьшать активное сопротивление R .

Наиболее удачной схемой является схема режекторного (заграждающего) фильтра (РФ), представленного на рис. 7.13.

Его передаточная функция имеет вид

$$F(p) = \frac{p^2 + \omega_0^2}{p + p\omega_p d_p + \omega_p^2}. \quad (7.46)$$

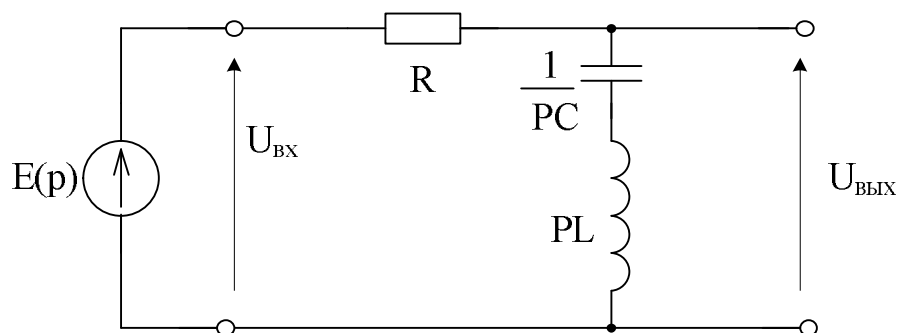


Рис. 7.13. Схема режекторного фильтра

В этом фильтре, как и ранее, частота среза ω_0 и частота полюса ω_p совпадают.

Амплитудно-частотная характеристика режекторного фильтра получается из (7.46)

$$АЧХ = |F(j\omega)| = \frac{|\omega_p^2 - \omega^2|}{\sqrt{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\omega\omega_p d_p)^2}}. \quad (7.47)$$

Её качественный ход представлен на рис. 7.14.

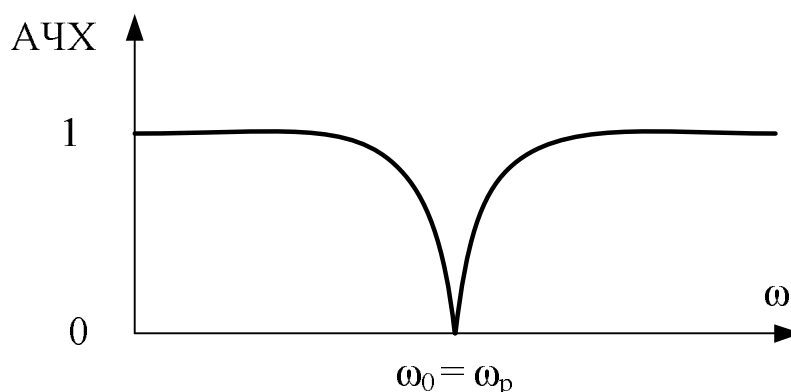


Рис. 7.14. АЧХ режекторного фильтра

Самое важное достоинство режекторного фильтра, предлагаемого для измерений, заключается в том, что получаемая частота нуля (частота полюса) не зависит от дополнительно учитываемых паразитных параметров индуктивности L , ёмкости C и их активных сопротивлений r_L , r_C .

Отсюда следует методика измерений. Настроив частоту генератора переменного напряжения $E(p)$, находим частоту, на которой реализуется «0» коэффициента передачи режекторного фильтра. Зная частоту и ёмкость конденсатора фильтра, получаем значение индуктивности из формулы

$$L = 1 / [(2\pi f)^2 C], \quad (7.48)$$

где f – частота обнуления коэффициента передачи РФ совпадает с частотой нуля.

Предложенный точный метод измерений был применён в разделе 7.6. для измерения частотной зависимости отрицательной индуктивности латунного цилиндра макроскопических размеров. На основе соотношения (7.48) был построен резонансный метод автоматизированного измерения частотной зависимости любых видов индуктивности в широкой полосе частот, излагаемый ниже.

7.3.5. Способ измерения частотной зависимости индуктивности

Предлагаемая эквивалентная схема цепи измерения индуктивности L_u представлена на рис. 7.15.

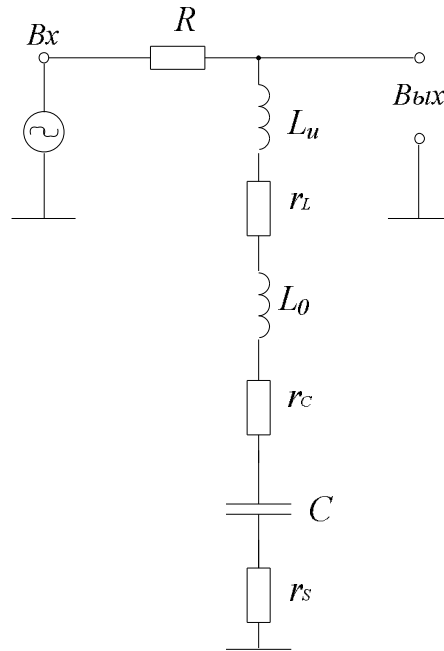


Рис. 7.15. Эквивалентная схема измерения частотной зависимости индуктивности:

L_u – измеряемая индуктивность; L_0 – начальная индуктивность;
 r_L – суммарное активное сопротивление начальной r_{L0}
и измеряемой r_{Lu} индуктивностей;
 r_c – последовательное активное сопротивление конденсатора;
 r_s – активное сопротивление электронного ключа

Передаточная функция цепи

$$F(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{p^2 + p \frac{r_L + r_s + r_c}{L_0 + L_u} + \frac{1}{C(L_0 + L_u)}}{p^2 + p \frac{R + r_L + r_s + r_c}{L_0 + L_u} + \frac{1}{C(L_0 + L_u)}}. \quad (7.49)$$

Эта же передаточная функция в общем виде

$$F(p) = \frac{p^2 + p d_0 \omega_0 + \omega_0^2}{p^2 + p d_p \omega_p + \omega_p^2}. \quad (7.50)$$

Из последних выражений находим частоту нуля и частоту полюса

$$\omega_0 = \omega_p = \frac{1}{\sqrt{C(L_0 + L_u)}}, \quad (7.51)$$

затухание нуля

$$d_0 = \sqrt{\frac{C}{(L_0 + L_u)}} (r_L + r_s + r_c), \quad (7.52)$$

затухание полюса

$$d_p = \sqrt{\frac{C}{(L_0 + L_u)}} (R + r_L + r_s + r_c), \quad (7.53)$$

амплитудно-частотную

$$A(\omega) = \frac{\left(\frac{1}{C(L_0 + L_u)} - \omega^2 \right)^2 + \left(\omega \frac{r_L + r_s + r_c}{L_0 + L_u} \right)^2}{\left(\frac{1}{C(L_0 + L_u)} - \omega^2 \right)^2 + \left(\omega \frac{R + r_L + r_s + r_c}{L_0 + L_u} \right)^2} \quad (7.54)$$

и фазово-частотную характеристики

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega \frac{r_L + r_s + r_c}{L_0 + L_u}}{\frac{1}{C(L_0 + L_u)} - \omega^2} - \arctg \frac{\omega \frac{R + r_L + r_s + r_c}{L_0 + L_u}}{\frac{1}{C(L_0 + L_u)} - \omega^2}, \quad (7.55)$$

а также коэффициент передачи на частоте полюса (нуля)

$$M(\omega_p) = \frac{r_L + r_s + r_c}{R + r_L + r_s + r_c}. \quad (7.56)$$

Анализ приведённых выражений показывает, что частота полюса и частота нуля определяются одинаковыми формулами и не зависят от паразитных параметров элементов цепи – активных сопротивлений конденсатора, индуктивностей и электронных ключей.

На частоте нуля (полюса) АЧХ принимает минимальное значение, определяемое формулой (7.56). Учитывая, что в измерительной схеме сопротивления r_{L0} , r_s , r_c являются постоянными величинами, то величина M является функцией, зависящей от активного сопротивления измеряемой катушки.

Фазовый сдвиг на частоте полюса (нуля) равен 0° и зависит от параметров трёх элементов – L_0 , L_u и C .

Из формулы (7.55) находим частоту, на которой фазовый сдвиг равен 0°

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{C(L_0 + L_u)}}. \quad (7.57)$$

Методика измерения индуктивности заключается в том, что нужно, перестраивая генератор синусоидальных колебаний, найти частоту, на которой фазовый сдвиг равен 0° . А зная измеренную частоту, из последнего выражения находим расчётную формулу для определения измеренной индуктивности

$$L_u = \frac{1}{(2\pi f)^2 C} - L_0. \quad (7.58)$$

За счёт введения начальной индуктивности (путём закорачивания измерительных выводов) можно выполнить калибровку прибора.

Для согласования диапазона перестройки частоты генератора и частоты настройки цепи (частоты полюса) введены поддиапазоны – путём дискретного изменения ёмкостей конденсаторов. Результаты расчёта АЧХ и ФЧХ в среде Micro-Cap 11 представлены на рис. 7.16 для малого значения затухания d_0 и на 7.17 для большого значения затухания.

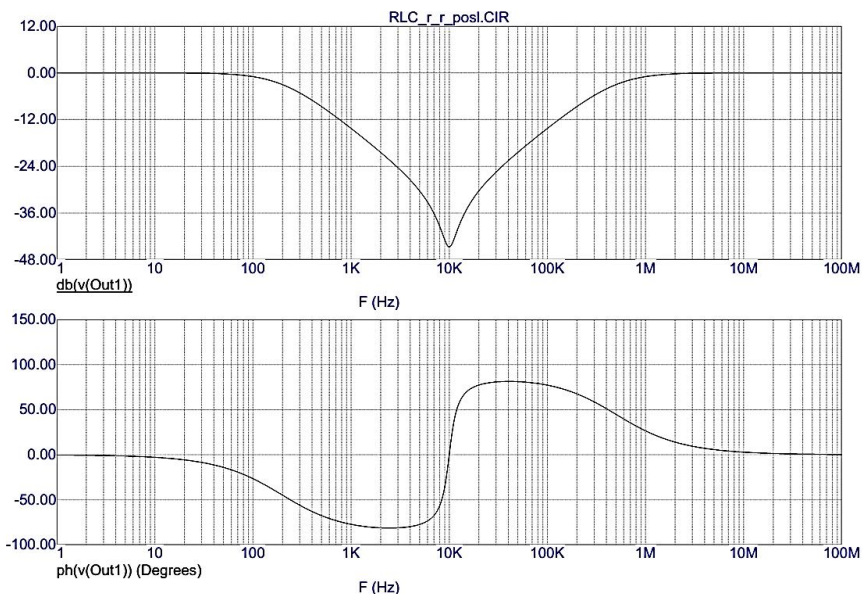


Рис. 7.16. АЧХ и ФЧХ для малого коэффициента затухания

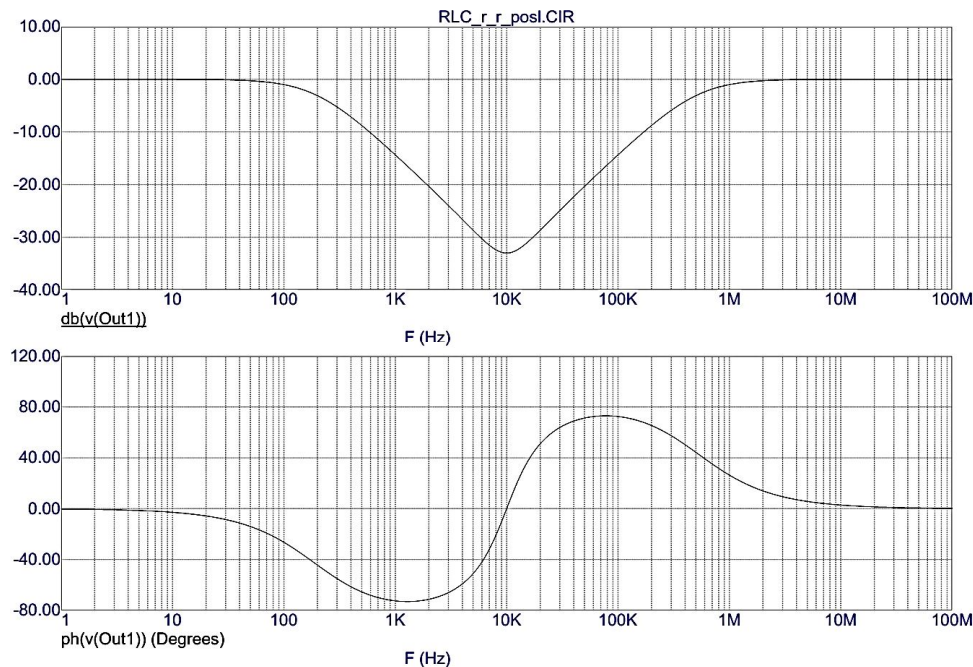


Рис. 7.17. АЧХ и ФЧХ для большого коэффициента затухания

При больших значениях затухания нуля d_0 АЧХ на частоте полюса имеет «плоский» характер (рис. 7.17), поэтому нахождение частоты полюса лучше осуществлять фазовым методом.

7.4. Измерения частотной зависимости динамической индуктивности PGS- и RPGS-индукторов в высокочастотном диапазоне. Сравнения с теорией

В мае 1999 г. Yue сотрудники Стенфордского университета опубликовали работу [7], в которой предложили принципиально новое технологическое решение для построения разнообразных планарных индуктивностей на кремнии с большой добротностью.

На кремниевой подложке был сделан из шести слоёв «пирог», представленный на рис. 7.18. На рис. 7.18 пронумерованы следующие слои: 1 – слой, занятый прямоугольным индуктором толщиной 2 мкм, выполненный из алюминия; слой 2 представляет собой область толщиной 1 мкм, в которой лежит нижний контакт индуктора; область 3 толщиной 5,2 мкм оксида кремния отделяла нижний контакт от металлического слоя заземления 4. Слой заземления 4 был отделён от подложки 6 оксидом кремния 5 толщиной 0,4 мкм. Слой 6 представлял собой подложку из кремния, удельное сопротивление которой можно было изменять от 11 до 19 Ом·см. Толщины слоя заземления и подложки из кремния в работе не приводятся.

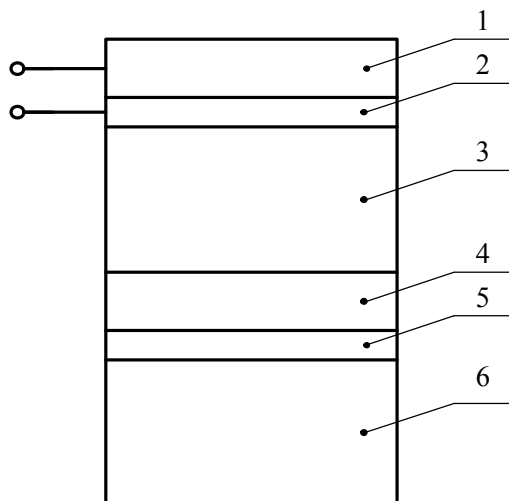


Рис. 7.18. Слои на кремниевой подложке для индуктора с прямоугольной геометрией

Они исследовали три варианта планарного размещения спирального индуктора 1, кремниевой подложки 6 и экрана 4 (сплошного либо узорчатого). В первом варианте они поместили планарный прямоугольный спиральный индуктор на поверхность кремниевой платформы без металлического экрана и назвали его NGS (No Ground Shield).

Во втором варианте для экранировки магнитного поля спирали был добавлен сплошной экран. Конструкция была названа SGS (Solid Ground Shield). В третьем варианте сплошной экран был заменён на узорчатый экран. Такая конструкция была названа индуктор PGS (Patterned Ground Shield).

Экспериментальные частотные зависимости добротности указанных индукторов представлены на рис. 7.19 (кривые взяты из рисунка 3 работы [7]). Эксперименты показали, что частотные зависимости в диапазоне от 0,2 до 7 ГГц дают самое большое значение добротности на определённой частоте для узорчатого проводящего экрана PGS. Сплошной проводящий экран SGS резко уменьшал добротность индуктора до значений 1,2. Физика такого уменьшения достаточно прозрачная. На сплошном алюминиевом экране возбуждаются токи Фуко, которые в этой ситуации максимально проявляют свои диамагнитные свойства. Введение узорчатого экрана позволяет раздробить области генерации токов Фуко на элементарные участки, которые взаимодействуя между собой, резко уменьшают диамагнитный эффект.

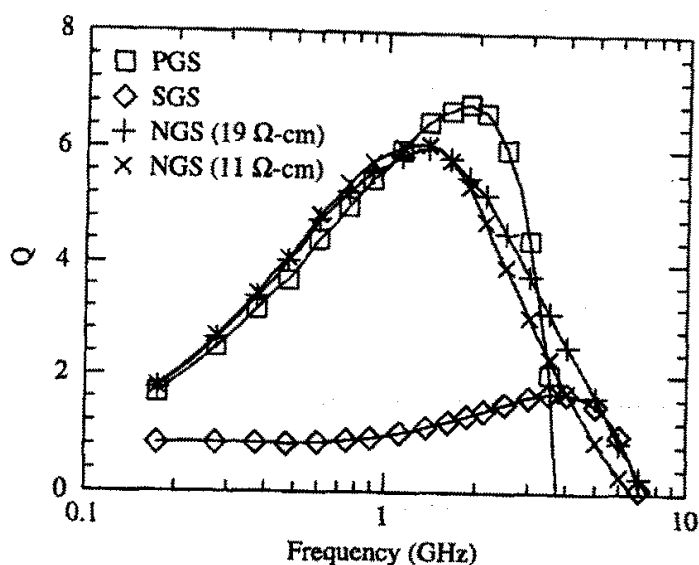


Рис. 7.19. Частотные зависимости GS – индукторов

Следует заметить, что система индуктор, нагруженный на кремний NGS (с удельным сопротивлением, изменяемым в диапазоне от 11 до 19 Ом·см), без дополнительного земляного экрана даёт значения добротности в максимуме, отличающиеся от значений даваемым узорчатым экраном всего на 0,7.

Две технологические конструкции (NGS и PGS) обнаружили частотные свойства индуктивности и добротности, которые принципиально отличались от частотных свойств индуктивности и добротности одиночных индукторов. Как видно из рис. 7.19, частотные зависимости добротности достигали максимума на частоте около 2 ГГц, а затем спадали к нулю на частотах около 7-8 ГГц. Как известно, нуль добротности индуктивности соответствует нулю индуктивности. Физическое объяснение причин существования такого вида частотных зависимостей в работе отсутствовало.

Итальянскими технологами через пять лет была создана планарная индуктивность (работа [8]), которая отличалась от исследованной индуктивности в [7], цилиндрической геометрией и количеством используемых слоёв. В ней спиральный индуктор был нагружен на слоистую цилиндрическую структуру, состоящую из модифицированных слоёв кремния, лежащего на проводящей медной подложке. Медная подложка была дополнительным слоем, отличающим конструкцию, предложенную в [7]. Ещё одна отличительная особенность заключалась в том, что узорчатый экран имел радиальную структуру.

Поскольку геометрия используемых в индукторе переменных магнитных полей была цилиндрической, а это наиболее выгодная для аксиальных вихревых токов геометрия, они получили большие значения добротности, которые укладывались в диапазон от 10 до 15. Заметим, что геометрические размеры созданных индукторов в работе не приводятся.

Эксперименты не только подтвердили ход частотных зависимостей индуктивности и добротности, найденные в [7], но и обнаружили тот факт, что на гигагерцах индуктивность RPGS-индуктора (Radial Patterned Ground Shield) может обратиться в нуль, а на более высоких частотах даже стать отрицательной. Этот факт был объяснён угаданной схемой замещения изготовленной интегральной индуктивности схемой с сосредоточенными параметрами. Расчёты частотных характеристик, проводимые по формулам, следующим из этой схемы, дали удивительно точные частотные характеристики, совпадающие с экспериментальными исследованиями.

На рис. 7.20 представлен вид частотных зависимостей индуктивности и добротности из рисунка 8 работы [8] для индуктора с числом витков $n=2,5$ толщиной $w=14$ мкм и внутренним диаметром $d_{in}=100$ мкм.

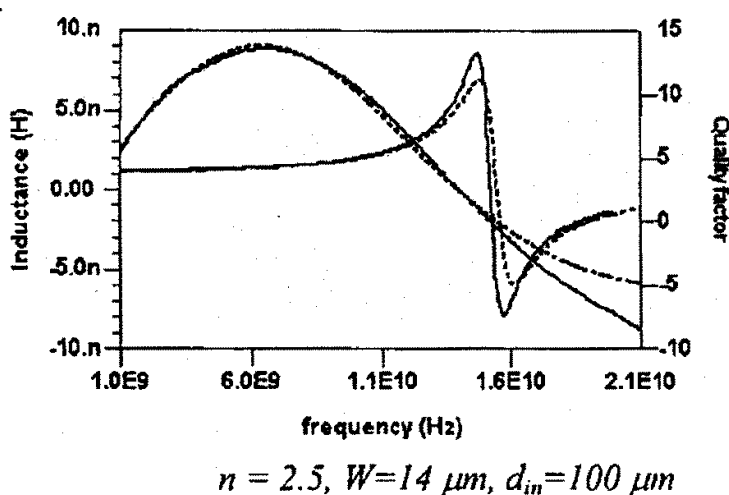


Рис. 7.20. Частотные зависимости цилиндрического индуктора на кремниевых слоях

Как видно из рис. 7.20, в RPGS-индукторе в частотном диапазоне от 1 до 21 ГГц возможны области, в которых индуктивность и добротность системы может быть положительной, и области, в которых индуктивность и добротность может быть отрицательной. Эти области отделены друг от друга нулём индуктивности и добротности. Индуктивность системы изменялась симметрично в пределах от $+8$ до -8нГн с ростом частоты. Физические причины такого поведения индуцированных в полупроводящих слоях токов Фуко объяснены в работе не были.

Проведём некоторую аналогию с известными магнитными явлениями в веществе. Ясно, что положительная индуктивность любой катушки может возникать только в случае, если вещество, введённое в катушку, имеет либо парамагнитные свойства, либо ферромагнитные свойства. В обоих случаях возникает магнитное поле отклика вещества, которое имеет такое направление в пространстве, которое в среднем совпадает с внешним магнитным полем катушки. Если в катушку ввести диамагнетик, то индуктивность катушки с магнетиком должна уменьшиться. При больших значениях коэффициента диамагнитной восприимчивости она может стать даже отрицательной. Но современные значения диамагнитной восприимчивости очень малы. Для твёрдых тел диамагнитная восприимчивость имеет порядок 10^{-5} . Поэтому в диамагнитных явлениях отрицательная индуктивность также не наблюдается.

В рассматриваемом слоёном «пироге» из модифицированных слоёв кремния основной вклад в значение индуктивности дают только токи Фуко. Вид частотных характеристик PGS-индукторов [7, 8] можно объяснить тем, что силовые линии его магнитного поля были нагружены на плёнку из модифицированных слоёв кремния, которая прилегала к спиральному индуктору. Ток индуктора создавал внутри кремниевой плёнки своё переменное магнитное поле. Переменное поле создавало вихревые токи Фуко отклика вещества. Вихревые токи отклика вещества формировали магнитное поле отклика в полупроводящем веществе.

Взаимодействие тока индуктора с суммарным магнитным полем и давало новый вид частотной характеристики PGS-индуктора. На наш взгляд, в отчёте в главе 3 впервые получен теоретический вид частотных характеристик индукторов, нагруженных на проводящую плёнку, и впервые объяснены физические причины такого существенного изменения вида частотных характеристик различных PGS-индукторов.

Как показано в главе 3, токи Фуко, возникающие в проводящей плёнке, могут находиться в трёх состояниях. Первое состояние – это состояние динамической индуктивности, которая зависит от частоты и

имеет особенность на низких частотах. Динамическая индуктивность (в определённых диапазонах частот) может быть положительной (проявляется парамагнитное состояние токов Фуко), а может быть отрицательной (проявляется диамагнитное состояние токов Фуко). Частотная зависимость такой индуктивности описывается соотношениями (3.82), (3.83). Такую зависимость от частоты формируют фазовые сдвиги, возникающие между полями и их интерференция внутри проводящей плёнки.

Как показано в разделе 3.3, токи Фуко могут создавать и другую потоковую индуктивность, которая не зависит от частоты, и может быть как положительной, так и отрицательной. Частотно-независимая индуктивность описывается соотношением (3.127). Мы уверены, что в экспериментах, проведённых в работах [7, 8], в определённом частотном диапазоне была впервые получена частотная зависимость динамической индуктивности.

Важнейшей особенностью таких зависимостей является наличие первого нуля индуктивности (первая характеристическая частота F_1 по нашей терминологии, соотношение (3.84)). Впервые, нуль индуктивности был открыт в работе [7], а затем подтверждён на другой геометрии индуктора в [8]. Второй нуль индуктивности был впервые открыт в работе [4].

Предположим, что индуктивность спирального индуктора мала по сравнению с вносимой индуктивностью слоистого кремния. Заменяем слоёный «пирог» RPGS-индуктора некоторой проводящей плёнкой с радиусом R и толщиной h , имеющей среднее значение удельного сопротивления ρ .

Из графика 7.20 видно, что первая характеристическая частота F_1 находится в точке $1,6 \cdot 10^{10}$ Гц. Из соотношения (3.73) получим значение масштаба частоты $f_* = 10^{11}$ Гц. Примем из графика 7.20 минимальное значение индуктивности плёнки $L_{\min} = -8$ нГн. Пересчитаем это значение в масштаб индуктивности плёнки из соотношения (7.30)

$$L_* = -L_{\min} / 9,54 = 0,84 \text{ нГн.} \quad (7.59)$$

Произведение масштабов связано с удельным сопротивлением и толщиной возбуждаемого в цилиндрической плёнке токового слоя

$$L_* f_* = 2\rho / h. \quad (7.60)$$

Для толщины токового слоя $h=12$ мкм из (7.28) найдём порядок среднего удельного сопротивления проводящей плёнки $\rho=5,0 \cdot 10^{-4}$ Ом·м.

Полученное значение отличается от удельного сопротивления чистого кремния почти на 6 порядков и приближается к удельному сопротивлению электронного кремния ($\rho=1,0 \cdot 10^{-3}$ Ом·м). Это обусловлено

тем, что плёнка индуктора состоит не из чистого кремния, а из слоёв его модификаций. Наиболее сильный сдвиг по удельному сопротивлению в меньшую сторону создаётся металлической плёнкой подложки, которая отсутствовала в экспериментах работы [7].

Радиус токового шнура рассчитывается из соотношения (3.83). Он получается равным $R=50$ мкм и совпадающим с внутренним радиусом используемого спирального индуктора. Во всём остальном пространстве ток высокой частоты не течёт. Скин-эффект отсутствует. Всё это указывает на существование даже при таких частотах в проводящей плёнке Current Crowding Effects.

Второй нуль характеристической частоты F_2 у такой плёнки должен наблюдаться в точке $F_2=18,69f_*=1,9\cdot 10^{12}$ Гц. Как видно из рис. 7.20, 3D ЕМ моделирование не смогло воспроизвести эти значения частоты и поэтому не наблюдало второго нуля характеристической частоты. Индуктивность такой *RPGS*-плёнки на КВЧ должна иметь положительное значение порядка 0,28 нГн.

Сделанные оценки, следующие из теории, с хорошей точностью совпадают с экспериментальными результатами и указывают на то, что класс *RPGS*-индукторов следует отнести к классу вносимых индуктивностей, основные физические параметры однородных проводящих плёнок можно предварительно оценивать из соотношений, полученных в главе 3.

Предложенный метод расчёта проводящих цилиндрических плёнок вносимой индуктивности указывает на то, что технологию *RPGS*-индукторов можно упростить. Для этого в плёнке нужно реализовать три слоя: металл – диэлектрик – полупроводник. Такая трёхслойная индуктивность обсуждается в главе 6 монографии на рис. 6.6. В слое металла необходимо сформировать одновитковое кольцо с диаметром, совпадающим с диаметром плёнки (индуктивность не зависит от амплитуды возбуждаемого в полупроводнике магнитного поля).

Радиальная толщина плёнки на порядок, полтора, меньше диаметра. Плёнка диэлектрика не даёт возможности контакта металла с полупроводником. За плёнкой диэлектрика для работы на гигагерцах использовать любой одинарный слой полупроводника или проводника с большим значением удельного сопротивления. Выбор материала полупроводниковой плёнки с диаметром 100 микрон можно взять из значений масштаба частоты, либо первой характеристической частоты, представленной в табл. 7.5.

**Зависимость первой характеристической частоты
от материала плёнки**

Материал	Удельное сопротивление ρ (ом·м)	Масштаб частоты f^* (Гц)	1-я характеристическая частота F_1 (Гц)
Вольфрам	$48,9 \cdot 10^{-9}$	$9,9 \cdot 10^6$	$1,58 \cdot 10^6$
Никель	$61,4 \cdot 10^{-9}$	$12,5 \cdot 10^6$	$2,0 \cdot 10^6$
Латунь	$2,12 \cdot 10^{-7}$	$43 \cdot 10^6$	$6,9 \cdot 10^6$
Нихром	$1,0 \cdot 10^{-6}$	$0,2 \cdot 10^9$	$32 \cdot 10^6$
KEF (кремний)	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$203 \cdot 10^9$	$32,6 \cdot 10^9$
Германий	0,47	$95 \cdot 10^{12}$	$15 \cdot 10^{12}$
Кремний	$2,3 \cdot 10^3$	$47 \cdot 10^{16}$	$7,5 \cdot 10^{16}$

**7.5. Измерения отрицательной и положительной индуктивности
слоистой проводящей Al-Cu наноплёнки
в низкочастотном диапазоне. Сравнения с теорией**

Американские технологи из штата Огайо запатентовали способ формирования многослойной отрицательной индуктивности, выполненной в виде спирали, нагруженной на сверхтонкие проводящие слои из алюминия Al и меди Cu [4]. Толщина одного двойного слоя составила 2000 Å. Алюминий занимал слой 1334 Å, а медь – 666 Å. Пять двойных слоёв занимали толщину 1 мкм. Проведённые с различным количеством слоёв эксперименты показали, при количестве слоёв, начиная с шести двойных, частотная зависимость индуктивности содержит участки, на которых индуктивность принимает отрицательные значения.

Проанализируем технологическую последовательность создания многослойной индуктивности, адекватность приводимых экспериментальных результатов и проведём сравнения с теорией вносимой индуктивности, построенной в разделе 3.

Для создания микроиндуктора из нано-слоёв алюминия и меди была использована радиочастотная плазменная система напыления. Схематично шаги создания индуктора представлены на рис. 7.21 (отметим, что рисунки, приводимые в разделе 7.5, являются собственностью патента [4]).

Они следующие:

1. Силиконовая подложка.
2. На силиконовой подложке размещается слой оксида кремния толщиной 100 нм.
3. Позитивный тип фоторезиста SPR 955 методом центрифугирования размещался сверху оксида кремния и имел толщину около 10000 Å.
4. На следующем шаге ультрафиолетом формировалась узорчатая маска.

5. В маску попеременно напылялся алюминий и медь методом радиочастотной плазмы.

6. Фоторезист удалялся.

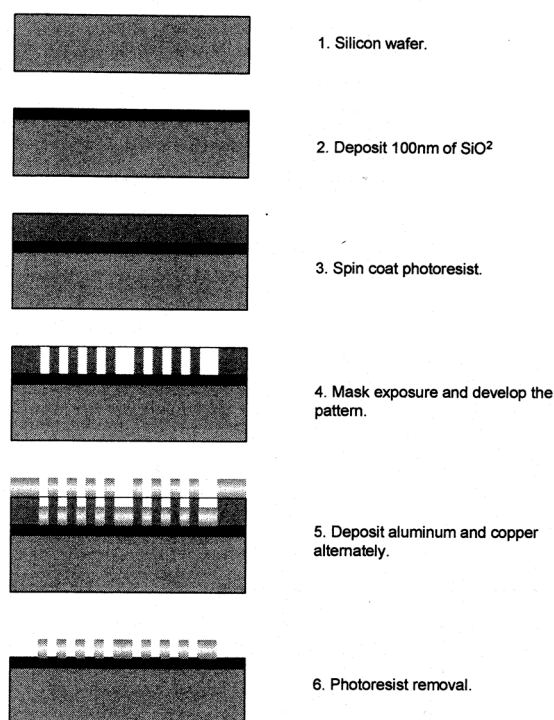


Рис. 7.21. Последовательность нанесения слоёв микроиндуктора

На рис. 7.22 показана конечная структура микроиндуктора. Сверху на микроиндуктор через изолирующий слой напылялась цилиндрическая спираль. Она имела 10 витков, 20 мкм – внутренний радиус, 10 мкм – толщина проводящей дорожки и 10 мкм – расстояние между дорожками. Внешний радиус спирали составил $R=170$ мкм.

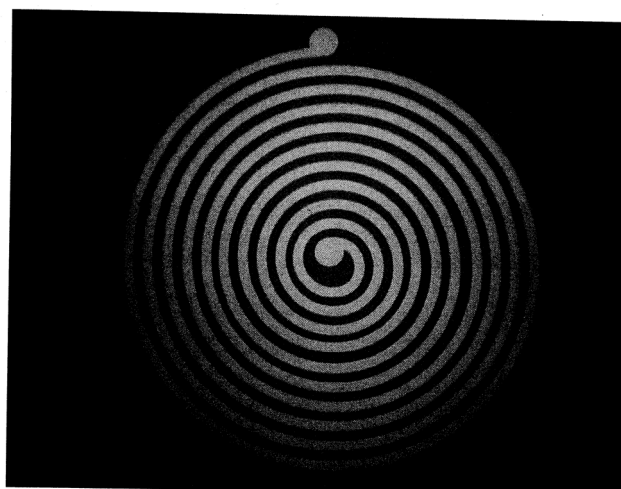


Рис. 7.22. Цилиндрическая спираль микроиндуктора

Для измерения индуктивности использовались приборы: HP85046A S – Parameter Test Set и прибор HP8753C Network Analyser. Два измерительных порта давали результаты, представленные в виде S -параметров, по которым и рассчитывались конечные значения индуктивности. Обсудим результаты экспериментов.

На рис. 7.23 в диапазоне от 0,1 до 10 МГц представлена частотная зависимость индуктивности двух слоёв из Al и Cu.

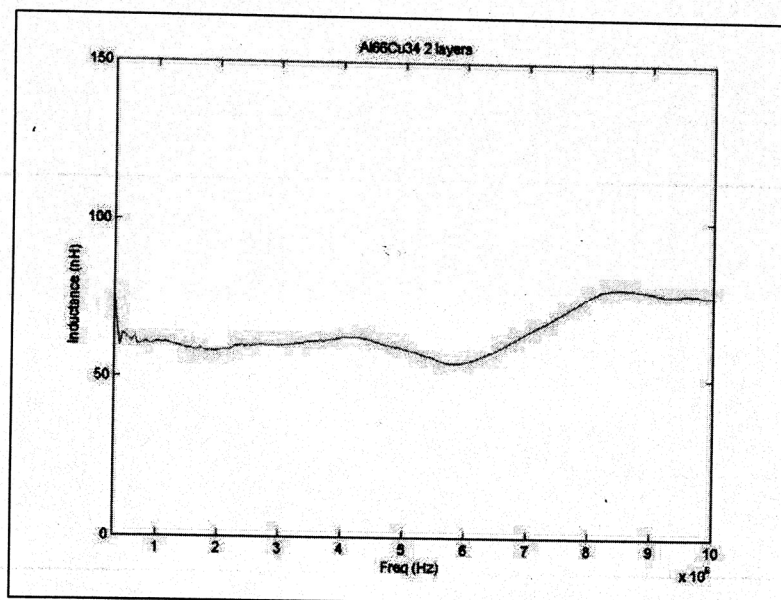


Рис. 7.23. Частотная зависимость индуктивности двухслойной наноструктуры

Как видно из рис. 7.23, индуктивность двухслойной проводящей плёнки положительная величина в исследуемом диапазоне частот. Это совершенно удивительный экспериментальный факт.

Покажем, что в экспериментах американских технологов с двухслойной наноструктурой Al-Cu сделано неожиданное открытие. Они обнаружили наноразмерный индуктивный эффект, который указывает на возможность получения в малых объёмах больших положительных индуктивностей. Но поскольку целью их работы было получение отрицательной индуктивности (название работы: «О методе изготовления тонкоплёночных структур с отрицательной индуктивностью»), то на результат с положительной индуктивностью они не обратили должного внимания.

Докажем, что на графике 7.23 показано существование положительной частотно-независимой потоковой индуктивности (см. (3.127)), теория которой развита в разделе 3. Из рис. 7.23 видно, что на интервале исследуемых частот можно вычислить среднее значение индуктивности 65 нГн с погрешностью в 15 %.

Эта суммарная индуктивность складывается из индуктивности спирали L_s и индуктивности проводящей плёнки L_f

$$L = L_s + L_f.$$

Из раздела 1 по формуле (1.142) и таблице 1.5 можно оценить сначала масштаб индуктивности спирали L_s для радиуса $R=170$ мкм и десяти витков (он равен 0,34 нГн), а затем и саму индуктивность спирали $L_s=13$ нГн. Она оказывается немаленькой величиной и составляет 20 % от суммарной индуктивности. Тогда средняя индуктивность, вносимая двойным слоем проводящей плёнки, положительна

$$L_f=L_\Phi=65-13=52 \text{ нГн.}$$

Для применения расчётных формул для потоковой индуктивности (3.127) и (3.73) необходимо вычислить среднее значение удельного сопротивления $\langle \rho \rangle$ двухслойной плёнки. Для этого воспользуемся законом Ома, предполагая, что в двухслойной плёнке возбуждается плотность вихревого тока азимутального направления. Получим формулу для омического сопротивления одного слоя. Средний радиус плёнки $R_{cp}=R/2$. Длина периметра проводника по средней линии $l=2\pi R_{cp}$. Площадь поперечного сечения проводника, перпендикулярная плотности тока $S=Rh$, где h – толщина плёнки. Отсюда среднее сопротивление первой плёнки $R_1=\rho_1\pi/h_1$, где ρ_1 – удельное сопротивление первой плёнки. Тогда среднее значение удельного сопротивления двухслойной плёнки имеет вид

$$\langle \rho \rangle = \frac{\rho_1\rho_2(h_1+h_2)}{\rho_1h_1+\rho_2h_2}.$$

Подставляя $\rho_1=15$ нОм·м для толщины слоя 666 Å и $\rho_2=25$ нОм·м для толщины слоя 1334 Å, получим $\langle \rho \rangle=17,75$ нОм·м. Для системы, состоящей из двух двойных одинаковых слоёв, среднее удельное сопротивление остаётся тем же самым.

Из соотношения (3.127) и (3.73) можно получить масштаб частоты двух двойных слоёв ($h=0,4$ мкм)

$$f_* = \frac{\langle \rho \rangle}{hL_\Phi} = \frac{17,75 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 10^{-7} \cdot 52 \cdot 10^{-9}} = 0,85 \text{ МГц.}$$

По теории в диапазоне частот от $f_1=0,1f_*$ до $f_2=10f_*$, что соответствует диапазону от 0,085 до 8,5 МГц, потоковая индуктивность не должна зависеть от частоты. Эксперименты указывают на это с приемлемой погрешностью в 15 % в диапазоне, расширенном до 10 МГц.

Теория позволяет вычислить радиус вихревого токового шнура, возникающего в системе двух двойных одинаковых слоёв из соотношения (3.73)

$$R_v = \sqrt{\frac{2\langle \rho \rangle}{\mu_0\pi f_*}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 17,75 \cdot 10^{-9}}{4\pi^2 \cdot 10^{-7} \cdot 0,85 \cdot 10^6}} = 102 \text{ мкм.}$$

Рассчитанный радиус вихревого токового шнура оказался меньше, чем внешний радиус спирали микроиндуктора $R=170$ мкм. Здесь, даже на таких низких частотах, в проводниках с низким значением удельного сопротивления возникает Current Crowding Effects, обнаруженный в медных индукторах на частотах 1 ГГц [6].

В оставшемся внешнем проводящем пространстве вихревого тока нет. Это обстоятельство позволит уменьшить площадь, занимаемую микроиндуктором, в 2,8 раза с сохранением значения индуктивности в 65 нГн. При толщине слоя, занимаемого индуктивностью в 20 мкм и радиусе системы в 200 мкм, объёмная плотность индуктивности, достигаемая предложенной технологией создания таких наноплёнок, можно оценить порядком величины $2,6 \cdot 10^4$ Гн/м³.

Это предельное значение объёмной плотности индуктивности удаётся получить благодаря наноразмерному эффекту проявления парамагнитных свойств токов Фуко, существующему в системе двух двойных одинаковых нанослоёв Al-Cu.

По аналогии с магнитными эффектами, возникающими в пара-, диа- и ферромагнетиках, можно ввести для токов Фуко понятия парамагнитной и диамагнитной восприимчивостей χ . Её характеризует отношение индуктивности, создаваемой вихревыми токами в плёнке, к индуктивности уединённого токового индуктора $\chi = L_f / L_s$. Для наноразмерного эффекта это положительная величина, имеющая среднее значение 4.

Ниже нами предложено использовать обнаруженный технологами наноразмерный эффект для формирования нового направления исследований в прорывных технологиях создания в малых объёмах планарной индуктивности с высокой объёмной плотностью типа «проводящая плёнка в токовом кольце», которая не ограничена исследованным диапазоном частот.

На рис. 7.24 представлены результаты экспериментов, выполненных для индуктивности, составленной из шести двойных слоёв Al и Cu.

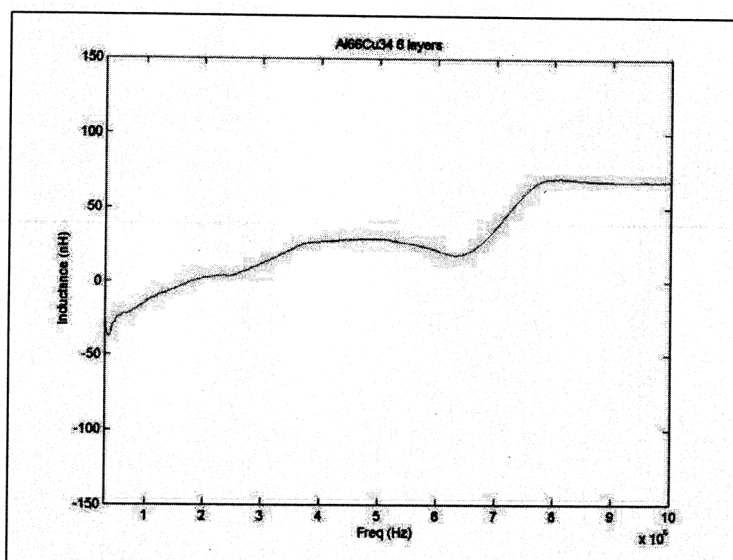


Рис. 7.24. Частотная зависимость индуктивности шестислойной системы Al и Cu

Из рис. 7.24 видно, что в такой системе возникает динамическая индуктивность, теория которой представлена в главе 3. Этот график следует считать ещё одним экспериментальным подтверждением теории вносимой индуктивности. Из него видно, что на частоте 10 кГц индуктивность принимает минимальное отрицательное значение – 40 нГн (в полную силу проявляются диамагнитные свойства токов Фуко). Дальнейшее повышение частоты приводит к появлению второго нуля динамической индуктивности. Он приходится на значение $F_2=1,8$ МГц. Переход через нуль формирует положительную индуктивность (проявляются парамагнитные свойства токов Фуко), которая достигает наибольшего значения 60 нГн на частоте 10 МГц.

На рис. 7.25 приведена частотная зависимость индуктивности десяти двойных слоёв Al и Cu.

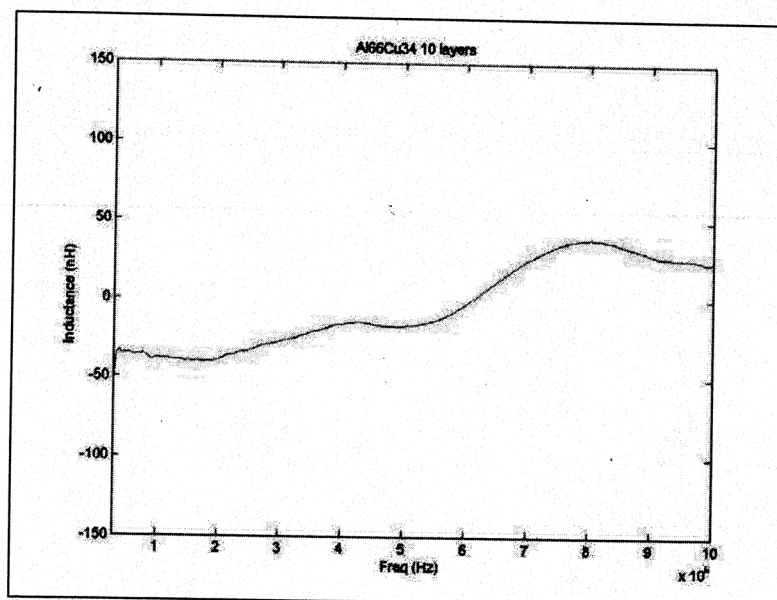


Рис. 7.25. Частотная зависимость индуктивности десятидвойной системы Al и Cu

Из него видно, что для такого количества слоёв в системе снова возникает режим динамической индуктивности. Индуктивность имеет явный минимум на частоте 1,7 МГц. Второй нуль индуктивности приходится на частоту $F_2=6,2$ МГц, а сама индуктивность в частотном диапазоне изменяется в пределах от – 40 нГн до + 40 нГн.

На рис. 7.26 приведена частотная зависимость 30 слоёв Al и Cu. И в этом случае возникает режим динамической индуктивности. Зависимость имеет явно выраженный минимум на частоте 0,8 МГц с большим отрицательным значением индуктивности $L=-600$ нГн. В исследуемом диапазоне частот реализуется только отрицательная индуктивность. Для частоты 10 МГц она увеличивается и достигает значения – 250 нГн.

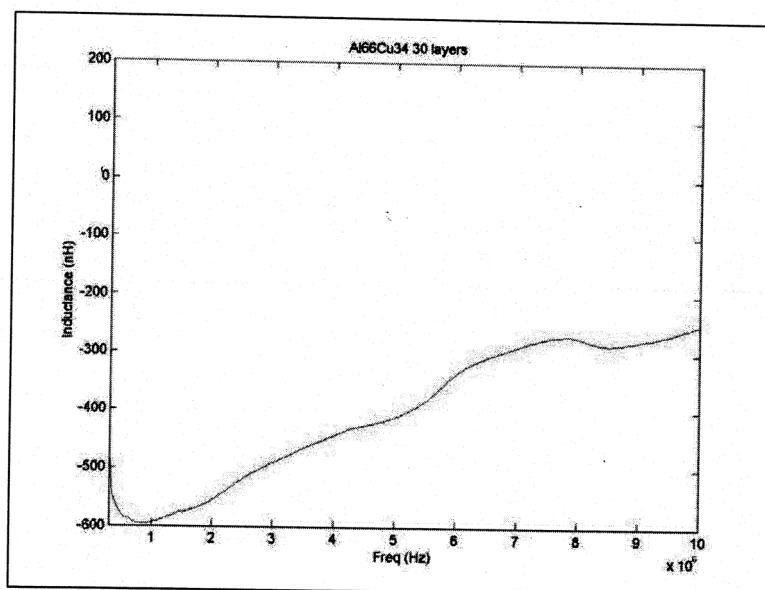


Рис. 7.26. Частотная зависимость индуктивности 30 слоёв Al и Cu

Сделаем оценки объёмной плотности отрицательной индуктивности в последнем случае. Предположим, что многослойный микроиндуктор занимает высоту 20 мкм, а вихревой ток заполняет площадь, ограниченную радиусом 200 мкм. Тогда оценка даёт $\rho_L = -2,4 \cdot 10^5 \text{ Гн/м}^3$. Полученное значение также рекордное. Оно отличается по модулю от положительной объёмной плотности индуктивности почти на порядок.

Диамангнитная восприимчивость в этом случае зависит от частоты и изменяется для последнего случае в пределах от -19 до -46.

7.6. Обработка результатов измерений отрицательной индуктивности макроскопического латунного цилиндра

Методом, изложенным в разделе 7.3, была проведена серия резонансных фазовых измерений отрицательной индуктивности латунного цилиндра. Цилиндр имел в длину $l = 192 \pm 1 \text{ мм}$ и диаметр $D = 7,0 \pm 0,5 \text{ мм}$. Измерительный соленоид имел длину много меньшую, чем длина латунного стержня $l_0 = 23,0 \pm 0,5 \text{ мм}$, число витков $n=98$, намотанные медным проводом $d=0,23 \text{ мм}$. Индуктивность измерительного соленоида имела значение порядка $L_0=21,0 \text{ мкГн}$. Это значение предварительно было измерено прибором В7-80 в режиме измерения индуктивности.

Частотная зависимость индуктивности снималась резонансным способом на пяти частотах в диапазоне от 9 кГц до 1,1 МГц. В таблице 7.6 в четвёртой строке приведены измеренные значения индуктивности без

сердечника 22,3 мкГн и индуктивности с сердечником (9-я строка таблицы) 10,83 мкГн. Для пяти значений ёмкости была измерена частота среза режекторного фильтра как без сердечника (5-я строка таблицы), так и с сердечником (10-я строка таблицы).

Расчётные значения индуктивности измерительного соленоида приведены в 6-й строке таблицы. Расчётные значения индуктивности соленоида со стержнем приведены в 12-й строке таблицы. Обработанные результаты измерений индуктивности измерительного соленоида таковы

$$L_0 = 21,15 \pm 0,60 \text{ мкГн}$$

с относительной погрешностью 2,8 %. В доверительный интервал попадают четыре результата из пяти.

Для индуктивности с латунным сердечником обработанные результаты дают

$$L = 10,97 \pm 0,14 \text{ мкГн}$$

с относительной погрешностью 1,5 %. В доверительный интервал попадают четыре результата из пяти. Второе измерение со значением 11,51 мкГн следует считать промахом.

Среднее значение отрицательной индуктивности латунного стержня

$$L_{\text{отр}} = -10,18 \text{ мкГн.}$$

Вихревые токи Фуко цилиндра находятся в состояниях с диамагнитной восприимчивостью $\chi = -0,5$.

Т а б л и ц а 7.6

**Результаты измерений отрицательной индуктивности
латунного цилиндра**

С номинал	15 uF K 1035 400V PHCH	2.2 uF K X2 GMF 250V	18 нФ К 100В K73-9	5.6 нФ J KM	1000 пФ 5% 200В ФТ-1
1	2	3	4	5	6
С, измеренная В7-80	13.96 uF	2.12 uF	17.23 nF	5.41 nF	923 pF
R изм	499.4 Ом				
L, измеренная без сердечника	22.3 uH				
Частота, измеренная РФ без сердечника L	9164	23270	260000	473280	1137700
Частота, расчётная РФ без сердечника L	9020	23147	249617	458214	1109345

Окончание табл. 7.6

1	2	3	4	5	6
L (мкГ) расчётная	21.06	22.06	20.55	20.9	21.2
L , измеренная с сердечником	10.83 мкН				
Частота, измеренная РФ с сердечником L	12943	32215	358189	657517	1591860
Частота, расчётная РФ с сердечником L	10429	29026	364770	670470	1695000
L (мкГ) расчётная	10.83	11.51	10.83	10.83	10.83
Отношение измеренных частот	1.412	1.384	1.37765	1.389	1.399
Расчётное значение отношения частот	1.434 (по отношению к измеренным индуктивностям)				

Как видно из табл. 7.6, с погрешностью 1,5 % она не зависит от частоты в исследуемом диапазоне. Для того чтобы вычислить значение потоковой отрицательной индуктивности L_{Φ} из соотношения (3.127), необходимо рассчитать высоту h_0 элементарного токового слоя, показанного на рис. 7.27.

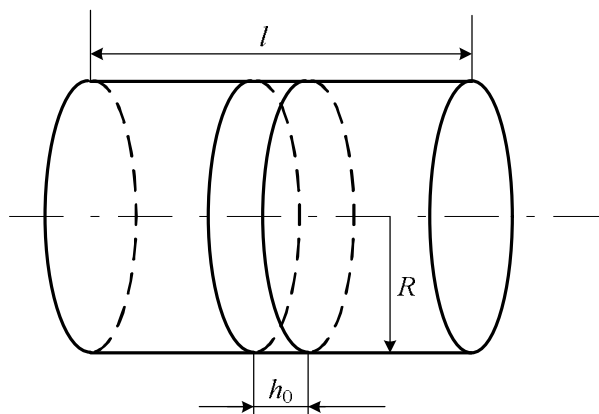


Рис. 7.27. Структура разбиения элементарных вихревых токовых слоёв проводящего цилиндра

В исследуемом случае все вихревые токи Фуко, текущие в проводящем цилиндре длиной l и радиусом R , разбиты на элементарные токовые слои. Их N слоёв. Индуктивность L_{Φ} каждого элементарного

токового слоя рассчитывается из соотношения (3.127). Общая индуктивность проводящего цилиндра складывается из индуктивности отдельных элементарных слоёв. Общая индуктивность проводящего цилиндра всегда в N больше индуктивности элементарного токового слоя. Физический параметр N очень похож на количество витков соленоида. Дальнейшая обработка результатов измерений указывает на их точное совпадение. Чем больше витков, тем больше общая индуктивность соленоида.

Объёмная плотность индуктивности соленоида может быть представлена в двух видах. Первый вид представляет собой определение

$$\rho_L = L/(Sl).$$

В этом соотношении l – длина измерительного соленоида, по которой должен быть обрезан длинный латунный стержень, S – площадь поперечного сечения измерительного соленоида.

Второй вид определения следует из (3.127)

$$\rho_L = \mu_0 / (2h_0^2).$$

Поскольку объёмные плотности индуктивности одинаковы в элементарном токовом слое и во всём латунном стержне, взятого в объёме измерительного соленоида, то из последнего соотношения легко рассчитать h_0 .

$$h_0 = \sqrt{\mu_0 / (2\rho_L)} = \sqrt{\frac{4\pi 10^{-7}}{2 \cdot 11,5}} = 234 \text{ мкм.}$$

Как видно из расчёта, h_0 с высокой степенью точности совпадает с диаметром провода $d=0,23$ мм, которым был намотан соленоид. Тогда на всей длине измерительного соленоида с длиной $l_0=23$ мм укладывается $N=98$ элементарных слоёв с индуктивностью одного элементарного слоя – 100 нГн. *Как видно, значение числа витков n и значение числа элементарных слоёв N – одинаково с высокой степенью точности.*

Проведённые эксперименты с хорошей точностью впервые подтвердили существование отрицательной потоковой частотно-независимой индуктивности, которая всегда возникает в макроскопических проводящих стержнях, помещённых в переменное магнитное поле соленоида.

Отметим, что в подготовке и проведении экспериментов принимал активное участие кандидат технических наук, доцент кафедры «Системы автоматизированного управления» ИТА ЮФУ Иванов Юрий Иванович. Им подготовлены разделы 7.3.4, 7.3.5 и 7.6.

7.7. О развитии способа создания токовихревой планарной индуктивности с высокой объёмной плотностью

Современные КМОП-технологии для создания индуктивности используют площадь 100×100 мкм. Достижимые значения индуктивности в двойном слое металла на частотах 2 ГГц не превышают 2,3 нГн на один слой [11]. В пяти слоях достигается значение 11,4 нГн. Даже при толщине одного слоя в 100 мкм объёмная плотность индуктивности оказывается почти на порядок меньше, чем значение $2,6 \cdot 10^4$ Гн/м³, достигаемое в токовихревых индуктивностях, созданных американскими технологами.

Теория токовихревой индуктивности, предложенная в главе 3, предлагает построить технологический прототип планарной положительной индуктивности типа «проводящая плёнка в токовом кольце», работающая в режиме наноразмерного эффекта токов Фуко (подробности расчётов в главе 6, рис. 6.9 и 6.10). В таблице 7.7 представлены геометрические размеры плёнки для перспективных нанотехнологий, сориентированных на приемлемую индуктивность 10 нГн, и соответствующие объёмные плотности индуктивности, достигаемые в таких плёнках.

Т а б л и ц а 7.7

Объёмная плотность индуктивности плёнки в 10 нГн

h (нм)	50	100	150	200	250
R (мкм)	16	23	28	32	36
ρ_L (Гн/м ³)	$2,51 \cdot 10^8$	$6,28 \cdot 10^7$	$2,79 \cdot 10^7$	$1,57 \cdot 10^7$	$1,0 \cdot 10^7$
h (нм)	300	350	400	450	500
R (мкм)	39	42	45	48	50
ρ_L (Гн/м ³)	$7,0 \cdot 10^6$	$5,13 \cdot 10^6$	$3,93 \cdot 10^6$	$3,1 \cdot 10^6$	$2,5 \cdot 10^6$

Как видно из табл. 7.7, объёмная плотность индуктивности проводящей наноплёнки для исходных геометрических размеров заключена в интервале от $2,5 \cdot 10^6$ до $2,5 \cdot 10^8$ Гн/м³. Эти предельные значения превышают аналогичные, достигнутые американскими технологами, и указывают на то, что проблема дальнейшей интеграции приемлемых значений индуктивности в микрочипах может быть разрешена созданием планарных индуктивностей типа «проводящая плёнка в токовом кольце».

Эксперименты, проведённые американскими технологами с многослойными токовихревыми индуктивностями, независимо подтверждают теорию динамической и потоковой индуктивностей, предложенную в главе 3. Это указывает на ещё одно очень перспективное направление исследований: создание технологии пассивных отрицательных индуктивностей, имеющих высокую объёмную плотность.

Сделаем оценки предельно достижимых положительных и отрицательных индуктивностей для аналоговой микросхемотехники. Уменьшим объёмную плотность $2,6 \cdot 10^4 \text{ Гн/м}^3$, достигнутую американскими технологами, вдвое с учётом пространственного размещения микроиндукторов в различных слоях. Этого требует необходимость введения дополнительных охранных экранов и межиндуктивных связей. Пусть одиночный индуктор займёт площадь $500 \times 500 \text{ мкм}$. На площади корпуса в $10 \times 10 \text{ мм}$ поместится 400 индукторов на 1 см^2 .

При толщине слоя размещения в 1 мм получим объём занимаемый всеми индуктивностями $V = 10^{-7} \text{ м}^3$. Получаемое среднее значение индуктивности рассчитаем из соотношения $L = \rho_L V = 1,3 \cdot 10^4 \cdot 10^{-7} = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$. Оно имеет порядок 1000 мкГн . Для создания такой индуктивности нужно заполнить около 40 слоёв, в которых будут размещены 16000 микроиндукторов. Каждый слой будет иметь толщину в среднем по 25 мкм .

Для технологии создания отрицательной индуктивности в аналоговой микросхемотехнике среднее значение полученной индуктивности нужно увеличить на порядок.

Выводы по разделу 7

Предложен метод измерения погонной индуктивности, использующий в своей основе обработки результатов измерений метод наименьших квадратов.

Метод заключается в том, что к известной индуктивности L_0 подключаются одинаковые участки круглого проводника с одним диаметром, но различной длиной l_0 . Нарращивание индуктивности производят N раз по участку $2l_0$.

Показано, что коэффициенты наилучшей прямой совпадают: один — со значением известной индуктивности, а другой — с погонной индуктивностью.

Предложен метод двух отчётов, применяемый для измерения индуктивностей порядка нГн и меньше. Он заключается в проведении двух измерений индуктивности: первый раз измерение проводится на длине шлейфа l_0 , а второй раз — на длине шлейфа, укороченной в N раз.

Получена формула для расчёта погрешности неизвестной индуктивности, в которой подбором параметров удаётся добиться измерения неизвестной индуктивности с погрешностью прибора.

Показано, что требуемая погрешность измерения начальной длины шлейфа для $N = 2$ и $N = 5$ находится в диапазоне десятков микрометров. Её удаётся уменьшить применением для измерения длины шлейфа микрометра.

Сделана оценка начальной длины шлейфа l_0 , которая для $N = 2$ и $N = 5$ составляет значения 6,6 и 8,3 мм соответственно.

Исследован метод резонансного измерения индуктивности на пассивных фильтрах второго порядка. Поскольку фильтр второго порядка содержит три элемента L , C , R , то проанализированы свойства передаточных функций четырёх вариантов включения этих элементов.

Как оказалось, для проведения точных измерений наиболее удачной схемой является схема режекторного фильтра (РФ). Его самое важное достоинство заключается в том, что получаемая частота нуля совпадает с частотой полюса и не зависит от дополнительно учитываемых паразитных параметров индуктивности и ёмкости.

Предложена методика точных измерений частотной зависимости индуктивности в широком диапазоне частот. Она заключается в том, что сначала находят значение частоты, на которой реализуется нуль коэффициента передачи режекторного фильтра. Затем, зная эту частоту, из формулы для частоты резонанса находят значение индуктивности.

Сделаны сравнения результатов измерений частотной зависимости индуктивности GS -индукторов в высокочастотном диапазоне, проведённые сотрудниками Стенфордского университета, с теорией. Показано, что в исследуемом диапазоне частот индукторы, нагруженные на проводящие слои, находятся в состоянии динамической токовихревой индуктивности.

Из экспериментов следовало, что частотные зависимости в диапазоне от 0,2 до 7 ГГц дают самое большое значение добротности для узорчатого проводящего экрана PGS -индуктора и всегда имеют на частоте 7 Гц нуль добротности и индуктивности.

Полученные частотные свойства индуктивности и добротности принципиально отличались от аналогичных частотных свойств одиночных индукторов, которые обычно на высоких частотах имеют частоту среза. Физическое объяснение такого вида частотных характеристик индукторов, нагруженных на проводящую плёнку, отсутствовало.

В монографии получен теоретический вид частотных характеристик индуктивности проводящей цилиндрической плёнки. В них наблюдается две характеристические частоты системы, в которых возникают два нуля индуктивности. В экспериментах с GS -индукторами было подтверждено существование первого нуля динамической индуктивности.

Эксперименты итальянских технологов с $RPGS$ -индукторами не только подтвердили ход частотных зависимостей индуктивности и добротности, обнаруженный в GS -индукторах, но и обнаружили тот факт, что на гигагерцах индуктивность $RPGS$ -индуктора может стать отрицательной. Показано, что экспериментальный факт совпадает с предсказаниями теории.

Как показывают расчёты, второй нуль частотной зависимости индуктивности *RPGS*-индуктора должен приходиться на значение частоты $1,9 \cdot 10^{12}$ Гц. Это значение частоты 3D ЕМ моделирование не смогло воспроизвести и поэтому в экспериментах его не наблюдали.

Оценки, следующие из теории, с хорошей точностью совпадают с экспериментальными результатами итальянцев и указывают на то, что класс *RPGS*-индукторов следует отнести к классу вносимых индуктивностей, основные физические параметры которых можно предварительно рассчитывать из полученных теоретических результатов.

Сделаны сравнения результатов измерений частотных зависимостей индуктивности микроиндуктора, выполненного в виде спирали, нагруженной на сверхтонкие проводящие нанослои из Al и Cu, проведённые американскими технологами из университета в Дайтоне, с результатами теории.

Проанализирована технологическая последовательность изготовления многослойной индуктивности и адекватность приводимых экспериментальных результатов.

Как показывают эксперименты, индуктивность двухслойной проводящей плёнки практически постоянная с погрешностью в 15 % величина в диапазоне частот от 0,1 до 10 МГц. Доказано, что это подтверждает существование положительной частотно-независимой потоковой индуктивности, предсказанной теорией в разделе 3.3.

Обращено внимание на возможность получения слоистых наноплёнок с высоким значением объёмной плотности индуктивности, вплоть до значений $2,6 \cdot 10^4$ Гн/м³.

Предельное значение объёмной плотности индуктивности удаётся получить благодаря наноразмерному эффекту проявления парамагнитных свойств токов Фуко, существующему в системе двух двойных одинаковых слоёв Al-Cu и предсказанному теорией.

В проводящих плёнках с количеством слоёв больше 6 возникает такой режим протекания вихревого тока, при котором реализуются состояния динамической индуктивности. Для десяти слоёв обнаружен второй нуль индуктивности системы. Он приходится на частоту $F=6,2$ МГц.

Эксперименты, проведённые американскими технологами с 30-слойными индуктивностями, независимо подтверждают теорию динамической индуктивности и указывают на ещё одно перспективное направление исследований: создание технологии пассивной отрицательной индуктивности с высокой объёмной плотностью.

Как показывают расчёты, объёмная плотность индуктивности проводящей наноплёнки для исходных геометрических размеров заключена в интервале от $2,5 \cdot 10^6$ до $2,5 \cdot 10^8$ Гн/м³.

Эти предельные значения превышают аналогичные, достигнутые американскими технологами, и указывают на то, что проблема дальнейшей интеграции приемлемых значений индуктивности порядка 10 нГн в микрочипах может быть разрешена в перспективном направлении создания технологии планарной индуктивности типа «проводящая плёнка в токовом кольце», работающая в режиме наноразмерного эффекта вихревых токов Фуко.

Сделаны оценки предельно достижимых положительных и отрицательных индуктивностей для аналоговой микросхемотехники. Показано, что в слое толщиной в 1 мм и площадью 1 см² можно разместить 16 000 индукторов в 40 слоях. Это позволит создать положительную макроиндуктивность, значение которой будет лежать на уровне 1 мГн. Для отрицательной индуктивности последнее значение будет больше на порядок.

Проведены эксперименты по измерению отрицательной индуктивности макроскопического латунного стержня. С погрешностью 15 % показано, что в диапазоне частот от 0,1 до 100 МГц в нём возникает состояние отрицательной частотно-независимой потоковой индуктивности с объёмной плотностью 11,5 Гн/м³ с диамагнитной восприимчивостью $\chi = -0,5$. Расчётное значение потоковой индуктивности для элементарного токового слоя составило 100 нГн. Существование таких состояний также предсказано теорией в главе 3.

Как показывают эксперименты и расчёты, следующие из теории, ширина элементарного токового вихревого слоя, возбуждённого в проводящем макроскопическом цилиндре, совпадает с диаметром провода с высокой степенью точности.

Проведённые нами эксперименты впервые подтвердили существование частотно-независимой отрицательной потоковой индуктивности, которая всегда возникает в макроскопических проводящих стержнях, помещённых в переменное магнитное поле катушки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии разработаны аналитические методы расчёта интегральных индуктивностей различных симметрий как в низкочастотном, высокочастотном, так и сверхвысокочастотном диапазонах. Классы интегральных индуктивностей, для которых применимы полученные результаты, следующие:

- одиночные планарные токовые 2D-кольца с азимутальным направлением плотности тока;
- планарные индукторы на основе 2D-спиралей Архимеда и обобщённых спиралей;
- 3D-индукторы цилиндрической симметрии с аксиальным направлением в пространстве плотности тока;
- индукторы, использующие свойства отрезка коаксиального кабеля, индуктивностью которого можно управлять направлением и отношением токов в центральной жиле и оплётке;
- токовихревые индуктивности, выполненные в виде трубчатого и сплошного проводящего цилиндра с азимутальным направлением в пространстве плотности тока, как с частотной зависимостью, так с её отсутствием;
- индукторы, выполненные на планарном токовом слое, минимальная индуктивность которых для микронных технологий зависит только от отношения ширины к толщине проводящей ленты;
- токовихревые положительные и отрицательные пассивные многослойные индуктивности с высокой объёмной плотностью;
- индукторы, выполненные в виде ленточной микрокатушки, содержащей проводящую микроплёнку внутри катушки.

Аналитические методы расчёта позволяют провести сравнительный анализ между классами исследованных интегральных индуктивностей и определить наиболее интересные из них, которые рекомендуются использовать в различных технологических процессах для изготовления микросхем.

Наиболее значимыми, на наш взгляд, являются однослойные и многослойные индуктивности, состоящие из планарного индуктора, нагруженного на проводящую цилиндрическую плёнку наноразмерной толщины, либо нагруженную на многослойную цилиндрическую плёнку, состоящую из последовательности двойных слоёв различных металлов (например, Al, Cu в низкочастотном диапазоне).

Эксперименты, выполненные с однослойными и многослойными проводящими плёнками, а также с проводящими цилиндрическими стержнями, указывают на следующие особенности получения положительной или отрицательной токовихровой индуктивности. Особую роль в них играет геометрия токового индуктора. По геометрии создаваемых силовых линий магнитного поля токовые индукторы следует классифицировать как открытые и закрытые.

К закрытым индукторам отнесём классические соленоиды конечной длины. В них средняя плотность силовых линий магнитного поля внутри всегда выше, чем снаружи. На изменение индуктивности соленоида и его частоты среза можно влиять различными способами. Наиболее существенные изменения можно получить, связывая магнитные силовые линии проводящими стержнями или плёнками с различным количеством слоёв. Плёнки устанавливаются поперек силовых линий во внутренней области соленоида.

Для тонкой плёнки, с наноскопической толщиной, положительная индуктивность соленоида может существенно возрасти. При этом должна возникнуть частотно-независимая индуктивность. Она может увеличить частоту среза. В толстой или многослойной плёнке возможно появление состояния динамической индуктивности. На разных частотах суммарная индуктивность системы может иметь положительные значения индуктивности, отличающиеся от исходной индуктивности соленоида.

Расположение соленоида на полупроводящей или проводящей подложке связывает только незначительную часть внешних силовых линий магнитного поля. Это будет слабо изменять результирующую индуктивность соленоида и его частоту среза.

Заполнение проводником всего пространства внутри соленоида даёт максимальный эффект отрицательной индуктивности, вносимой проводящим стержнем. При этом суммарная индуктивность системы соленоид-стержень всегда будет уменьшена, но останется положительной.

К открытым индукторам следует отнести индукторы, выполненные в виде планарной спирали. Такой индуктор создаёт магнитные силовые линии, которые симметрично расположены в обоих полупространствах. Расположение с одной стороны такого индуктора проводящей плёнки с наноскопической толщиной, увеличит суммарную положительную индуктивность системы. Она будет частотно-независимой. Расположение с разных сторон спирального индуктора двух одинаковых проводящих плёнок с наноскопической толщиной ещё больше увеличит положительную суммарную индуктивность системы с сохранением её частотных свойств.

Расположение с одной стороны спирали либо толстой проводящей, либо многослойной плёнки может дать состояние динамической индуктивности. В этом случае суммарная индуктивность системы станет отрицательной и будет зависеть от частоты. Расположение с обеих сторон спирали таких плёнок ещё больше увеличит отрицательную индуктивность системы. Увеличивая число слоёв, можно пропорционально их количеству повышать суммарную отрицательную индуктивность открытой системы.

В качестве планарного индуктора могут быть использованы спирали либо одновитковые токовые кольца. Последние ещё больше увеличивают достигаемую объёмную плотность индуктивности. Как показывают расчёты, проблема дальнейшей интеграции приемлемых значений положительной пассивной индуктивности порядка 10 нГн (на один слой до

500 нм толщины) в микрочипах может быть разрешена в направлении создания перспективной технологии «проводящая плёнка в токовом кольце» (см. раздел 6), работающей в режиме наноразмерного эффекта вихревых токов Фуко.

Другая ветвь этой же многослойной (от 10 до 30 двойных слоёв) перспективной технологии позволит получать пассивные отрицательные индуктивности с предельно высокой объёмной плотностью $\sim -2,0 \cdot 10^7$ Гн/м³.

Сделаны оценки предельно достижимых положительных и отрицательных токовихревых индуктивностей для аналоговой микросхемотехники, использующей эту технологию. Показано, что в слое толщиной в 1 мм и площадью 1 см² можно разместить 16 000 индукторов в 40 слоях. Это позволит создать положительную макроиндуктивность, значение которой будет лежать на уровне 1 мГн. Для отрицательной индуктивности последнее значение будет больше на порядок.

На наш взгляд, последовательность реализации предложенных контурных индуктивностей технологий может быть следующей:

1. Освоить процессы создания многослойных плёночных индуктивностей по технологии, предложенной американскими исследователями из Огайо в [4].

2. Повторить полученные ими результаты на многослойных плёнках Al-Cu, начиная с двухслойных структур и заканчивая структурами с 30 слоями.

3. Проверить существование наноразмерного эффекта положительной токовихревой индуктивности в однослойной проводящей плёнке, толщину которой можно изменять в широком диапазоне, рассчитанном в таблице 6.1.

4. Показать зависимость индуктивности плёнки от её геометрических размеров, рассчитанную в таблице 6.1.

5. Исследовать независимость индуктивности цилиндрической плёнки от значения её удельного сопротивления.

6. Определить зависимость частотного диапазона проводящей плёнки от значения её удельного сопротивления, рассчитанного в таблице 6.2. При этом получить увеличение средней частоты диапазона с ростом удельного сопротивления плёнки.

7. Показать возможность реализации динамической токовихревой индуктивности на толстой однослойной плёнке, минимальное отрицательное значение которой зависит от частоты по закону, рассчитанному в таблице 3.8.

Надеемся, что предложенные в монографии физические основы создания интегральной индуктивности помогут перевести известные процедуры её напыления на научно обоснованный уровень.

Желающие проводить экспериментальные исследования, которые будут связаны с предложенными в монографии идеями и методами расчёта, могут обратиться за помощью к авторам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коротков А.С. Интегральные (микроэлектронные) радиоприёмные устройства систем связи: обзор // Микроэлектроника, 2006. – Т. 35, № 4. – С. 285–305.
2. Nguen N.M., Meyer R.G. Si IC-compatible inductors and LC passive filter // IEEE j. Solid State Circuits. Aug. 1990. – V. 25, № 4. – Pp. 1028–1031. DOI: 10.1109/4.58301
3. Cang J.Y.C., Abidi A., Gaitan M. Large suspended inductors and their use in 2-um CMOS RF amplifier // IEEE Electron Dev. Lett. May, 1993. – V. 14, № 5. – Pp. 246–256. DOI: 10.1109/55.215182
4. Widjaja A., Sarangan A. Method for Fabrication Thin Film Structures with Negative Inductance. Case №: UD-488. US-Patent Pending; Publication № 20090261936. Inventor: Agus-Widjaja, et. al.
5. Schulenberg K.V., Chua C.L., Fork D.K., Lu J.P., Griffiths B. Palo Alto Research Center. Parc's on-chip microcoil demonstrates world-record performance. Mixed Signal Systems Inc., Scotts Valley.
6. Kuhn W.B., Ibrahim N.M. Analysis of Current Crowding Effects in Multiturn Spiral Inductors // IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, 2001. – V. 49, № 1 – Pp. 31–38. DOI: 10.1109/22.899959
7. Yue C.P. and Wong S.S. On-Chip Spiral Inductors with Patterned Ground Shields for Si-Based RFIC's // IEEE J.Solid State Circuit, 1999. – V. 33, № 5. – Pp.743–752.
8. Ragonese E., Biondi T., Scuderi A., Palmisano G., A lumped scalable physics-based model for silicon spiral inductors // The 10th IEEE International Symposium on Electron Devices for Microwave and Optoelectronic Applications, 2002. – Pp. 119–124. DOI: 10.1109/EDMO.2002.1174941
9. Scuderi A., Ragonese E., Biondi T., Palmisano G. «Integrated Inductors and Transformers», CRC Press. Taylor & Francis Group, New York. 2011. – P. 151.
10. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчёт индуктивностей: справочная книга. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 488 с.
11. Эннс В.И., Кобзев Ю.М. Проектирование аналоговых КМОП-микросхем. Краткий справочник разработчика / под ред. канд. техн. наук В.И. Эннса. – М.: Горячая линия – Телеком, 2005. – 455 с.
12. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм: учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1983. – 463 с.
13. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1981. – 798 с.

14. Справочник по специальным функциям. С формулами, графиками и математическими таблицами // под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1979. – С. 830.

15. Конев Д.Н., Будяков А.С., Прокопенко Н.Н. Автоматизированное проектирование интегральных катушек индуктивности для аналоговой микроэлектроники СВЧ диапазона: учеб.-метод. пособие. – Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2007. – 101 с.

16. Сапогин В.Г., Прокопенко Н.Н., Марчук В.И. Поточковая индуктивность плоского проводящего кольца с азимутальной плотностью тока // Успехи современной радиоэлектроники. – 2013. – № 5. – С. 68–72.

17. Sapogin V.G., Prokopenko N.N., Flux inductance of plane conducting ring with azimuth density of current // IEEE 2014 International Conference on Signals and Electronic Systems (ICSES), Poznan. – 2014. – Pp. 1–4. DOI: 10.1109/ICSES.2014.6948711

18. Сапогин В.Г., Прокопенко Н.Н., Манжула В.Г. О расчёте коэффициента увеличения планарной индуктивности спирального типа // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 11(ч. 6). – С. 1150–1153.

19. Сапогин В.Г., Прокопенко Н.Н., Марчук В.И. Погонная индуктивность цилиндрических проводников с аксиальной плотностью тока в сложных функциональных блоках // Инженерный вестник Дона. – 2012. – № 4. – URL: <http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n4t1y2012/1264>: вход свободный.

20. Sapogin V.G., Prokopenko N.N. Running inductance of cylindrical conductors with axial current density // 2014 International Conference on Signals and Electronic Systems (ICSES), Poznan. – 2014. – Pp. 1–4.

21. Сапогин В.Г., Манжула В.Г. Управление погонной индуктивностью коаксиального кабеля с аксиальной плотностью токов // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 5 (ч. 5). – С. 984–989.

22. Савельев И. В. Курс общей физики. В 3 т. Т. 2. Электричество и магнетизм. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1978. – С. 431

23. Сапогин В.Г., Прокопенко Н.Н., Манжула В.Г., Сапунцов Н.Е., Нестюрина Е.Е. Индуктивность сплошного проводящего цилиндра с азимутальной плотностью вихревого тока в низкочастотной области // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 11(ч. 3). – С. 441–446.

24. Сапогин В.Г., Прокопенко Н.Н., Марчук В.И., Манжула В.Г., Будяков А.С. Индуктивные свойства микроскопического проводящего кольца с плотностью вихревого тока азимутального направления // Нано- и микросистемная техника. – 2014. – № 1. – С. 22–26.

25. Сапогин В.Г., Прокопенко Н.Н., Сапунцов Н.Е. Индуктивность цилиндрической плёнки с азимутальной плотностью вихревого тока // материалы междунар. конф. «Актуальные проблемы электронного приборостроения», Саратов, Россия, 25–26 сент. 2014. – Т. II. – С. 358–365.

26. Sapogin V.G., Prokopenko N.N., Sapogina L.K. Solution of solitary current inductor's «cutoff frequency problem» for EHF applications // 2015 IEEE International Conference on Microwaves, Communications, Antennas and Electronic Systems (COMCAS), Tel Aviv. – 2015. – Pp. 1–4. DOI: 10.1109/COMCAS.2015.7360406

27. Сапогин В.Г., Прокопенко Н.Н., Будяков А.С. Физические свойства интегральной индуктивности ленточного MEMS-соленоида на СВЧ // 24-я Междунар. Крымская конф. «СВЧ техника и телекоммуникационные технологии» (КрыМиКо'2014), Севастополь, 7–13 сент. 2014 г.: материалы конф.: в 2 т. – Севастополь: Вебер, 2014. – С. 643–644.

28. Физические величины. Справочник // А.П. Бабичев, Н.А.Бабушкина, А.М. Братковский [и др.]; под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.

29. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.

30. Сапогин В.Г. Механизмы удержания вещества самосогласованным полем: моногр. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. – 254 с.

31. Сапогин В.Г., Прокопенко Н.Н., Панич А.Е. Токовихревая планарная интегральная индуктивность цилиндрической проводящей плёнки (обзор) // Междунар. журнал прикладных и фундамент. исследований. – 2016. – № 11(ч. 2). – С. 211–221.

Научное издание

Сапогин Владимир Георгиевич
Прокопенко Николай Николаевич
Панич Анатолий Евгеньевич

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНДУКТИВНОСТИ С ВЫСОКОЙ СИММЕТРИЕЙ

Монография

Ответственная за выпуск Т.В. Кватер

ИД № 06457 от 19.12.01 г. ПЛД № 10-65175 от 05.11.99 г.

Подписано в печать 27.12.2016 г.

Формат бумаги 60х90/16. Усл. печ. л. 14,75. Тираж 35 экз. Заказ № 344.

Издательский центр ИСОиП (филиала) ДГТУ в г. Шахты
346500, г. Шахты, Ростовская обл., ул. Шевченко, 147